MASO 2011A

Opgaven, der består af 5 delopgaver, skal besvares individuelt indenfor 72 timer. Besvarelsen skal forsynes med en forside med tydeligt navn og underskrift samt sideantal (inklusive forsiden), og den skal sammenhæftes i øverste venstre hjørne. Besvarelsen afleveres på kombinationssekretariatet senest ved eksamens afslutning. Ved bedømmelsen lægges der vægt på argumentationens kvalitet. Der kan henvises til lærebøgerne (Fuglede–Grubb–Madsen og Sydsæter) samt til undervisningsmateriale publiceret på MASO 2011 hjemmesiden (ugesedler, slides F1–F11 og forelæsningsnoter).
Det kan lade sig gøre at besvare opgaven på under 10 håndskrevne $A4$-sider. Skriv tydeligt og kun på én side på hvert ark. Besvarelser på over 15 sider får karakteren -03.

Opgave 1

(a) Redegør for at

$$\int \frac{1}{x^2+x^4}dx = -\frac{1}{x} - \text{Arctan}(x)$$

(b) Redegør for at rækken $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n^4}$ er konvergent.

(c) Sæt $s_{10} = \displaystyle\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n^2+n^4}$. Brug Integralkriteriet til at bestemme positive tal, t og T, sådan at

$$s_{10} + t \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n^4} \le s_{10} + T$$

(d) Hvor meget afviger

$$s_{10} + t + \frac{1}{2}(T-t)$$

maksimalt fra $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n^4}$?

Opgave 2

Lad z være det komplekse tal

$$z = \frac{11}{20}\cdot(\sqrt{3}+i)$$

(a) Find modulus og argument, $|z|$ og $\arg(z)$, for z.
(b) Indtegn (omtrentligt) punkterne z^n for $n = -6, \dots, 6$ i en kompleks plan.
(c) Punkterne fra (b) ligger på en kurve med ligning

$$\theta = a \ln \rho$$

i polære koordinater (ρ, θ). Hvad er a? Tegn kurven!
Vink: Du har allerede tegnet nogle af punkterne på kurven

Opgave 3

Lad $f, g_1, g_2, g_3 \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ være funktionerne givet ved

$$f(x,y) = (x-3)^2 - (y-2)^3, \quad g_1(x,y) = x^2 - y - 3, \quad g_2(x,y) = y-1, \quad g_3(x,y) = -x$$

Betragt minimeringsproblemet

(P) Minimér $f(x,y)$ under bibetingelserne $g_1(x,y) \le 0$, $g_2(x,y) \le 0$, $g_3(x,y) \le 0$

(a) Tegn en skitse af mængden $A_0 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid g_1(x,y) \le 0, g_2(x,y) \le 0, g_3(x,y) \le 0\}$ af mulige løsninger til (P).
(b) Forklar hvorfor A_0 er kompakt og hvorfor (P) har en optimal løsning.
(c) Find $f(0,-3)$, $f(0,1)$ og $f(2,1)$.
(d) Opstil Karush–Kuhn–Tucker betingelserne for problemet (P).
(e) Er der optimale løsninger i det indre af A_0?
(f) Er der optimale løsninger på $\partial A_0 \cap g_3^{-1}(0)$, dvs på den del af randen af A_0 hvor førstekoordianten er 0?
(g) Vis at alle punkter med positiv førstekoordinat på randen af A_0 opfylder regularitetskravet ('føringsbetingelsen').
(h) Find en optimal løsning og den optimale værdi for (P).

Opgave 4

Lad $F\colon \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^2$ være funktionen givet ved

$$F(x,y,z,u,v) = \begin{pmatrix} xy^2 + xzu + yv^2 \\ x^3yz + 2xv - u^2v^2 \end{pmatrix}$$

(a) Find Jacobimatricen $\dfrac{\partial F}{\partial(x,y,z,u,v)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial(x,y,z)} & \dfrac{\partial F}{\partial(u,v)} \end{pmatrix}$ for funktionen F.

(b) Vis at $F(1,1,1,1,1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ og bestem $\dfrac{\partial F}{\partial(x,y,z,u,v)}(1,1,1,1,1)$.

(c) Redegør for at der findes funktioner, $u(x,y,z)$ og $v(x,y,z)$, defineret nær $(1,1,1)$, så

$$\begin{pmatrix} xy^2 + xzu + yv^2 \\ x^3yz + 2xv - u^2v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \end{pmatrix}$$

og at

$$\frac{\partial F}{\partial(x,y,z)} + \frac{\partial F}{\partial(u,v)} \frac{\partial \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

For hvilke (x,y,z,u,v) gælder disse ligninger?

(d) Find Jacobimatricen

$$\frac{\partial \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}}{\partial(x,y,z)}(1,1,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{pmatrix}(1,1,1)$$

i $(1,1,1)$ for funktionen $\begin{pmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \end{pmatrix}$.

(e) Redegør for at

$$x^3z - 2uv^2\frac{\partial u}{\partial y} + 2(x - u^2v)\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Hvor gælder denne ligning?

Opgave 5

Vi betragter det lineære standard maksimeringsprogram

(P) Maksimér $6x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 9x_4$ under bibetingelser

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &\leq 5 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &\leq 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

(a) Formulér det duale program (P')

(b) Find en optimal løsning til det duale program (P')

(c) Løs det primale program (P)

(SLUT)