POINCARÉ FORMODNINGENS SKÆBNE I NÆSTEN ALLE DIMENSIONER

Indhold

1. Summary

This paper is a Master Thesis in mathematics at The University of Copenhagen. The subject of the paper is The Poincaré Conjecture and its generalization to higher dimensions. The main part of the thesis is devoted to an explanation of the proof of the conjecture in dimensions greater than four. The rest of the paper introduces the theoretical background behind the proof and comments on the history of the conjecture in low dimensions. It also explains the reason why the highdimensional technique breaks down in dimensions three and four.

It is a main point of the paper, that it is possible to follow the ideas in the proof of the generalized conjecture without going through all the technical details.

The main theorem proved is the h-cobordism theorem in dimensions greater than five. The basic requirements for reading the paper without too many problems is some knowledge of topology and familiarity with the concept of differentiable manifolds.

2. Indledende bemærkninger

Dette er et speciale om en matematisk formodning. Formodningen har trods sin korte og relativt simple formulering overlevet i næsten 100 år, uden at den endnu er blevet bevist eller modbevist. Der er tale om Poincaré formodningen (PC), som Henri Poincaré fremsatte i sin artikel "Cinquième complément à l'analysis situs" fra 1904, se Poincaré ([18], s. 498). På sidste side skriver han:

> Est-il possible que le groupe fondamental de V se réduise à la substitution identique, et que pourtant V ne soit pas simplement connexe?

Han slutter siden med kommentaren:

> Mais cette question nous entraînerait trop loin.

Hans formodning drejer sig om 3-dimensionelle mangfoldigheder, og det første citat ville lyde omtrent som følger på moderne matematikerdansk:

> Er det muligt, at en lukket 3-dimensionel mangfoldighed, V, har triviel fundamentalgruppe, uden at V af den grund er homeomorf med den 3-dimensionelle sfære?

Vi skal se på følgende generalisering af Poincarés oprindelige formodning kaldet Den generaliserede Poincaré formodning (GPC). Vi vil omtale PC og GPC synonymt.

Poincaré formodningen 2.1. *Lad M være en lukket enkeltsammenhængende kombinatorisk n-mangfoldighed med samme homologi som S^n. Da vil M være homeomorf med S^n.*

Forklaringer på formodningens ingredienser findes i afsnit 4.1 og afsnit 9. Der vil igennem specialet også blive benyttet en ækvivalent formulering.

Poincaré formodningen 2.2. *Lad M være en kombinatorisk n-homotopisfære. Da vil M være homeomorf med S^n.*

At de to udsagn er ækvivalente, vender vi tilbage til i afsnit 4.1 om homotopi og homologi. I stedet for vil vi se løst på, hvad formodningen handler om. Det kræver først en kort omtale af nogle begreber samt en skitse af formodningens historie. Det er dog på sin plads at nævne den for mange overraskende kendsgerning, at den generaliserede formodning er blevet bevist i alle andre tilfælde end det oprindelige.

For dette speciale gælder medmindre andet nævnes, at alle rum er topologiske og at alle afbildninger er kontinuerte. Der vil hovedsageligt blive talt om tre forskellige slags rum, nemlig de topologiske mangfoldigheder, de kombinatoriske mangfoldigheder og de glatte mangfoldigheder. Deres indbyrdes forhold kan udtrykkes ved, at de glatte mangfoldigheder udgør en delkategori af de kombinatoriske, som selv udgør en delkategori af de topologiske. Det er nødvendigt at forstå disse indbyrdes forhold for at forstå de vigtige milepæle i formodningens historie, som vi nu skal se på.

Formodningen blev fremsat af Poincaré i 1904. Den skal ses i lyset af, at Poincaré i sin artikel viste, at der findes en lukket 3-mangfoldighed med samme homologi som sfæren, men uden at den er homeomorf med sfæren.

Den oprindelige formodning drejede sig om kombinatoriske mangfoldigheder.

I begyndelsen af 60'erne skete et stort gennembrud. Stephen Smale viste i 1961 den generaliserede formodning for dimensioner større end 4. Lignende resultater blev opnået med andre metoder af John Stallings og Christopher Zeeman. Smale beviste formodningen for glatte mangfoldigheder. Derefter generaliserede han sin metode til at omfatte de kombinatoriske. Resultatet af Stallings og Zeeman blev i 1966 udnyttet af Maxwell Newman til at give et bevis for den topologiske udgave af formodningen.

Efter intensivt arbejde med 4-dimensionelle mangfoldigheder lykkedes det i 1982 Michael Freedman at vise den topologiske og dermed den kombinatoriske udgave af formodningen. Den generaliserede formodnings sandhed var kendt i 1 og 2 dimensioner inden Poincaré fremsatte sin formodning i 1904. Altså har der siden 1982 kun været et uafklaret tilfælde, nemlig $n = 3$.

Der er siden foråret 2002 blevet fremsat mindst tre påstande om en afgørelse i det 3-dimensionelle tilfælde. I april 2002 fremsatte Martin Dunwoody et bevis. Der har imidlertid vist sig at være et hul i argumentationen, som endnu ikke er blevet lappet. I oktober 2002 fremsatte Sergey Nikitin et bevis, som hurtigt blev gendrevet både pga. en fejl i en definition og via et modeksempel til en af de beviste sætninger. Den seneste påstand om en mulig afgørelse er fremsat af Grisha Perelman. Den baserer sig på Thurstons geometriseringsformodning, som vi vender tilbage til i afsnit 10.

Disse forsøg på at bevise formodningen er nævnt på dette sted for at illustrere, at der er tale om et aktivt emne. Aktiviteten skal ses på baggrund af to ting. For det første er 100 år gamle problemer altid en torn i øjet på matematikersamfundet. For det andet har Clay Mathematics Institute udnævnt problemet til et af syv væsentlige uløste problemer i matematikken ved indgangen til dette årtusinde[1]. I den forbindelse har instituttet udlovet en pris på en mio. dollars for en afklaring af formodningen.

Det historiske vue leder over til spørgsmålet: Hvad handler formodningen om? Løst fortalt påstår den, jf. formodning 2.2, at homotopi er brugbart som værktøj til at undersøge, om to mangfoldigheder af en specielt simpel type er homeomorfe. Det er et fornuftigt spørgsmål, fordi det i nogle tilfælde er muligt at beregne homotopigrupperne for to mangfoldigheder, mens det ikke er muligt at se direkte, om de er homeomorfe.

Den sidste del af denne indledning er en læsevejledning til specialet. Specialet er tænkt som et projekt i formidling af matematik[2]. Det er meningen, at en læser med en ide om differentiable mangfoldigheder, en smule algebraisk topologi og en vilje til at acceptere homologi- og homotopigrupper som værktøjer kan forstå store dele af specialet uden en uoverskuelig arbejdsbyrde.

[1] www.claymath.org

[2] Formidling bruges løst i denne sammenhæng og dækker også over undervisning.

Der ligger en grundlæggende konflikt mellem formidlingens hang til, at modtageren skal fascineres og den moderne matematiks hang til, at udsagn skal bevises. Det udtrykkes også af William Thurston ([22], Readers Advisory):

> The most efficient logical order for a subject is usually different from the best psychological order in which to learn it.

Da den moderne matematiks struktur nødvendigvis er central i et matematisk speciale, er formidlingsaspektets indflydelse begrænset til opbygningen af specialet, samt at en række resultater bliver forklaret med henvisning til beviserne. Det sidste betyder, at de sætninger, lemmaer osv. der nævnes, forhåbentligt kan forstås som udsagn uafhængigt af deres beviser. Hvis dette ikke er tilfældet, har man som læser to muligheder; at forfølge referencerne eller at have tålmodighed og se om forståelsen ikke kommer, når udsagnet benyttes eller nævnes senere i teksten.

Opbygningen af specialet er tænkt sådan, at læseren kan vælge at springe mellem de forskellige afsnit. En mulig vej gennem specialet er afsnit 3, 6, 7, 8 og 10 i nævnte rækkefølge. De resterende afsnit er tænkt som tekniske afsnit, som man kan læse, når de nævnte begreber dukker op i teksten. Afsnit 9 indeholder også en introduktion om forholdet mellem differentiable, kombinatoriske og topologiske mangfoldigheder. Vi benytter den sproglige konvention, at begreber opkaldt efter en person skrives i to ord og det første staves med stort f.eks. Morse funktion. En sidste konvention: I afsnittene 3, 5, 6, 7, 8 og 10 er mangfoldigheder og afbildninger glatte, medmindre andet er nævnt.

3. Hanke og Morse teori

Vi skal hovedsageligt beskæftige os med Morse teori i dette afsnit. Det interessante for os er Morse teoriens sammenspil med hankelegemer. Derfor tager vi en kort beskrivelse af begrebet at påsætte en hank. Den mere tekniske og uddybende gennemgang af dette begreb kan findes i afsnit 6 om hankelegemer.

3.1. **Notits om hankelegemer.** Vi minder om konventionen fra indledningen. I dette afsnit er alle mangfoldigheder og afbildninger glatte, medmindre andet nævnes. Det betyder bl.a., at de to symboler $\cong$ og $\cong_{Diff}$ tillægges samme betydning. Denne konvention til trods vælger vi visse steder at understrege glatheden, fordi den enten er central, eller fordi den ikke er automatisk for et bestemt objekt. Vi minder om, at en omtale af de benyttede begreber kan findes i afsnit 9.

