MASO Efterår 2010A

Opgaven, der består af 5 delopgaver, skal besvares individuelt.
Besvarelsen skal forsynes med en forside med tydeligt navn og underskrift samt sideantal (inklusive forsiden), og den skal sammenhæftes i øverste venstre hjørne. Besvarelsen afleveres på kombinationssekretariatet senest ved eksamens afslutning.
Ved bedømmelsen lægges der vægt på argumentationens kvalitet. Der kan henvises til lærebøgerne (Fuglede–Grubb–Madsen og Sydsæter) samt til undervisningsmateriale publiceret på kursets hjemmeside (ugesedler, slides F1–F11 og forelæsningsnoter).
Det kan lade sig gøre at besvare opgaven på under 10 håndskrevne $A4$-sider. Skriv tydeligt og kun på én side på hvert ark. Besvarelser på over 15 sider accepteres ikke.

Opgave 1

Lad $k \geq 2$ være et naturligt tal og lad $b > 0$ og $x_0 > 0$ være positive reelle tal. Lad x_n, $n \geq 0$, være følgen defineret ved

$$x_{n+1} = x_n\Big(1 + \frac{1}{k}\big(\frac{b}{x_n^k} - 1\big)\Big), \qquad n \geq 0$$

(1) Vis at $x_{n+1} > 0$ hvis $x_n > 0$. Slut at $x_n > 0$ for alle $n \geq 0$.
(2) Vis at $x_{n+1}^k \geq b$ for alle $n \geq 0$
(3) Vis at $x_{n+1} \leq x_n$ for alle $n \geq 0$.
(4) Vis at følgen (x_n) er konvergent. Sæt $a = \lim x_n$.
(5) Vis at $a > 0$.
(6) Vis at $\lim x_n = \sqrt[k]{b}$.

Vink til (1): Hvad kan du sige om $\frac{1}{k}\big(\frac{b}{x_n^k} - 1\big)$ hvis du ved at $x_n > 0$ og $k \geq 2$?
Vink til (2): Du må gerne benytte at $(1+x)^k \geq 1 + kx$ for alle $x \geq -1$ pga konveksitet.
Vink til (6): Definitionen af x_{n+1} giver en identitet som a opfylder. Hvad er $\lim x_{n+1}$?

Opgave 2

Vi ser på polynomiet $P(x) = x^4 + 1$ af grad 4.

(1) Bestem samtlige komplekse rødder i $P(x)$ og skriv dem på formen $a + ib$.
(2) Skriv $P(x)$ som et produkt to andengradspolynomier med reelle koefficienter og uden reelle rødder.

Opgave 3

Lad $f, g_1, g_2 \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ være funktionerne givet ved

$$f(x,y) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 10x - 10y, \quad g_1(x,y) = x^2 + y^2 - 5, \quad g_2(x,y) = 3x + y - 6$$

Betragt minimeringsproblemet

(P) Minimer $f(x,y)$ under bibetingelserne $g_1(x,y) \leq 0$, $g_2(x,y) \leq 0$

(1) Tegn en skitse af mængden $A_0 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid g_1(x,y) \leq 0, g_2(x,y) \leq 0\}$ af mulige løsninger til (P). Forklar hvorfor A_0 er kompakt.
(2) Opstil Karush–Kuhn–Tucker betingelserne for problemet (P)
(3) Find et punkt der opfylder Karush-Kuhn-Tucker betingelserne for problemet (P). Hvilke bibetingelser er *aktive* i punktet?
(4) Find en optimal løsning til (P).
(5) Redegør for at *maksimerings*problemet

(P') Maximer $f(x,y)$ under bibetingelserne $g_1(x,y) \leq 0$, $g_2(x,y) \leq 0$

har en optimal løsning. Er bibetingelse g_2 aktiv i en løsning til (P')? Hvad med bibetingelse g_1?

Opgave 4

Lad $F \colon \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^2$ være funktionen givet ved

$$F(x,y,z,u,v) = \begin{pmatrix} x\exp(y) + uz - \cos(v) \\ u\cos(y) + x^2 v - yz^2 \end{pmatrix}$$

(1) Find Jacobimatricen $\dfrac{\partial F}{\partial(x,y,z,u,v)} = \left(\dfrac{\partial F}{\partial(x,y,z)}\ \dfrac{\partial F}{\partial(u,v)}\right)$ for funktionen F.
(2) Vis at $F(2,0,1,1,0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ og bestem $\dfrac{\partial F}{\partial(x,y,z,u,v)}(2,0,1,1,0)$.

(3) Redegør for at der findes funktioner, $u(x,y,z)$ og $v(x,y,z)$, så

$$F(x,y,z,u,v) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \end{pmatrix}$$

og at

$$\frac{\partial F}{\partial(x,y,z)} + \frac{\partial F}{\partial(u,v)} \frac{\partial \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

For hvilke (x,y,z,u,v) gælder disse ligninger?

(4) Find Jacobimatricen

$$\frac{\partial \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}}{\partial(x,y,z)}(2,0,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{pmatrix}(2,0,1)$$

i $(2,0,1)$ for funktionen $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y,z)$.

(5) Redegør for at

$$\exp(y) + z\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) + \sin(v(x,y,z))\frac{\partial v}{\partial x}(x,y,z) = 0$$

Hvor gælder denne ligning?

Opgave 5

Vi ser på det lineære maksimeringsproblem

(P) Maksimér $5x_2 + x_3 + 4x_4$ under bibetingelser

$$\begin{aligned} -x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 5x_4 &\leq 5 \\ 3x_2 + x_4 &= 2 \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

og $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_4 \geq 0$

(1) Formulér det duale program (P')

(2) Find en optimal løsning til og den optimale værdi for det duale program (P')

(3) Find en optimal løsning til (P)

(SLUT)