JMM, december 2010

Besvarelse af MASO Efterår 2010A

Opgave 1

(1) Antag at $x_n > 0$. Så er

$$\frac{1}{k}\Big(\frac{b}{x_n^k} - 1\Big) > \frac{-1}{k} > -1$$

og dermed er $x_{n+1} > 0$. Da vi antager at $x_0 > 0$ får vi $x_n > 0$ for alle $n \geq 0$ ved induktion.

(2) For alle $n \geq 0$ er

$$x_{n+1}^k = x_n^k\Big(1 + \frac{1}{k}\big(\frac{b}{x_n^k} - 1\big)\Big)^k \geq x_n^k\big(1 + \frac{b}{x_n^k} - 1\big) = b$$

(3) Vi ved nu at $x_n^k \geq b$ og $x_n > 0$ for alle $n \geq 0$. Dermed er $\frac{b}{x_n^k} - 1 \leq 0$ så $x_{n+1} \leq x_n$.

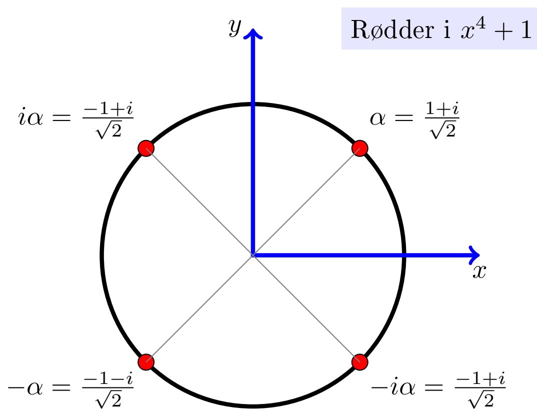
(4) Følgen (x_n) er konvergent fordi den er aftagende og nedad begrænset af 0.

(5) Da $x_n \geq 0$ for alle n er $a \geq 0$. Da $\lim x_n^k = (\lim x_n)^k = a^k$ og $x_n^k \geq b$ er $a^k \geq b > 0$ så $a \neq 0$. Altså er $a > 0$.

(6) Da $\lim x_n = a = \lim x_{n+1}$ hvor $a > 0$ giver rekursionsformlen at

$$a = a\Big(1 + \frac{1}{k}\big(\frac{b}{a^k} - 1\big)\Big)$$

som viser at $a^k = b$. Men det betyder at $a = \sqrt[k]{b}$.



Opgave 2

(1) Hvis $x^4 = -1$ så er $\pi = \rho(-1) = \rho(x^4) = \rho(x)^4$ så $\rho(x) = 1$. Desuden er $\pi = \theta(-1) = \theta(x^4) = \theta(x)^4$. Altså er $\theta(x) = \frac{\pi}{4} + j\frac{\pi}{2}$, $j \in$. Rødderne er derfor $\alpha\sqrt[4]{1} = \alpha\{1, i, -i, -1\} = \{\alpha, i\alpha, -i\alpha, -\alpha\} = \{\alpha, \overline{\alpha}, i\alpha, \overline{i\alpha}\}$ hvor $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$.

(2) $x^4 + 1 = (x - \alpha)(x - \overline{\alpha})(x - i\alpha)(x - \overline{i\alpha}) = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$

Opgave 3

(1) A_0 er en del af en cirkelskive. A_0 er afsluttet og begrænset, altså kompakt.

(2) Karush–Kuhn–Tucker–betingelserne er
- $x^2 + y^2 \leq 5$, $3x + y \leq 6$
- $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$
- $u_1(x^2 + y^2 - 5) = 0$, $u_2(3x + y - 6) = 0$
- $\begin{pmatrix} 4x + 2y - 10 \\ 2x + 2y - 10 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3) $(x^*, y^*, u_1^*, u_2^*) = (1, 2, 1, 0)$ opfylder betingelserne. Da $g_1(1, 2) = 0$ og $g_2(1, 2) = -1$ er g_1 aktiv og g_2 er slæk i $(1, 2)$.

(4) Da $f(x, y) + g_1(x, y) = 3x^2 + 2xy + 2y^2 - 10x - 10y - 5$ er konveks er $(x^*, y^*) = (1, 2)$ en løsning til minimeringsproblemet (P) ifølge Karush–Kuhn–Tucker Sætning. Funktionen $f(x, y) + g_1(x, y)$ er konveks fordi Hessianten

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

er positiv definit.