Lad M være en n-mangfoldighed med rand ∂M. Lad D^n være n-disken med rand S^{n-1} og med en $S^{\lambda-1}$ indlejret i randen, $0 \leq \lambda \leq n$. Vi benytter konventionen: $S^{-1} = \emptyset$. Lad $h : S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda} \to \partial M$ være en indlejring. Vi opnår M påsat en λ-hank, H^λ, ved

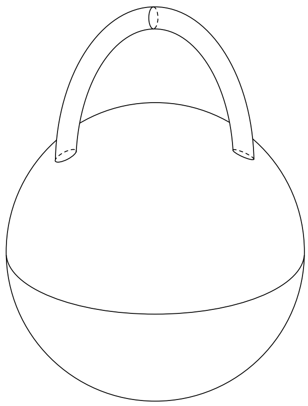
$$M \cup H^\lambda = (M - h(S^{\lambda-1} \times \{0\})) \cup_\sim (D^n - S^{\lambda-1}),$$

hvor $\sim$ er en identifikation af tubulære omegne af $S^{\lambda-1}$ og $h(S^{\lambda-1} \times \{0\})$, se evt. afsnit 9 for definitionen af en tubulær omegn. Selvom notationen ikke udtrykker det, skal man være opmærksom på, at $M \cup H^\lambda$ afhænger af h. Hvis $\lambda = 0$ giver vores konstruktion den disjunkte forening af M og D^n.

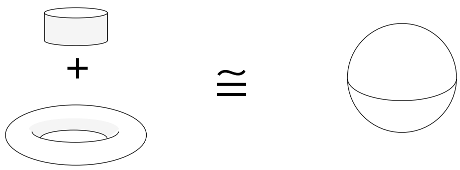
Man kan vælge en anden tilgang til begrebet, som måske er intuitivt lettere at forstå, men som efterlader et teknisk problem. Givet en indlejring $f^\lambda : S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda} \to \partial M$ kan vi klæbe en n-disk, $D^\lambda \times D^{n-\lambda}$, sammen med mangfoldigheden M via f^λ, dvs. $M \cup_{f^\lambda} D^\lambda \times D^{n-\lambda}$. Det giver en mangfoldighed, der minder om $M \cup H^\lambda$, som vi betegner $M + (f^\lambda)$. Vi vil i det følgende tillade os at regne de to konstruktioner for ækvivalente. At vi kan tillade os det fremgår af den tekniske beskrivelse i afsnit 6, hvor vi også ser på det tekniske problem knyttet til den sidste af konstruktionerne.

Vi kalder en mangfoldighed påsat en hank eller flere ved en af de to metoder for et hankelegeme. Vi betragter to hankelegemer som ens, hvis de er diffeomorfe. Fordi de to konstruktioner er ækvivalente, kan vi benytte den sidstnævnte til at visualisere lavdimensionelle hankelegemer, f.eks. kunne D^3 påsat en 1-hank, $D^1 \times D^2$, se ud som på figur 1. Og en solid torus kan, som figur 2 viser, ændres til en 3-disk, ved at man påsætter en 2-hank. Det skraverede område på både torussen og disken svarer til $S^1 \times D^2$, som er de områder, der identificeres.

Bemærkning 3.1. Figurerne viser samlet, at hvis vi tager en disk, D^3, og påsætter en 1-hank, giver det os en mangfoldighed, som er diffeomorf med en solid torus. Herefter kan vi påsætte en 2-hank, hvilket giver os den oprindelige D^3 tilbage. Dette er et første eksempel på, at to hanke kan annullere hinanden.



FIGUR 1. En 0-hank påsat en 1-hank.



FIGUR 2. En solid torus påsat en 2-hank.

Hvis en mangfoldighed, W, er diffeomorf med $M + (f^\lambda)$, hvor sammenklæbningen foregår vha. en indlejring f^λ, kalder man $M + (f^\lambda)$ for en præsentation af W. Det kan naturligvis være væsentligt at holde styr på, hvilken sammenhængskomponent af randen f^λ rammer. I de situationer benytter man notationen $V = \chi(M, Q; f^\lambda; \lambda)$, hvor Q er den sammenhængskomponent af ∂M, som indeholder billedet af f^λ. I tilfældet $\lambda = 1$ skal man være opmærksom på, at billedet kan ligge i to sammenhængskomponenter, da S^0 ikke er sammenhængende. Hvis det ikke er forvirrende, tillader vi os nogle gange at undlade indekset λ i notationen f^λ, når λ i sammenhængen er velkendt.

Man kan naturligvis udvide begrebet og påsætte k λ-hanke. Dette noterer man som

$$\begin{aligned} W = &\quad \chi(M, Q; f_1, \ldots, f_k; \lambda) \quad \text{eller} \\ W \cong &\quad M + (f_1^\lambda) + \cdots + (f_k^\lambda) \quad \text{eller} \\ W \cong &\quad M \cup H_1^\lambda \cup \cdots \cup H_k^\lambda. \end{aligned}$$

Vi skal senere se, at rækkefølgen er underordnet, jf. lemma 6.9. Hvis man vælger $M = D^n$, får man en speciel klasse af mangfoldigheder. Elementerne i denne klasse kalder vi for elementære hankelegemer, og vi skriver, at $H \in \mathcal{H}(n, k, \lambda)$, hvis $H = \chi(D^n; f_1, \ldots, f_k; \lambda)$. Det var den korte intro om hankelegemer, nu vender vi blikket mod Morse teorien.

3.2. **Morse teori.** Der findes nogle funktioner først beskrevet af Marston Morse, som er utroligt nyttige, når det drejer sig om at studere glatte mangfoldigheder med vores hensigter. De kaldes Morse funktioner. I det følgende skal vi se på dem og nogle resultater, som forbinder dem med teorien om hankelegemer.

Vi minder først om, hvad der forstås ved et kritisk punkt for en funktion på en mangfoldighed.

Definition 3.2. Lad M være en mangfoldighed og lad $f : M \to \mathbb{R}$ være en funktion. Et punkt $p \in M$ kaldes et kritisk punkt for f og $f(p)$ for en kritisk værdi, hvis $D_p(f) = 0$, hvor $D_p(f) : T_pM \to \mathbb{R}$ er differentialet for f i p.

En interessant delmængde af kritiske punkter er de ikke-degenererede.

Definition 3.3. Hvis $f : M \to \mathbb{R}$ er en funktion på n-mangfoldigheden M og $p \in M$ er et kritisk punkt for f, så siges p at være ikke-degenereret, hvis Hessian matricen

$$H_p(f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right)$$

er ikke-singulær, dvs. invertibel.

Hessian matricen i et punkt $p \in M$, $H_p(f)$, er en symmetrisk matrix. Altså er den diagonaliserbar. Hvis f har et kritisk punkt p, kan man definere et begreb, man kalder f's indeks i p.

Definition 3.4. Lad p være et kritisk punkt for $f : M \to \mathbb{R}$. Man definerer f's indeks i p som indekset af H_p, dvs. antallet af negative egenværdier.

Den egentlige definition er ikke så interessant for os. Det er derimod følgende lemma af Morse, som beskriver betydningen af et punkts indeks tilstrækkeligt til vores senere brug.

Lemma 3.5. *Lad p være et ikke-degenereret kritisk punkt for $f : M \to \mathbb{R}$, der ikke er et randpunkt. Da findes et kort $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ omkring p, så*

$$f\phi^{-1} = f(p) - {x_1}^2 - \cdots - {x_\lambda}^2 + {x_{\lambda+1}}^2 + \cdots + {x_n}^2,$$

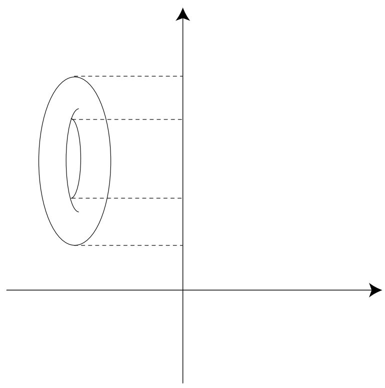
hvor λ er f's indeks i p.

Vi tillader os for det meste at skrive f i stedet for $f\phi^{-1}$. Beviset for lemmaet kan ses i Milnor ([12], s. 6).

Definition 3.6. En funktion, $f : M \to \mathbb{R}$, hvor alle kritiske punkter er ikke-degenererede, kaldes en Morse funktion.

Man ser af lemma 3.5, at de kritiske punkter for en Morse funktion er isolerede fra hinanden. Der kan ikke være mere end et kritisk punkt i omegnen U givet i lemmaet. Hvis M er kompakt, følger det derfor, at en Morse funktion kun kan have endeligt mange kritiske punkter. Ved det i'te typenummer, c_i, for en Morse funktion forstår man antallet af kritiske punkter af indeks i.

Det første interessante for en matematiker er naturligvis, om der findes Morse funktioner. Der findes nogle eksistenssætninger, se f.eks. Kosinski ([8], s. 67) for et bevis af følgende.



FIGUR 3. En højdefunktion på torus.

Sætning 3.7. *Lad M være en n-mangfoldighed med kompakt rand, ∂M, og antag, at $\partial M = V_0 \cup V_1$, hvor V_i'erne er disjunkte og afsluttede delmængder af ∂M. Så findes der en Morse funktion $f : M \to \mathbb{R}$, som opfylder:*
(a) *f har ingen kritiske punkter i en omegn af ∂M;*
(b) *$f^{-1}(i) = V_i$, $i = 0, 1$.*

Eksempel 3.8. *Et mere konkret eksempel på en Morse funktion kan ses på figur 3. Højdefunktionen, der svarer til projektionen ind på z-aksen, er en Morse funktion. Man ser, at der er fire kritiske punkter, som har netop den lokale opførsel, der forudsiges i lemma 3.5.*

Ved at sammenligne f.eks. $f^{-1}[-\infty, -\epsilon]$ og $f^{-1}[-\infty, \epsilon]$ for en Morse funktion kan man danne sig et godt indtryk af, hvordan M er opbygget. Der gælder bl.a. næste vigtige sætning, se Milnor ([12], s. 12). Inden formuleringen minder vi om notationen:

$$M_a^f = f^{-1}[-\infty, a] \text{ og } M_{a,b}^f = f^{-1}[a, b] \text{ for } a < b, a, b \in \mathbb{R},$$

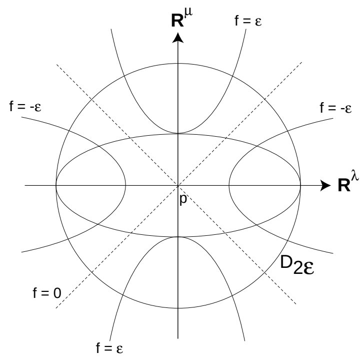
hvor f kan undlades på venstresiderne, hvis der ikke er mulighed for tvivl.

