MASO Efterår 2010B

Opgaven, der består af 5 delopgaver, skal besvares individuelt.
Besvarelsen skal forsynes med en forside med tydeligt navn og underskrift samt sideantal (inklusive forsiden), og den skal sammenhæftes i øverste venstre hjørne. Besvarelsen afleveres på kombinationssekretariatet senest ved eksamens afslutning.
Ved bedømmelsen lægges der vægt på argumentationens kvalitet. Der kan henvises til lærebøgerne (Fuglede–Grubb–Madsen og Sydsæter) samt til undervisningsmateriale publiceret på kursets hjemmeside (ugesedler, slides F1–F11 og forelæsningsnoter).
Det kan lade sig gøre at besvare opgaven på under 10 håndskrevne $A4$-sider. Skriv tydeligt og kun på én side på hvert ark. Besvarelser på over 15 sider accepteres ikke.

Opgave 1

Lad x_n være følgen givet ved

$$x_n = \frac{n^2}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k^2}$$

(a) Find x_1, x_2 og x_3.
(b) Vis at $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 x_n$.
(c) Vis at $x_n > x_{n+1} \iff x_n > \frac{2n^2}{n^2-2n-1}$ når $n \geq 3$.
(d) Vis at $x_{n+1} > 1 + \left(\frac{n+1}{n}\right)^2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$
(e) Vis at $x_n > 2$ fra et vist trin.
(f) Du får at vide at følgen x_n er aftagende fra et vist trin. Redegør for at $x_n \to 2$ for $n \to \infty$
(g) Er den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n^2}$$

konvergent?

Vink til (b): $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k^2} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k^2}$

Vink til (d): Begynd feks med $\displaystyle x_{n+1} = 1 + \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k^2} > 1 + \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}2^k$ for $n > 1$.

Opgave 2

Find en invertibel kompleks 2×2-matrix

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad a, b, c, d \in \mathbf{C},$$

sådan at

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} S = S \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$$

Opgave 3

Lad $f, g_1, g_2 \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ være funktionerne givet ved

$$f(x,y) = 14x - x^2 + 6y - y^2 + 7, \quad g_1(x,y) = x + y - 2, \quad g_2(x,y) = x + 2y - 3$$

Betragt maksimeringssproblemet

$$\text{(P)} \qquad \text{Maksimér } f(x,y) \text{ under bibetingelserne } g_1(x,y) \leq 0,\ g_2(x,y) \leq 0$$

(a) Tegn en skise af mængden $A_0 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid g_1(x,y) \leq 0, g_2(x,y) \leq 0\}$ af mulige løsninger til (P). Er A_0 kompakt?
(b) Opstil Karush–Kuhn–Tucker betingelserne for problemet (P)
(c) Find et punkt der opfylder Karush-Kuhn-Tucker betingelserne for problemet (P). Hvilke bibetingelser er aktive i punktet?
(d) Find en løsning til (P).

(e) Har *minimerings*problemet

$$\text{(P')} \qquad \text{Minimér } f(x,y) \text{ under bibetingelserne } g_1(x,y) \le 0,\ g_2(x,y) \le 0$$

en løsning?

(f) Bestem $f(A_0)$.

Opgave 4

Lad $F\colon \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^3$ være funktionen givet ved

$$F(x,y,z,u,v) = \begin{pmatrix} xy^2 + zu + v^2 \\ x^3 z + 2y - uv \\ xu + yv - xyz \end{pmatrix}$$

(a) Find Jacobi matricen $\dfrac{\partial F}{\partial(x,y,z,u,v)} = \left(\dfrac{\partial F}{\partial(x,y,z)} \; \dfrac{\partial F}{\partial(u,v)} \right)$ for funktionen F.

(b) Vis at $F(1,1,1,1,1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ og bestem $\dfrac{\partial F}{\partial(x,y,z,u,v)}(1,1,1,1,1)$.

(c) Redegør for at der findes funktioner, $x(u,v)$, $y(u,v)$ og $z(u,v)$ så

$$F(x,y,z,u,v) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$$

og at

$$\frac{\partial F}{\partial(x,y,z)} \frac{\partial \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}{\partial(u,v)} + \frac{\partial F}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

For hvilke (x,y,z,u,v) gælder disse ligninger?

(d) Find Jacobi matricen

$$\frac{\partial \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}{\partial(u,v)}(1,1)$$

i $(1,1)$ for funktionen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}(u,v)$.

(e) Redegør for at

$$y^2 \frac{\partial x}{\partial v} + 2xy \frac{\partial y}{\partial v} + u \frac{\partial z}{\partial v} + 2v = 0$$

Hvor gælder denne ligning?

Opgave 5

Vi betragter det lineære maksimeringsprogram

(P) Maksimér $x_1 - x_2$ under bibetingelser

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &\le 0 \\ -3x_1 - x_2 - 4x_3 + 2x_4 &\le -3 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

og $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$.

(a) Formulér det duale program (P')

(b) Find alle tilladte løsninger til det duale program (P')

(c) Løs det primale program (P)

(SLUT)