(5) Da A_0 er kompakt og f er kontinuert antager f både et minimum og maksimum på A_0. Da $(-1,-1) \in A_0$ og $f(-1,-1) = 25$ er $\max f(A_0) \geq 25$. Det er ikke svært at se at f er negativ på $A_0 \cap g_2^{-1}(0)$. Derfor er bibetingelse g_2 slæk i et maksimumspunkt. Bibetingelse g_1 er aktiv, for hvis g_1 var slæk så ville vi have et indre punkt i A_0 og det ville være et stationært punkt for f. Men det eneste stationære punkt for f er $(0,5)$.

Norsk besvarelse

Opgave 4

(1) $\dfrac{\partial F}{\partial(x,y,z,u,v)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial(x,y,z)} & \dfrac{\partial F}{\partial(u,v)} \end{pmatrix}$ hvor

$$\frac{\partial F}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \exp(y) & x\exp(y) & u \\ 2xv & -u\sin(y) - z^2 & -2yz \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial F}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} z & \sin(v) \\ \cos(y) & x^2 \end{pmatrix}$$

(2) $F(2,0,1,1,0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\dfrac{\partial F}{\partial(x,y,z,u,v)}(2,0,1,1,0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial(x,y,z)}(2,0,1,1,0) & \dfrac{\partial F}{\partial(u,v)}(2,0,1,1,0) \end{pmatrix}$ hvor

$$\frac{\partial F}{\partial(x,y,z)}(2,0,1,1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial F}{\partial(u,v)}(2,0,1,1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(3) Dette følger af Implicit Funktion Sætning fordi $\dfrac{\partial F}{\partial(u,v)}(2,0,1,1,0)$ er invertibel.

(4) Jacobimatricen for funktionen $\begin{pmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \end{pmatrix}$ i punktet $(2,0,1)$ er implicit givet ved ligningen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \frac{\partial \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}}{\partial(x,y,z)}(2,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

som giver

$$\frac{\partial \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}}{\partial(x,y,z)}(2,0,1) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

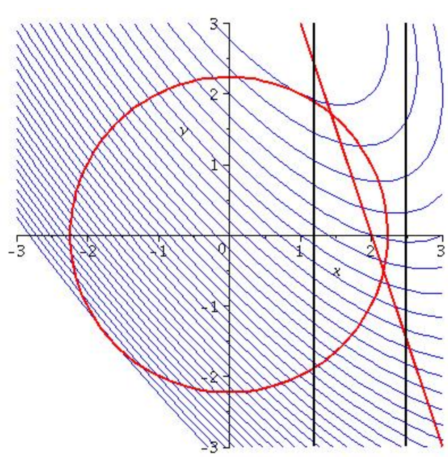
(5) Mere generelt er Jacobimatricen i en omegn af $(2,0,1)$ implicit givet ved

$$\begin{pmatrix} \exp(y) & x\exp(y) & u \\ 2xv & -u\sin(y) - z^2 & -2yz \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z & \sin(v) \\ \cos(y) & x^2 \end{pmatrix} \frac{\partial \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}}{\partial(x,y,z)}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

På plads $(1,1)$ aflæser vi

$$\exp(y) + z\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) + \sin(v(x,y,z))\frac{\partial v}{\partial x}(x,y,z) = 0$$

Opgave 5



Figur 1. Opgave 3

Programmets tableau er

	x_1^*	x_2^*	x_3	x_4^*	
y_1^*	-1	5	2	5	5
y_2	0	3	0	1	2
y_3	-1	0	1	2	1
	0	5	1	4	

(1) (P') Minimér $5y_1 + 2y_2 + y_3$ under bibetingelser

$$\begin{aligned} -y_1 - y_3 &\geq 0 \\ 5y_1 + 3y_2 &\geq 5 \\ 2y_1 + y_3 &= 1 \\ 5y_1 + y_2 + 2y_3 &\geq 4 \end{aligned}$$

og $y_1 \geq 0$

(2) Da $y_3 = 1 - 2y_1$ er (P') reelt et minimeringsprogram i to variable, y_1 og y_2. Vi finder geometrisk at $(y_1^*, y_2^*, y_3^*) = (1, 1, -1)$ er en optimal løsning. Den optimale værdi er $\inf(P') = 6$. Den anden bibetingelse er ikke aktiv.

(3) Dualitetssætningen giver nu at $x_2 = 0$, $5x_2 + x_3 + 4x_4 = x_3 + 4x_4 = 6$ og $-x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -x_1 + 2x_3 + 5x_4 = 5$. Sammen med bibetingelserne $3x_2 + x_4 = x_4 = 2$ og $-x_1 + x_3 + 2x_4 = 1$ fås $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) = (1, 0, -2, 2)$.