Sætning 3.9. *Antag, at $f : M \to \mathbb{R}$ er en Morse funktion uden kritiske værdier i intervallet $[a, b]$ med $M_{a,b} \cap \partial M = \emptyset$. Så er $M_a \cong M_b$ og M_a er en deformationsretrakt af M_b.*

Tilsvarende findes en sætning, som fortæller, at $M_{a,b} \cong f^{-1}(\{a\}) \times [0, 1]$.

Bemærkning 3.10. Der findes nogle simple operationer, som ikke ændrer på, hvorvidt en funktion er en Morse funktion. Af definitionen ses bl.a., at hvis f er en Morse funktion, og k er en konstantfunktion, så er $f + k$ og kf også Morse funktioner.

Vi kan også ændre funktionsværdierne i omegnen af et enkelt kritisk punkt. Hvis $x \in M$ er et kritisk punkt, da findes omegne, U, V, så $\overline{U} \subset V$, og $\overline{V}$ er kompakt, samtidig med at x er det eneste kritiske punkt i V. Der findes en funktion $\mu : M \to \mathbb{R}$, så $\mu\ |_U = 1$ og $\mu\ |_{M-V} = 0$, da M er et lokalkompakt Hausdorff rum. Vi kan antage, at μ er glat, jf. sætning 9.7. Nu er $f + c\mu$ også en Morse funktion for c passende lille. Uden for V og på U har vi nemlig



FIGUR 4. Beskrivelse af M omkring et kritisk punkt.

ikke ændret på de kritiske punkter. På resten kan vi kontrollere effekten fra μ vha. c, mens f er uden kritiske punkter. Funktionen er kun forskellig fra f på en omegn af punktet x. Den har de samme kritiske punkter. Denne operation kan benyttes, hvis man gerne vil have alle de kritiske punkter for en Morse funktion på en kompakt mangfoldighed til at have forskellige funktionsværdier.

Det næste resultat udnytter forrige sætning til at beskrive koblingen mellem hankelegemer og Morse funktioner.

Sætning 3.11. *Antag, at $f : M \to \mathbb{R}$ er en Morse funktion uden kritiske punkter i $f^{-1}[-\epsilon, \epsilon] = N$ for $\epsilon > 0$ pånær netop et af indeks λ på $f^{-1}(\{0\})$, samt at $N \cap \partial M = \emptyset$. Så er $M^f_\epsilon \cong M^f_{-\epsilon} \cup H^\lambda$.*

Bevis. Lad p være det kritiske punkt af indeks λ, da kan man vælge et kort, U, omkring p, så

$$f = -x_1^2 - \cdots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \cdots + x_n^2.$$

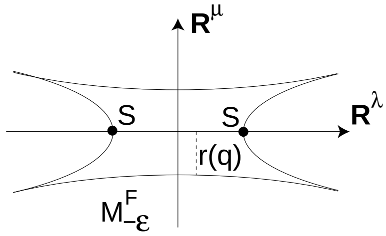
Ifølge antagelserne har f ikke andre kritiske punkter end p i $f^{-1}[-\epsilon, \epsilon]$, derfor er $f^{-1}[-\epsilon, \epsilon] \cong f^{-1}[-\epsilon_1, \epsilon_1]$ for $\epsilon_1; 0 < \epsilon_1 < \epsilon$, jf. sætning 3.9. Vi kan derfor vælge ϵ, så $D_{2\epsilon} \subset U$, hvor $D_{2\epsilon}$ er den afsluttede kugle med radius 2ϵ og centrum p. Hvis vi benytter notationen $x_\lambda = (x_1, \ldots, x_\lambda)$ og $x_\mu = (x_{\lambda+1}, \ldots, x_n)$, dvs. at $x_\lambda^2 = x_1^2 + \cdots + x_\lambda^2$ og $x_\mu^2 = x_{\lambda+1}^2 + \cdots + x_n^2$, så er $f = -x_\lambda^2 + x_\mu^2$. Man bemærker, at x_λ spiller en dobbeltrolle, som ikke burde lede til forvirring. Situationen er skitseret på figur 4: For at studere den nærmere indfører vi en funktion $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, som opfylder

$$\phi(0) > \epsilon, \quad \phi(t) = 0 \text{ for } t \geq 2\epsilon \text{ og } -1 < \phi'(t) \leq 0 \text{ for alle } t.$$

Sådan en funktion findes. Vha. ϕ kan vi definere en funktion $F : M \to \mathbb{R}$ ved

$$x \mapsto \begin{cases} f(x) - \phi(x_\lambda^2 + 2x_\mu^2) & , x \in U \\ f(x) & , x \notin U. \end{cases}$$

Man bemærker, at F og f stemmer overens uden for ellipsen på figur 4. Man ser, at F er glat, da den er glat på den åbne overdækning $U, M - D_{2\epsilon}$. Vi vil gerne vise tre påstande om forholdet mellem F og f.



FIGUR 5. $M^F_{-\epsilon}$.

Påstand 1: Der gælder, at $M^F_\epsilon = M^f_\epsilon$. Påstanden er sand uden for ellipsoiden $x_\lambda^2 + 2x_\mu^2 \leq 2\epsilon$, hvor $f = F$. Inden i ellipsoiden er

$$F \leq f = -x_\lambda^2 + x_\mu^2 \leq \frac{1}{2}x_\lambda^2 + x_\mu^2 \leq \epsilon.$$

Altså er ellipsoiden med i begge mængder.

Påstand 2: Funktionen F har de samme kritiske punkter som f.
Da $\frac{\partial F}{\partial x_\lambda^2} = -1 - \phi'(x_\lambda^2 + 2x_\mu^2) < 0$, og $\frac{\partial F}{\partial x_\mu^2} = 1 - 2\phi'(x_\lambda^2 + 2x_\mu^2) \geq 1$, ser man, af at $dF = \frac{\partial F}{\partial x_\lambda^2}dx_\lambda^2 + \frac{\partial F}{\partial x_\mu^2}dx_\mu^2$, at F kun har kritiske punkter, når dx_λ^2 og dx_μ^2 forsvinder samtidig. Det sker kun i origo, som er lig p, det kritiske punkt for f.

Påstand 3: Der gælder, at $M^F_{-\epsilon} \cong M^F_\epsilon$.
Man observerer, at $F(p) = -\phi(0) < -\epsilon$, dvs. at F ikke har kritiske værdier mellem $-\epsilon$ og ϵ. Sætning 3.9 giver derfor det ønskede.

Vi vil gerne vise endnu en påstand: Skæringen mellem $M^F_{-\epsilon}$ og μ-planen for et givet $x_\lambda = q$ er diffeomorf med en disk med radius $r(q) > 0$. Funktionen $r(q)$ er glat, og $r(q) = (q^2 - \epsilon)^{\frac{1}{2}}$ for $q^2 > 2\epsilon$.

Vi ser på (x_λ, x_μ), hvor $x_\lambda = q$, og $-q^2 + x_\mu^2 - \phi(q^2 + 2x_\mu^2) \leq -\epsilon$. Hvis vi sætter $t = q^2 + 2x_\mu^2$, så er mængden kendetegnet, ved at

$$\frac{t}{2} + \epsilon - \frac{3}{2}q^2 \leq \phi(t).$$

Da $\phi'(t) \leq 0$, er $\phi(t) - \frac{t}{2}$ aftagende, derfor gælder uligheden for $t \leq t_0$, hvis t_0 opfylder $\phi(t_0) = \frac{t_0}{2} + \epsilon - \frac{3}{2}q^2$. Vi ved, at t_0 findes, da $\phi(t) = 0$ for $t \geq 2\epsilon$. Man bemærker, at t_0 er en glat funktion af q ifølge implicit funktionssætningen, da $\phi(t) - \frac{t}{2}$ er glat med $\phi'(t) - \frac{1}{2} < 0$. Da uligheden er sand for $t \leq t_0$, bliver kravet til x_μ, at $x_\mu^2 \leq \frac{1}{2}(t_0 - q^2)$. Pga. grænserne for $\phi'(t)$ gælder det ifølge middelværdisætningen, at $\phi(t) - \phi(0) > -t$. Altså er

$$\frac{t_0}{2} + \epsilon - \frac{3}{2}q^2 = \phi(t_0) > \phi(0) - t_0 > \epsilon - t_0,$$

dvs. at $t_0 > q^2$, hvilket viser, at $r(q) = (\frac{1}{2}(t_0 - q^2)^{\frac{1}{2}})$. Da t_0 er en glat funktion af q, ses det, at $r(q)$ er en glat funktion af q. Derfor følger det af, at $\phi(t) = 0$

for $t > 2\epsilon$, at
$$r(q) = (\frac{1}{2}(-2\epsilon + 3q^2 - q^2))^{\frac{1}{2}} = (q^2 - \epsilon)^{\frac{1}{2}}$$
for $q^2 > 2\epsilon$, da $t_0 > q^2 > 2\epsilon$.

Nu er vi parate til at vise den afsluttende påstand: Delmængden $M^F_{-\epsilon}$ er diffeomorf med $M^f_{-\epsilon} \cup H^\lambda$.

