JMM, februar 2011

Besvarelse af MASO E2010B

Opgave 1

(a) $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = \frac{35}{8}$.

(b) Vi beregner

$$x_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k^2} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \left(\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k^2} \right) = 1 + \frac{1}{2} \frac{(n+1)^2}{n^2} \frac{n^2}{2^n} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k^2} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 x_n$$

(c) Når $n \geq 3$ er $n^2 - 2n - 1$ positiv og vi får

$$x_n > x_{n+1} \iff x_n > 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 x_n \iff x_n \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \right) > 1$$
$$\iff x_n(2n^2 - (n+1)^2) > 2n^2 \iff x_n(n^2 - 2n - 1) > 2n^2$$
$$\iff x_n > \frac{2n^2}{n^2 - 2n - 1}$$

(d) Det er nok at vise at $x_n > 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$. Det ses sådan

$$x_n = \frac{n^2}{2^n} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k^2} > \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n} 2^k = \frac{1}{2^n}(2^{n+1} - 2) > 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

(e) Fordi

$$\left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) > 1 \iff 1 - \frac{1}{2^n} > \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \iff 1 - \frac{1}{2^n} > \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^2$$
$$\iff 1 - \frac{1}{2^n} > 1 - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} \iff \frac{1}{2^n} < \frac{2}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \Longleftarrow \frac{1}{2^n} < \frac{2}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$
$$\iff \frac{1}{2^n} < \frac{1}{(n+1)^2} \iff \frac{2^n}{(n+1)^2} > 1$$

og

$$\frac{2^n}{(n+1)^2} \to \infty \text{ for } n \to \infty$$

er $\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) > 1$ og dermed $x_{n+1} > 2$ fra et vist trin.

(f) Følgen x_n er konvergent fordi den er aftagende og nedad begrænset. Da $\lim x_n = \lim x_{n+1}$ giver rekursionsformlen (b) at

$$\lim x_n = 1 + \frac{1}{2} \lim x_n$$

så $\lim x_n = 2$.

(g) Rækken er konvergent ifølge Sammenligningskriteriet.

Opgave 2

De fire ligninger for a, b, c og d giver (feks)

$$S = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

Opgave 3

(a) A_0 er ikke begrænset, derfor ikke kompakt.

(b) Karush–Kuhn–Tucker betingelserne er
- $x + y - 2 \leq 0$, $x + 2y - 3 \leq 0$
- $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$
- $u_1(x + y - 2) = 0$, $u_2(x + 2y - 3) = 0$
- $\begin{pmatrix} 14 - 2x \\ 6 - 2y \end{pmatrix} - u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) $(x^*, y^*, u_1^*, u_2^*) = (3, -1, 8, 0)$ opfylder Karush–Kuhn–Tucker betingelserne. Bibetingelse g_1 er aktiv og g_2 er slæk i $(3, -1)$. Objektfunktionens værdi er $f(3, -1) = 33$.

(d) $(x^*, y^*) = (3, -1)$ er en optimal løsning til (P) fordi $-f(x, y) + 8g_1(x, y)$ er konveks.

(e) Punkterne $(-n,-n)$, $n=1,2,\dots$ er mulige løsninger og $f(-n,-n)=-2n^2-20n+7\to-\infty$ for $n\to\infty$. Derfor er $\inf f(A_0)=-\infty$.

(f) $f(A_0)=(-\infty,33]$.

Opgave 4

(a) $\dfrac{\partial F}{\partial(x,y,z,u,v)}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial(x,y,z)} & \dfrac{\partial F}{\partial(u,v)}\end{pmatrix}$ hvor

$$\frac{\partial F}{\partial(x,y,z)}=\begin{pmatrix} y^2 & 2xy & u\\ 3x^2z & 2 & x^3\\ u-yz & v-xz & -xy\end{pmatrix},\qquad \frac{\partial F}{\partial(u,v)}=\begin{pmatrix} z & 2v\\ -v & -u\\ x & y\end{pmatrix}$$

(b) $\dfrac{\partial F}{\partial(x,y,z,u,v)}(1,1,1,1,1)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial(x,y,z)}(1,1,1) & \dfrac{\partial F}{\partial(u,v)}(1,1)\end{pmatrix}$ hvor

$$\frac{\partial F}{\partial(x,y,z)}(1,1,1)=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&2&1\\0&0&-1\end{pmatrix},\qquad \frac{\partial F}{\partial(u,v)}(1,1)=\begin{pmatrix}1&2\\-1&-1\\1&1\end{pmatrix}$$

(c) Dette følger af Implicit Funktion Sætning fordi $\dfrac{\partial F}{\partial(x,y,z)}(1,1,1)$ er invertibel.

(d) Jacobi matricen i punktet $(2,0,1)$ er implicit givet ved ligningen

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\3&2&1\\0&0&-1\end{pmatrix}\frac{\partial\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}{\partial(u,v)}+\begin{pmatrix}1&2\\-1&-1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

som giver

$$\frac{\partial\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}{\partial(u,v)}=-\begin{pmatrix}1&2&1\\3&2&1\\0&0&-1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2\\-1&-1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac{3}{2}\\-\frac{3}{2}&-\frac{9}{4}\\1&1\end{pmatrix}$$

(e) I en omegn af $(1,1,1)$ er Jacobianten implicit givet ved ligningen

$$\begin{pmatrix} y^2 & 2xy & u\\ 3x^2z & 2 & x^3\\ u-yz & v-xz & -xy\end{pmatrix}\frac{\partial\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}{\partial(u,v)}+\begin{pmatrix} z & 2v\\ -v & -u\\ x & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

Indgang $(1,2)$ viser at

$$y^2\frac{\partial x}{\partial v}+2xy\frac{\partial y}{\partial v}+u\frac{\partial z}{\partial v}+2v=0$$

Opgave 5

Programmets tableau er

		x_1	x_2 *	x_3 *	x_4	
*	y_1	2	3	-1	1	≤ 0
*	y_2	-3	-1	-4	2	≤ -3
	y_3	-1	-1	2	1	$=1$
		$=1$	≥ -1	≥ 0	$=0$	

(a) (P') Minimér $-3y_2+y_3$ under bibetingelser

$$\begin{aligned}2y_1-3y_2-y_3&=1\\3y_1-y_2-y_3&\ge-1\\-y_1-4y_2+2y_3&\ge0\\y_1+2y_2+y_3&=0\\y_1\ge0,\ y_2&\ge0\end{aligned}$$

(b) Bibetingelserne for (P') indeholder to ligninger som kan løses for (y_2, y_3). Derfor er programmet (P') ækvivalent med

(c) (P') Minimér $-16y_1 + 5$ under bibetingelser

$$\begin{aligned} y_2 &= 3y_1 - 1 \\ 7y_1 - 1 &\geq -1 \\ -27y_1 + 8 &\geq 0 \\ y_3 &= -7y_1 + 2 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Disse krav indeholder $y_1 \leq \frac{8}{27}$ og $y_1 \geq \frac{1}{3} = \frac{9}{27}$. (P') har derfor ingen tilladte løsninger, $M(P') = \emptyset$.

(d) (P) har tilladte løsninger, som feks $(0, 0, 100, -199)$, så (P) er ubegrænset, $\sup(P) = \infty$, ifølge Dualitetssætningen.