At følgende konstruktion er fornuftig diskuteres i afsnit 6, se definition 6.2. Vi konstruerer $M^f_{-\epsilon} \cup H^\lambda$ som $(M^f_{-\epsilon} - S) \cup_\sim (D^n - S^{\lambda-1})$, hvor S er $(\lambda-1)$-sfæren bestemt ved $x^2_\lambda = \epsilon$ og $x^2_\mu = 0$, med relationen
$$(x_\lambda, x_\mu) \sim h\alpha(x_\lambda, x_\mu),$$
hvor
$$\begin{aligned} h\alpha : \left\{(x_\lambda, x_\mu) \in (D^n - S^{\lambda-1}) \mid x^2_\lambda > \frac{1}{2}\right\} &\to \left\{(x_\lambda, x_\mu) \in (M^f_{-\epsilon} - S) \mid x^2_\lambda < 2\epsilon\right\} \\ (x_\lambda, x_\mu) &\mapsto \sqrt{2\epsilon}\left(x_\lambda, x_\mu \frac{(x_\lambda - \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}}{(1 - x^2_\lambda)^{\frac{1}{2}}}\right). \end{aligned}$$
Lad os definere en afbildning
$$\begin{aligned} \gamma : M^f_{-\epsilon} \cup H^\lambda &\to M^F_{-\epsilon}; \\ (x_\lambda, x_\mu) &\mapsto \begin{cases} \sigma(x_\lambda, x_\mu) = (x_\lambda, x_\mu \frac{r(x_\lambda)}{\sqrt{x^2_\lambda - \epsilon}}) & , \quad x \in M^f_{-\epsilon} - S \\ \tau(x_\lambda, x_\mu) = (\sqrt{2\epsilon} x_\lambda, x_\mu \frac{r(\sqrt{2\epsilon} x_\lambda)}{\sqrt{1 - x^2_\lambda}}), & x \in D^n - S^{\lambda-1}. \end{cases} \end{aligned}$$
Ved at regne efter ser man, at $\sigma h\alpha = \tau$ for $1 > x^2_\lambda > \frac{1}{2}$, dvs. at γ er veldefineret. Man ser, at σ og τ er glatte, da $r(q)$ er glat. Den inverse afbildning er givet ved:
$$\begin{aligned} \gamma^{-1} : M^F_{-\epsilon} &\to M^f_{-\epsilon} \cup H^\lambda \\ (x_\lambda, x_\mu) &\mapsto \begin{cases} (x_\lambda, x_\mu \frac{\sqrt{x^2_\lambda - \epsilon}}{r(x_\lambda)}) & , \quad x^2_\lambda > \epsilon \\ (\frac{x_\lambda}{\sqrt{2\epsilon}}, \frac{x_\mu}{\sqrt{2\epsilon}} \frac{\sqrt{2\epsilon - x^2_\lambda}}{r(x_\lambda)}), & x^2_\lambda < 2\epsilon. \end{cases} \end{aligned}$$
Altså er γ en diffeomorfi på en åben overdækning, dvs. at γ er en diffeomorfi på sit billede ifølge lemma 5.11. Vi mangler et argument for, at γ er surjektiv. Hvis man ser på skæringen mellem $M^f_{-\epsilon} - S$ og en plan med $x_\lambda = q$, så er den en disk med radius $(q^2 - \epsilon)^{\frac{1}{2}}$, men så bliver billedet af denne skæring en disk med radius $r(x_\lambda)$, hvilket viser, at $\sigma(M^f_{-\epsilon} - S) = M^F_{-\epsilon} \cap \{(x_\lambda, x_\mu) \mid x^2_\lambda > \epsilon\}$.

Hvis man ser på skæringen mellem $D^n - S^{\lambda-1}$ og en plan $x_\lambda = q$, så afbildes den over på skæringen mellem $M^F_{-\epsilon}$ og en plan med $x_\lambda = \sqrt{2\epsilon} q$. Derfor ser man, at skæringen bliver en disk med radius $r(x_\lambda \sqrt{2\epsilon})$, hvilket viser at $\tau(D^n - S^{\lambda-1}) = M^F_{-\epsilon} \cap \{(x_\lambda, x_\mu) \mid x^2_\lambda < 2\epsilon\}$. Altså er γ surjektiv. Det afslutter beviset for sætningen. □

Da de kritiske punkter er isolerede, kan sætningen udvides til k kritiske punkter med samme indeks λ. For hvert punkt p_i findes ϕ_{p_i}, og man kan benytte

$F = f - \phi_{p_1} - \cdots - \phi_{p_k}$. Punkterne kan naturligvis have en funktionsværdi, der er forskellig fra 0.

Inden vi går videre med Morse teorien, vil vi anvende sætningen til at opnå et resultat, der beskriver sfæren. Resultatet bliver ganske nyttigt senere.

Sætning 3.12. *Antag, at M er en sammenhængende lukket n-mangfoldighed, samtidig med at $f : M \to \mathbb{R}$ er en Morse funktion med netop to kritiske punkter. Så er M homeomorf med n-sfæren.*

Bevis. Da M er kompakt, må de to kritiske punkter være henholdsvis maksimum og minimum. Vi kan uden tab af generalitet antage, at $f(p) = 0$ og $f(q) = 1$, hvor p er minimum og q er maksimum. Det skyldes, at f's billede er et afsluttet interval, da f er kontinuert, og M er kompakt og sammenhængende. Intervallet kan tilpasses til enhedsintervallet vha. bemærkning 3.10.

Da de kritiske punkter er ikke-degenererede, kan man ifølge lemma 3.5 vælge passende omegne U om p og V om q. For f i U gælder

$$f = {x_1}^2 + \cdots + {x_n}^2,$$

dvs. $M_\epsilon \cong D^n$ for $\epsilon > 0$ passende lille. Der findes nemlig en sammenhængskomponent af M_ϵ i U diffeomorf med en disk, og hvis M_ϵ havde flere sammenhængskomponenter, ville det være i modstrid med antagelsen om netop to kritiske punkter.

Tilsvarende er $M_{1-\epsilon,1} \cong D^n$. Nu følger det imidlertid af sætning 3.9, at $M_\epsilon \cong M_{1-\epsilon}$, da der ikke er kritiske punkter i $M_{\epsilon,1-\epsilon}$. Det gælder derfor, at

$$M = M_{1-\epsilon} \cup M_{1-\epsilon,1} \cong D^n \cup_{S^{n-1}} D^n \cong_{Top} S^n,$$

hvor man skal være opmærksom på, at det ikke er sikkert, at der er tale om andet end en homeomorfi i den sidste ækvivalens. □

Vi har vist, at en Morse funktion på en mangfoldighed giver mangfoldigheden en struktur som en mangfoldighed påsat en hank. Omvendt vil vi gerne kunne udvide en Morse funktion på en mangfoldighed til en på mangfoldigheden påsat hank. Det gør vi i næste sætning. I beviset benytter vi notationen ∂_+ til at angive randkomponenten, som indeholder en påsat hanks rand.

Sætning 3.13. *Lad $M = V \times [-2\epsilon, -\epsilon]$, hvor V er en lukket $(n-1)$-mangfoldighed. Antag, at vi påsætter en λ-hank på $V \times \{-\epsilon\}$. Da findes en Morse funktion på $M \cup H^\lambda$ med netop et kritisk punkt af indeks λ. Morse funktionen kan vælges konstant på de forskellige sammenhængskomponenter af randen.*

Bevis. Vi påsætter en hank H^λ langs en $(\lambda - 1)$-sfære, Σ, via en tubulær omegn, T, for Σ i M. Se på mangfoldigheden $M^f_{-\epsilon}$ fra beviset af sætning 3.11. I denne mangfoldighed er $S = \{x \in M^f_{-\epsilon} \mid {x_\lambda}^2 = -\epsilon\}$ en indlejret $(\lambda - 1)$-sfære med tubulær omegn $T' = \{x \in M^f_{-\epsilon} \mid {x_\lambda}^2 < 2\epsilon\}$. Som Antoni Kosinski ([8], s. 130) anfører, er T og T' diffeomorfe via en diffeomorfi $d : T \to T'$, så $d(x,t) = (x_\lambda, x_\mu)$ og $fd(x,t) = t$, hvor $f = -x_\lambda^2 + x_\mu^2$.

Funktionen $G_0 : M \to \mathbb{R};\ (x,t) \mapsto t$ kan derfor opfattes som

$$G_1 : q \mapsto \begin{cases} t & ,q = (x,t) \in M - T \\ -x_\lambda^2 + x_\mu^2 & ,q = (x_\lambda, x_\mu) \in T'. \end{cases}$$

Det er denne funktion, som vi vil udvide til en påsat hank. I første omgang kan vi antage, at H^λ påsættes via forskriften $h\alpha$ fra beviset for sætning 3.11. I dette tilfælde kan vi udvide f vha. $F : M^F_{-\epsilon} \to \mathbb{R}$ og $\gamma : M^f_{-\epsilon} \cup H^\lambda \to M^F_{-\epsilon}$ igen fra beviset for sætning 3.11. Udvidelsen er

$$G : q \mapsto \begin{cases} t & ,q = (x,t) \in M - T \\ F\gamma(q) & ,q \in D^m - S^{\lambda-1}. \end{cases}$$

Man ser, at G kun har kritiske punkter svarende til $F's$ med indeks λ. Man bemærker, at $G\mid_{\partial_+(M \cup H^\lambda)} = -\epsilon$. Tilbage er der at overveje tilfældet, hvor H^λ påsættes $M^f_{-\epsilon}$ via en anden diffeomorfi mellem tubulære omegne. Forskellen kan beskrives ved en automorfi af $S^{\lambda-1} \times \mathbb{R}^{n-\lambda}$, jf. proposition 5.19. En sådan automorfi kan ifølge bemærkning 5.20 repræsenteres ved $\gamma : S^{\lambda-1} \to O(\mu)$. Altså kommer forskellen an på rotationer i de μ sidste koordinater, og en rotation bevarer afstanden ${x_\mu}^2$. Da F kun afhænger af ${x_\mu}^2$, betyder denne rotation intet for udvidelsen G. Derfor følger udvidelsen for en generel påsættelse af vores specialtilfælde. □

Sætningen kan udvides til at omfatte k λ-hanke, som påsættes en mangfoldighed.

Vi slutter afsnittet med at omtale en speciel type Morse funktioner, som vi senere støder på. Det er de pæne funktioner. Betegnelsen dækker over en Morse funktion, hvor funktionsværdien i et kritisk punkt er lig indekset af punktet. Næste lemma følger af sætning 3.11.

Lemma 3.14. *Lad M være en sammenhængende kompakt n-mangfoldighed. Antag, at $f : M \to [a,b]$ er en surjektiv pæn funktion. Da er*

$$M_\lambda = \chi(M_{\lambda-1}; f_1^\lambda, \ldots, f_{k_\lambda}^\lambda; \lambda)$$

for $\lambda \in \{0, \ldots, n\}$, hvor $M_{-1} = f^{-1}(\{a\}) \times [0,1]$, hvis M er med rand og $M_{-1} = \emptyset$, hvis M er uden rand.

4. Homotopi og Homologi

4.1. **Resultater om homotopi og homologi.** I dette afsnit er samlet de resultater, vi har brug for med hensyn til homologi og homotopi, samt knyttet nogle kommentarer til de enkelte sætninger. Vi vil ikke gå nærmere ind på, hvordan de to begreber defineres, se afsnit 9 for en kort omtale, men nøjes med at udnytte dem som redskaber til at studere mangfoldigheder med. Resultaterne stammer hovedsageligt fra Hatcher ([5]). I dette afsnit benytter vi konventionen, at rum er topologiske, og at afbildninger er kontinuerte.

Det første vi ser på er nogle resultater om homotopi. En virkelig brugbar sætning til beregning af fundamentalgrupper er Seifert-Van Kampens sætning. Vi skal kun bruge følgende reducerede udgave.

Sætning 4.1. *Antag, at X er en forening af to åbne kurvesammenhængende delmængder A_1 og A_2, der begge indeholder basispunktet x_0. Hvis $A_1 \cap A_2$ er enkeltsammenhængende, så gælder det at*

$$\pi_1(X) \simeq \pi_1(A_1) \star \pi_1(A_2),$$

hvor $\star$ symboliserer det frie produkt.

En vigtig sætning af Henry Whitehead er:

Sætning 4.2. *Hvis en afbildning $f : X \to Y$ mellem sammenhængende CW-komplekser inducerer isomorfier $f_\star : \pi_n(X) \to \pi_n(Y)$ for alle n, så er f en homotopiækvivalens. Hvis f tilmed er inklusionen af et delkompleks X i Y, så er X en deformationsretrakt af Y.*

Beviset, som vi udelader, bygger på et lemma, som er nævneværdigt i sig selv.

Lemma 4.3. *Lad (X, A) være et CW-par og lad (Y, B) være et par med $B \neq \emptyset$. Antag, at $\pi_n(Y, B, y_0) = 0$ for alle $y_0 \in B$ for n, når $X - A$ har celler af dimension n. Så er enhver $f : (X, A) \to (Y, B)$ homotop rel A med en afbildning $X \to B$.*

Sidste udsagn i sætningen ses at følge umiddelbart af lemmaet. Hvis inklusionen er en isomorfi på homotopigrupperne, får man af en lang eksakt følge for parret (X, A), at $\pi_n(X, A) = 0$ for alle n. Derfor giver lemmaet anvendt på identiteten, at $id : X \to X$ er homotop rel A med en afbildning $r : X \to A$. Altså er A en deformationsretrakt af X.

Sætning 4.4. ***(Hurewicz)*** *Hvis X er $(n-1)$-sammenhængende, $n \geq 2$, så er $\tilde{H}_i(X) = 0$ for alle $i < n$ og $\pi_n(X) = H_n(X)$. Hvis et par (X, A) er $(n-1)$-sammenhængende, $n \geq 2$ med $A \neq \emptyset$ enkeltsammenhængende, så er $H_i(X, A) = 0$ for alle $i < n$ og $\pi_n(X, A) = H_n(X, A)$.*

Via Hurewicz' sætning kan man få et nyttigt korollar:

Korollar 4.5. *En afbildning $f : X \to Y$ mellem enkeltsammenhængende CW-komplekser er en homotopiækvivalens, hvis $f_\star : H_n(X) \to H_n(Y)$ er en isomorfi for alle n. Hvis $f : X \to Y$ er inklusionsafbildningen, bliver X endda en deformationsretrakt af Y.*

En væsentlig ingrediens i Den generaliserede Poincaré formodning er begrebet en homotopisfære.

Definition 4.6. En lukket sammenhængende n-mangfoldighed kaldes for en n-homotopisfære, hvis den har samme homotopi som S^n, dvs. hvis der findes en homotopiækvivalens $f : M \to S^n$.

Vi kan nu argumentere for ækvivalensen mellem de to formuleringer af Poincaré formodningen, som tidligere er blevet nævnt. De to formuleringer er:

Poincaré formodningen 4.7. *Lad M være en lukket enkeltsammenhængende kombinatorisk n-mangfoldighed med samme homologi som S^n. Da vil M være homeomorf med S^n.*

Poincaré formodningen 4.8. *Lad M være en kombinatorisk n-homotopisfære. Da vil M være homeomorf med S^n.*

Antag, at formodning 4.7 er sand, og at M er en mangfoldighed omtalt i formodning 4.8. Altså findes der en homotopiækvivalens $f : M \to S^n$. En homotopiækvivalens inducerer en isomorfi mellem homologigrupperne. Da en homotopisfære er enkeltsammenhængende, giver formodning 4.7, at M er homeomorf med S^n.

Antag omvendt, at formodning 4.8 er sand, og at M er en mangfoldighed omtalt i formodning 4.7. Så følger det, at alle homotopigrupperne op til $\pi_n(M)$ er trivielle, fordi sætning 4.4 giver, at den første ikke-trivielle homotopigruppe er isomorf med den første ikke-trivielle reducerede homologigruppe. Altså er $\pi_n(M) \cong \mathbb{Z}$, dvs. at der findes en afbildning $f : S^n \to M$, så $[f]$ frembringer $\pi_n(M)$.

For denne afbildning har vi følgende diagram

$$\begin{tikzcd} \pi_n(S^n) \arrow[r, "f_\star", "\sim"'] \arrow[d, "\sim"'] & \pi_n(M) \arrow[d, "\sim"] \\ H_n(S^n) \arrow[r, "f_\star"] & H_n(M). \end{tikzcd}$$

De to sider i diagrammet er isomorfier ifølge sætning 4.4. At toppen også er en isomorfi skyldes, at $\pi_n(S^n)$ er frembragt af $[id]$, mens $\pi_n(M)$ er frembragt af $[f]$, samtidig med at $f_\star[id] = [f]$. Altså er bunden også en isomorfi. Da $f_\star : H_0(S^n) \to H_0(M)$ ligeledes er en isomorfi, gælder der, at $f_\star : H_\star(S^n) \to H_\star(M)$ er isomorfi for alle n. Hvis man husker på, at kombinatoriske mangfoldigheder, specielt er CW-komplekser, jf. afsnit 9, følger det af korollar 4.5, at f er en homotopiækvivalens. Nu giver formodning 4.8 det ønskede. Lad os formulere det viste i en bemærkning.

Bemærkning 4.9. Der gælder, at en kombinatorisk mangfoldighed, M, er en homotopisfære, hvis og kun hvis den er enkeltsammenhængende, og den har samme homologi som sfæren.

Vi har også brug for nogle resultater om homologi, som vi nævner i det følgende. Et nyttigt redskab til beregning af homologigrupper er den lange eksakte følge for et par (X, A).

Sætning 4.10. *Givet et delrum $A \subset X$ er følgende følge eksakt:*

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_\star} H_n(X) \longrightarrow H_n(X,A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \longrightarrow$$

$$\cdots \longrightarrow H_0(X,A) \longrightarrow 0.$$

Et andet nyttigt redskab til beregning af homologigrupper er Mayer-Vietoris følgen.

Sætning 4.11. *Hvis X kan skrives som foreningen af det indre af to delrum A og B, så er der en eksakt følge af homologigrupper af formen:*

$$\cdots \longrightarrow H_n(A \cap B) \xrightarrow{\phi} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\psi} H_n(X) \xrightarrow{\partial}$$

$$H_{n-1}(A \cap B) \longrightarrow \cdots \longrightarrow H_0(X) \longrightarrow 0.$$

Et tredje værktøj til at bestemme homologi med er excision.

Sætning 4.12. *Givet delrum $Z \subset A \subset X$, sådan at afslutningen af Z er indeholdt i det indre af A, så inducerer inklusionen $(X-Z, A-Z) \to (X,A)$ isomorfier $H_n(X-Z, A-Z) \to H_n(X,A)$ for alle n.*

Vi har også brug for to resultater vedrørende sammenhængen mellem homologi og kohomologi. Den første kaldes for Poincaré dualitet.

Sætning 4.13. *Antag, at M er en lukket orienterbar n-mangfoldighed med fundamentalklasse $[M] \in H_n(M)$, så er afbildningen*

$$\begin{aligned} D : H^k(M) &\to H_{n-k}(M) \\ \alpha &\mapsto [M] \cap \alpha \end{aligned}$$

en isomorfi for alle k.

Der findes også en udgave af Poincaré dualitet til tilfældet, hvor mangfoldigheden har en rand.

Sætning 4.14. *Antag, at M er en kompakt orienterbar n-mangfoldighed med rand $\partial M = A \cup B$, så $\partial A = \partial B = A \cap B$. Så giver cap-produktet med fundamentalklassen $[M] \in H_n(M, \partial M)$ isomorfier*

$$\begin{aligned} D : H^k(M,A) &\to H_{n-k}(M,B) \\ \alpha &\mapsto [M] \cap \alpha \end{aligned}$$

for alle k.

Den næste sætning er kendt som Alexander dualitet.

Sætning 4.15. *Hvis K er en kompakt, ikke-tom ægte delmangfoldighed af S^n, så er $\tilde{H}_i(S^n - K) \cong \tilde{H}^{n-i-1}(K)$ for alle i.*

Bemærkning 4.16. I beviset for sætningen udnytter man kun sit kendskab til S^n's homologi. Da homologien er den samme for enhver homotopisfære, jf. bemærkning 4.9, gælder udsagnet for en vilkårlig homotopisfære.

Ovenstående tilhører de grundlæggende resultater om homologi. Noget mere specifikt, som vi har brug for senere, er følgende lemma.

Lemma 4.17. *Lad M være en kombinatorisk n-homotopisfære. Så er $M-D$ kontraktibel, hvor D er en indlejret disk.*

Bevis. Da D opfylder kravene i sætning 4.15, følger det af bemærkning 4.16, at

$$\tilde{H}_i(M-D) \cong \tilde{H}^{n-i-1}(D) \cong 0.$$

Derfor bliver inklusionen af et punkt i $M-D$ til en isomorfi på homologigrupperne, dvs. at korollar 4.5 giver, at $M-D$ er kontraktibel. □

4.2. **Euler karakteristik.** Man kan definere Euler karakteristikken på flere måder. Her har vi valgt en homologisk tilgang til invarianten, hvilket betyder, at vi tager udgangspunkt i følgende.

Definition 4.18. For et CW-kompleks med endeligt mange ikke-trivielle homologigrupper, der alle har endelig rang definerer man Euler karakteristikken ved

$$\chi(X) = \sum (-1)^n \text{rang } H_n(X).$$

Hvis $A \subset X$, definerer man den relative Euler karakteristik ved

$$\chi(X, A) = \sum (-1)^n \text{rang } H_n(X, A).$$

Bemærkning 4.19. Man kan vise, at $\chi(X) = \sum(-1)^i \dim H_i(X;\Lambda)$ for et legeme Λ, hvis $H_\star$ er endeligt frembragt, jf. Bredon ([1], s. 285).

Man bemærker den dobbelte brug af notationen χ til både at notere en realisation af et hankelegeme og som tegn for Euler karakteristikken. Betydningen af symbolet fremgår fremover af konteksten. Som et eksempel på Euler karakteristikken bemærker vi, at der gælder

$$\chi(S^n) = 0, n \text{ ulige og } \chi(S^n) = 2, n \text{ lige},$$

hvor vi kunne erstatte S^n med en n-homotopisfære. Vi skal bruge følgende sætning om forbindelsen mellem Euler karakteristikken og typenumrene for en Morse funktion.

Sætning 4.20. *Antag, at $f : M \to [a, b]$ er en pæn funktion på en kompakt mangfoldighed af typen $(c_0, \dots, c_n)$ med $V_1 = f^{-1}(\{a\})$. Lad F være et legeme og β_k være dimensionen af $H_k(M, V_1; F)$. Så er*

$$\sum(-1)^i c_i = \sum(-1)^k \beta_k = \chi(M, f^{-1}(\{a\})).$$

Bevis. Vi har, at $M_s = \chi(M_{s-1}; f_1^s, \dots, f_{k_s}^s; s)$, $s \in \{0, \dots, n\}$, jf. lemma 3.14. Lad os definere

$$\alpha(i, s) = \dim H_i(M_s, M_{s-1}; \mathbb{Q}).$$

Vha. af excision får vi

$$H_i(M_s, M_{s-1}; \mathbb{Q}) \cong H_i(\cup D_{j_s}^s, \cup \partial D_{j_s}^s; \mathbb{Q}),$$

jf. lemma 6.11. Altså er

$$\alpha(i, s) = \begin{cases} c_s & , s = i \\ 0 & , s \neq i. \end{cases}$$

Definer også $\beta(i,s) = \dim H_i(M_s, V_1; \mathbb{Q})$. Man bemærker, at $\beta(i,s) = 0$ for $i > s$, da M_s opnås fra V_1 ved at tilføje celler af dimension mindre end eller lig s. Derfor får man for hvert s en lang eksakt følge

$$\begin{array}{lcl} 0 \to H_n(M_{s-1}, V_1; \mathbb{Q}) \to & H_n(M_s, V_1; \mathbb{Q}) & \to H_n(M_s, M_{s-1}; \mathbb{Q}) \to \\ \to H_{n-1}(M_{s-1}, V_1; \mathbb{Q}) \to & \dots & \to H_0(M_s, M_{s-1}; \mathbb{Q}) \to 0. \end{array}$$

Da der er tale om vektorrum, får man, at

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\beta(i, s-1) - \beta(i,s) + \alpha(i,s)) = 0,$$

dvs.

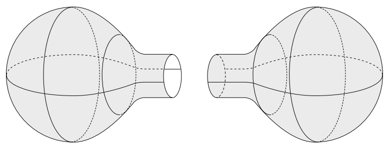
$$\begin{aligned} \sum (-1)^i c_i &= \sum_i (-1)^i \sum_s \alpha(i,s) = \sum (-1)^i (\beta(i,n) - \beta(i,0)) \\ &= \sum (-1)^i \beta_i = \chi(M, V_1). \end{aligned}$$

□

Korollar 4.21. *Antag, at f er en funktion som i sætning 4.20. Hvis $V_1 = \emptyset$, så er*

$$\chi(M) = \sum (-1)^k \beta_k = \sum (-1)^q c_q.$$

Bevis. Da $H_i(M, \emptyset) = H_i(M)$, følger korollaret af, at $\chi(M) = \chi(M, \emptyset)$. □



FIGUR 6. Den sammenhængende sum af to sfærer opnås ved, at de to mundstykker klæbes sammen.

5. Sammensætning af mangfoldigheder

5.1. **Sammenhængende sum.** Der findes en grundlæggende metode, når man vil klistre to mangfoldigheder sammen. Den kaldes sammenhængende sum, og den noteres $M_1 \sharp M_2$, hvor M_1 og M_2 er sammenhængende n-mangfoldigheder. Den definition, som vi vil benytte, er ikke den simpleste, men er valgt, fordi den giver bedre mulighed for præcise argumenter. Derfor ser vi på et eksempel inden selve definitionen.

Eksempel 5.1. *Lad S_1^n og S_2^n være to n-sfære. Antag, at vi har to indlejringer*

$$f_1 : \mathbb{R}^n \to S_1^n \text{ og } f_2 : \mathbb{R}^n \to S_2^n,$$

hvor f_1 bevarer orienteringen, mens f_2 ændrer den. Se på den disjunkte forening

$$M = (S_1^n - f_1(D^n_{\frac{1}{3}})) \cup (S_2^n - f_2(D^n_{\frac{1}{3}})),$$

hvor $D^n_{\frac{1}{3}} \subset \mathbb{R}^n$ er n-disken med rand S^{n-1} med radius $\frac{1}{3}$. Kvotientrummet af M, som fås ved identifikationen af $f_1(tx)$ med $f_2((1-t)x)$ for $\frac{1}{3} < t < \frac{2}{3}$, $x \in S^{n-1}$, kalder vi for den sammenhængende sum af S_1^n og S_2^n. Det skrives $S_1^n \sharp S_2^n$. Figur 6 illustrerer konstruktionen. Det er væsentligt, at identifikationen sker som anført, ellers bliver kvotientrummet ikke nødvendigvis Hausdorff, hvilket er et krav, hvis vi gerne vil opnå en ny mangfoldighed.

Bemærkning 5.2. Summen i eksemplet baserer sig på følgende generelle udsagn, som er taget fra Bröcker og Jänich ([2], s. 103). Lad X og Y være mangfoldigheder med åbne delmangfoldigheder X_0 og Y_0. Hvis $\beta : X_0 \to Y_0$ er en diffeomorfi, så det topologiske rum $X \cup_\beta Y$ er Hausdorff, da bliver $X \cup_\beta Y$ en mangfoldighed.

Nu er vi bedre rustede til den generelle definition. Det kan være en hjælp, hvis man hele tiden holder sig for øje, at definitionen handler om at lime to mangfoldigheder sammen langs en delmængde.

Definition 5.3. Lad M_1, M_2 være to sammenhængende n-mangfoldigheder og lad $h_i : \mathbb{R}^n \to M_i$, $i = 1, 2$ være to indlejringer. Lad $\alpha : (0, \infty) \to (0, \infty)$ være en orienteringsændrende diffeomorfi, og definer

$$\alpha_n : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}^n - \{0\}\, ;\ v \mapsto \alpha(\|v\|)\frac{v}{\|v\|}.$$

Så definerer man den sammenhængende sum, $M_1 \sharp M_2(h_1, h_2, \alpha)$, som kvotientrummet af $M_1 - \{h_1(0)\}$ og $M_2 - \{h_2(0)\}$, hvor $h_1(v)$ identificeres med $h_2(\alpha_n(v))$ for alle $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$.

Den sammenhængende sum kan også skrives

$$M_1\sharp M_2(h_1,h_2,\alpha) = (M_1 - \{h_1(0)\}) \cup_g (M_2 - \{h_2(0)\}), \quad g = h_2\alpha_n h_1^{-1}.$$

Hvis både M_1 og M_2 er orienterede, vil vi også gerne kunne orientere den sammenhængende sum. Derfor kræver vi i det tilfælde, at h_1 bevarer orienteringen, mens h_2 ændrer den. Som vi skal se, giver den næste sætning os, at vi i stedet for $M_1\sharp M_2(h_1,h_2,\alpha)$ kan nøjes med at skrive $M_1\sharp M_2$.

Sætning 5.4. *Der gælder, at $M_1\sharp M_2$ er en glat sammenhængende n-mangfoldighed for $n > 1$, samt at den er orienterbar, hvis både M_1 og M_2 er det. Summen afhænger ikke - op til diffeomorfi - af h_1, h_2 og α.*

Bemærkning 5.5. Vi vil undlade beviset for sætningen og nøjes med at uddrage følgende detalje. For at vise konstruktionens uafhængighed af h_1 og h_2 vælger man t_1, t_2, så $0 < t_1 < t_2 < 1$. Hvis man benytter notationen

$$\mathbb{R}^n(t_0,t_1) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid t_0 < \|v\| < t_1\},$$

så er $\alpha_n(\mathbb{R}^n(t_0,t_1)) = \mathbb{R}^n(\alpha(t_1),\alpha(t_0))$. Man bemærker, at kvotientrummet

$$(M_1 - h_1(D^n_{t_0})) \cup_{g'} (M_2 - h_2(D^n_{\alpha(t_1)})),$$

hvor $g' = h_2\alpha_n h_1^{-1}\mid_{h_1(\mathbb{R}^n(t_0,t_1))}$, giver os en mangfoldighed, som er diffeomorf med $M_1\sharp M_2$.

Eksempel 5.6. *I eksempel 5.1 klistrer vi to mangfoldigheder sammen langs $\mathbb{R}(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ og $\mathbb{R}(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ via $\alpha_n(v) = (1-\|v\|)\frac{v}{\|v\|}$. Dette er i overensstemmelse med definition 5.3, da $\alpha : [\frac{1}{3},\frac{2}{3}] \to [\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$; $v \mapsto 1-v$ kan udvides til en orienteringsændrende diffeomorfi på hele $(0,\infty)$.*

I det følgende skal vi vise nedenstående:

Sætning 5.7. *Mængden af diffeomorfiklasser af n-homotopisfærer udgør en abelsk gruppe med kompositionen sammenhængende sum, $n \geq 5$.*

Gruppen i sætningen betegnes A^n. Vi har ikke brug for sætningens fulde indhold, kun eksistensen af inverst element. Vi vælger alligevel at vise hele sætningen, da det ekstra arbejde ikke er så stort, mens det giver os en koncis måde at udtrykke vores viden om sammenhængende sum på. Samtidig er resultatet interessant i sig selv. For at vise sætningen må vi først undersøge, om kompositionen er fornuftig. Altså mangler vi at vise, at den er stabil.

Proposition 5.8. *Den sammenhængende sum $M_1\sharp M_2$ er en n-homotopisfære, hvis og kun hvis både M_1 og M_2 er det for $n \geq 3$.*

Bevis. Lad os først bevise *hvis*. Antag, at M_i er en homotopisfære. Hvis man benytter notationen $A_i = M_i - \{h_i(0)\}$, følger det af sætning 4.1, at $\pi_1(M_1\sharp M_2) \simeq \pi_1(A_1) \star \pi_1(A_2)$. Derfor er $M_1\sharp M_2$ enkeltsammenhængende, da $M_1\sharp M_2 = A_1 \cup A_2$, og $A_1 \cap A_2 = \mathbb{R}^n - \{0\}$ er enkeltsammenhængende, samtidig med at A_i er kontraktibel ifølge lemma 4.17. Se på Mayer-Vietoris følgen for (A_1, A_2):

$$\cdots \longrightarrow H_n(A_1 \cap A_2) \xrightarrow{\phi} H_n(A_1) \oplus H_n(A_2) \xrightarrow{\psi} H_n(M_1\sharp M_2) \xrightarrow{\partial} \cdots$$

Den viser, at $M_1\sharp M_2$ har samme homologi som S^n. Igen benyttes det, at A_i er kontraktibel. Altså giver bemærkning 4.9, at $M_1\sharp M_2$ er en homotopisfære.

Hvis vi omvendt skal bevise *kun hvis*, så følger det som ovenfor af Seifert-Van Kampens sætning, at A_i'erne er enkeltsammenhængende. Derfor er også M_i enkeltsammenhængende, da den er foreningen af A_i og en disk. Der er to interessante dele af Mayer-Vietoris følgen. Den første fortæller, at $H_0(A_i) = \mathbb{Z}$. Den anden ser således ud:

$$0 \longrightarrow H_n(A_1) \oplus H_n(A_2) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0, \;\; n > 0.$$

En surjektiv homomorfi fra $\mathbb{Z}$ til $\mathbb{Z}$ er automatisk en isomorfi. Derfor er $H_n(A_i) = 0$ for $i = 1, 2$, dvs. at A_i'erne er acykliske. Da M_i kan skrives som forening af to acykliske delmængder, har den samme homologi som sfæren, se evt. Mayer-Vietoris følgen i *hvis*-delen. Altså giver bemærkning 4.9 som ovenfor, at M_i er en homotopisfære, $i = 1, 2$. □

Vi har altså en fornuftig komposition af homotopisfærer. Indholdet af næste proposition er, at denne komposition er associativ og kommutativ.

Proposition 5.9. *Lad M_1, M_2 være sammenhængende orienterede n-mangfoldigheder uden rand. Da gælder det, at*

$$\begin{aligned} &a) \qquad M_1 \sharp M_2 \cong M_2 \sharp M_1; \\ &b) \quad (M_1 \sharp M_2) \sharp M_3 \cong M_1 \sharp (M_2 \sharp M_3). \end{aligned}$$

Bevis. a) Hvis vi benytter h_1, h_2 til at danne $M_1 \sharp M_2$ og betegner refleksionen i førstekoordinaten med $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, så er $h_1 h$ orienteringsændrende og $h_2 h$ orienteringsbevarende. Derfor kan vi danne $M_2 \sharp M_1$ via $h_i h$, $i = 1, 2$. I denne situation er $M_2 \sharp M_1 = M_2 - \{h_2(0)\} \cup_\sim M_1 - \{h_1(0)\}$, hvor man klistrer via $x_1 \sim h_1 h \alpha_n h^{-1} h_2^{-1}(x_2) = h_1 \alpha_n h_2^{-1}(x_2)$. Da $h(0) = 0$, opnår vi, at identiteten er en diffeomorfi fra $M_2 \sharp M_1$ til $M_1 \sharp M_2$.

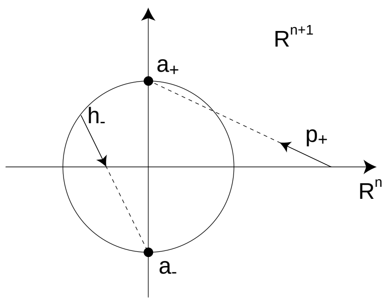
b) Da summen $(M_1 \sharp M_2) \sharp M_3$ ifølge sætning 5.4 er uafhængig af indlejringerne, kan vi vælge at benytte h_1, h_2 til at danne $M_1 \sharp M_2$, og vi kan vælge $h_2' : \mathbb{R}^n \to (M_2 - h_2(\mathbb{R}^n))$, h_3' til at danne $(M_1 \sharp M_2) \sharp M_3$. Med dette valg af indlejringer kan man også konstruere $M_1 \sharp (M_2 \sharp M_3)$, derfor gælder det, at identiteten er en diffeomorfi mellem de to summer. □

Vi vil gerne vise, at S^n er neutralt element for den omtalte komposition. Som så ofte, når man studerer mangfoldigheder, følger det generelle, ved at man i første omgang kigger på tilfældet $\mathbb{R}^n$. Det gælder også her.

Lemma 5.10. *Der findes en diffeomorfi $\mathbb{R}^n \sharp S^n \to \mathbb{R}^n$, som er identiteten uden for en kompakt delmængde.*

Bevis. Se på den stereografiske projektion. Indfør følgende notation for de to poler $a_\pm = (0, \ldots, 0, \pm 1) \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, og lad $p_\pm : \mathbb{R}^n \to S^n - \{a_\pm\}$ være de inverse til projektionerne $h_\pm : S^n - \{a_\pm\} \to \mathbb{R}^n$. Der gælder, at $p_\pm$ er diffeomorfier, samt at p_- vender orienteringen, hvor S^n har orientering arvet fra D^{n+1} med indadvendt normalvektor på S^n.

Benyt $h_1 = id : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $h_2 = p_-$ og $\alpha = \frac{1}{t}$ til at danne $\mathbb{R}^n \sharp S^n$. Se på følgende diagram:



FIGUR 7. Den stereografiske projektion.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \supset & \mathbb{R}^n - \{0\} & S^n - a_+ \\ & \mathbb{R}^n - \{0\} \arrow[u, "id"] \arrow[r, "\alpha_n"'] & \mathbb{R}^n - \{0\}\,. \arrow[u, "p_-"] \end{tikzcd}$$

Vi har altså $(\mathbb{R}^n - \{0\}) \cup_\sim (S^n - \{a_+\})$ og kan definere

$$\beta : \mathbb{R}^n \sharp S^n \to \mathbb{R}^n;\ x \mapsto \begin{cases} x & , x \in \mathbb{R}^n - \{0\} \\ p_+^{-1}(x) & , x \in S^n - \{a_+\}\,. \end{cases}$$

Definitionen har mening, da $p_+^{-1} p_- \alpha_n = id$. Derfor er der tale om en diffeomorfi ifølge lemma 5.11, da p_+^{-1} er en diffeomorfi, samtidig med at β ses at være en homeomorfi. Man ser, at diffeomorfien svarer til identiteten for $x \neq a_- \in S^n - a_+$, hvilket viser den sidste kommentar i lemmaet. □

Lemma 5.11. *Antag, at $f : M \to N$ er en homeomorfi, (U_i) en åben overdækning af M og $f_i = f\,|_{U_i}$ en diffeomorfi $U_i \to f(U_i)$. Så er f en diffeomorfi.*

Bevis. Da M er en mangfoldighed, gælder det, at f er glat, når de respektive restriktioner til en åben overdækning er det. Altså er f glat. Da f er en homeomorfi, er $(f_i(U_i))$ en åben overdækning af N. Derfor giver en gentagelse af argumentet, at f^{-1} også er glat. □

Nu kan vi vise.

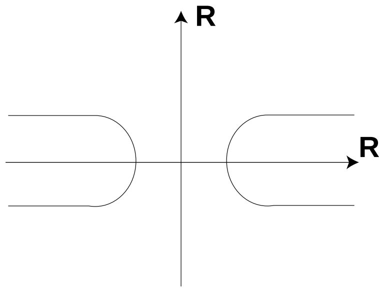
Proposition 5.12. *Der gælder, at $M \sharp S^n \cong S^n \sharp M \cong M$, hvor M er en sammenhængende orienteret n-mangfoldighed uden rand.*

Bevis. Vi behøver kun at vise, at $M \sharp S^n \cong M$, da kompositionen er kommutativ. Summen $M \sharp S^n$ foregår via $h_1 : \mathbb{R}^n \to M$. Vi kan derfor definere

$$\gamma : M \sharp S^n \to M;\ x \mapsto \begin{cases} \beta(x) & , x \in \mathbb{R}^n \sharp S^n \\ x & , x \in M - h_1(0), \end{cases}$$

hvor β er diffeomorfien fra lemma 5.12. Da β er identiteten væk fra et punkt, følger det, at γ er en diffeomorfi. □

Tilbage er der at vise eksistensen af inverse elementer. Det indebærer notationen $-M$, hvor M er en orienteret mangfoldighed. Det antyder, at vi



FIGUR 8. Indlejring af $\mathbb{R}^1\sharp\mathbb{R}^1$.

tænker på den samme mangfoldighed, men at den er orienteret modsat. Vi skal benytte følgende observation.

Proposition 5.13. *Der findes en indlejring af* $\mathbb{R}^n_1\sharp(-\mathbb{R}^n_2)$ *i* $\mathbb{R}^n\times[-1,1]$*, hvor* $h_1(\mathbb{R}^n-\{0\})=h_2(\mathbb{R}^n-\{0\})$ *indlejres som en cylinder omkring* $\{0\}\times[-1,1]$*, mens resten af* $\mathbb{R}^n_i$ *indlejres via* $h(x)=(x,(-1)^i)$*.*

Bevis. I det 1-dimensionelle tilfælde indlejrer vi $\mathbb{R}^1_1\sharp(-\mathbb{R}^1_2)$ som hyperblen $3x^2-y^2=1$. Denne hyperbel kan vi justere vha.

$$(x,y)\mapsto(x,\frac{y}{g(x)});g(x)=\begin{cases}\sqrt{3x^2-1} & ,\ x^2\geq 1\\ \sqrt{2} & ,\ x^2\leq 1.\end{cases}$$

Det giver os den ønskede indlejring af $\mathbb{R}^1\sharp(-\mathbb{R}^1)$, se figur 8. En rotation omkring y-aksen i $\mathbb{R}^3$ giver det ønskede for $n=2$. Det svarer til, at man ser på mangfoldigheden $3(x^2+z^2)-y^2=1$ med en tilsvarende justering. Hvis man ser på delmangfoldigheden bestemt ved $3\|x\|^2-y^2=1\subset\mathbb{R}^{n+1}$ og foretager den tilsvarende justering, så opnår man den ønskede indlejring for $n>2$. $\square$

Bemærk, at hvis man ser på den del af komplementærmængden til $\mathbb{R}^n\sharp(-\mathbb{R}^n)$, W, som ligger uden for cylinderen, så har den $\mathbb{R}^n-D^n$ som deformationsretrakt via projektion. Vi kan generalisere proposition 5.13 til andre mangfoldigheder.

Proposition 5.14. *Lad* M *være en orienteret sammenhængende* n*-mangfoldighed. Så kan man indlejrer* $M\sharp(-M)$ *i* $M\times[-1,1]$*, hvor man indlejrer* $h_1(\mathbb{R}^n-\{0\})=h_2(\mathbb{R}^n-\{0\})$ *som en cylinder omkring* $h_i(\{0\})\times[-1,1]$ *og resten af* $\pm M$ *via* $x\mapsto(x,\mp 1)$*.*

Bevis. Man kan indlejre $M-h_1(\mathbb{R}^n)$ i $M\times\{-1\}$ via inklusion og tilsvarende $(-M)-h_2(\mathbb{R}^n)$ i $M\times\{1\}$. Resten af $M\sharp(-M)$, $h_1(\mathbb{R}^n-\{0\})=h_2(\mathbb{R}^n-\{0\})$, kan så indlejres som i proposition 5.13. $\square$

Da en homotopisfære specielt er en sammenhængende orienterbar lukket mangfoldighed, kan vi benytte proposition 5.9, proposition 5.12 og proposition 5.14. Den sidste proposition har følgende korollar.

Korollar 5.15. *Hvis* M *er en homotopisfære, så findes en kontraktibel mangfoldighed* W *med* $\partial W=M\sharp(-M)$*.*

Bevis. Som det blev bemærket før, afgrænser $\mathbb{R}^n \sharp \mathbb{R}^n$ en mangfoldighed med deformationsretrakt $\mathbb{R}^n - D^n$. Tilsvarende følger det, at $M\sharp(-M)$ afgrænser W_M med deformationsretrakt $M - D^n$. Da M er en homotopisfære, gælder det imidlertid, som det vises i lemma 4.17, at $M - D^n$ er kontraktibel. Altså er W_M selv kontraktibel. □

Konklusion: Hvis M er en n-homotopisfære, $n \geq 5$, følger det af lemma 5.25, at $M\sharp(-M)$ og S^n er h-kobordente, da $M\sharp(-M)$ er enkeltsammenhængende ifølge proposition 5.8. Man bemærker, at der er tale om en kompakt h-kobordisme, se evt. afsnit 5.3. Derfor giver sætning 7.1, at de er diffeomorfe. Nu har vi vist, at alle kravene til en abelsk gruppe er opfyldte. Altså er beviset for sætning 5.7 færdigt.

5.2. **Sum langs randen.** Vi har brug for to andre former for sammenhængende sum. Den første beskriver situationen, hvor de to punkter, vi vælger, ligger på randene af mangfoldighederne. Man observerer, at den sammenhængende sum foregår ved, at man fjerner et punkt fra hver mangfoldighed, og klistrer dem sammen ved at identificere, hvad der svarer til tubulære omegne omkring punkterne. En tilsvarende fremfærd kan lade sig gøre, hvis punkterne ligger på randene.

Definition 5.16. Lad M_1, M_2 være to sammenhængende n-mangfoldigheder med sammenhængende rande og lad $h_i : \mathbb{R}^{n-1} \to \partial M$ være indlejringer, $i = 1, 2$. Lad $\overline{h}_i : \mathbb{R}^n_+ \to M_i$ være indlejringer, $i = 1, 2$, som udvider h_i, hvor $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$. Hvis M_1 og M_2 er orienterede, kræver vi, at h_1 bevarer orienteringen, og at h_2 ændrer den. Den sammenhængende randsum, $M_1 \sharp_b M_2$, er kvotientrummet af

$$(M_1 - h_1(\{0\})) \cup (M_2 - h_2(\{0\}))$$

ved identifikationen af $\overline{h}_1(v)$ med $\overline{h}_2 \alpha_n(v)$ for alle $v \in \mathbb{R}^n_+ - \{0\}$, hvor α_n er som i definition 5.3.

Som notationen $M_1 \sharp_b M_2$ antyder, findes en sætning svarende til sætning 5.4, der viser, at konstruktionen er uafhængig af $h_i, \overline{h}_i$ og α, $i = 1, 2$.

Et enkelt resultat om sammenhængende randsum, som vi senere skal bruge, er følgende. Beviset minder om beviset for proposition 5.12.

Proposition 5.17. *Der gælder, at $M \sharp_b D^n \cong M$ for $n \geq 2$, hvor M er en sammenhængende orienterbar n-mangfoldighed med sammenhængende rand.*

Den sammenhængende randsum kan generaliseres til følgende definition af den sammenhængende sum langs en delmangfoldighed af randen.

Definition 5.18. Antag, at vi har givet to $n+k+1$-dimensionelle mangfoldigheder M_1, M_2 og et k-dimensionelt vektorbundt (E, π, N) med totalrum E over en n-dimensionel lukket mangfoldighed N. Antag, at vi har indlejringer $h_i : E \to \partial M_i$, $i = 1, 2$ og udvidelser $\overline{h}_i$ af h_i, hvor $\overline{h}_i$'s billede er en tubulær omegn af $h_i(N)$. Det svarer til, at $\overline{h}_i$ indlejrer halvdelen af et $(k+1)$-dimensionelt vektorbundt i M_i. Betegn denne halvdel af totalrummet med E'. Kvotientrummet af $(M_1 - h_1(N)) \cup (M_2 - h_2(N))$ via identifikation af $v \in \overline{h}_1(E' - N)$ med $\overline{h}_2 \alpha_{E'} \overline{h}_1^{-1}(v)$ for alle $v \in \overline{h}_1(E' - N)$ kaldes for den sammenhængende sum af M_1 og M_2 langs N via h_1 og h_2, hvor $\alpha_{E'}$ svarer til α_n i definition 5.3. Vi benytter notationen $M(h_1, h_2)$.

Som notationen antyder, kan det vises, at konstruktionen er uafhængig af de valgte udvidelser $\overline{h}_i$, samt af $\alpha_{E'}$. Der gælder følgende propositionen, som beskriver indflydelsen af de valgte h_i'er.

Proposition 5.19. *Lad $M = M(h_1, h_2)$ og $M' = M(h'_1, h'_2)$ være to sammenhængende summer, hvor $h_i \mid_N = h'_i \mid_N$, $i = 1, 2$. Så findes en automorfi af E så $M' = M(h_1 g, h_2)$.*

Bemærkning 5.20. En automorfi af et vektorbundt er specielt en isomorfi på fibrene. Hvis E er et orienteret vektorbundt anfører Kosinski ([8], s. 12), at isomorfierne kan repræsenteres af elementer i $\mathrm{SO}(k)$ på fibrene.

Konstruktionen kan virke indviklet, men fortvivl ikke! Vi skal kun benytte den i et specialtilfælde, som gør tingen lidt lettere at forstå, se afsnit 6 om hankelegemer. Det, som er væsentligt at forstå, er, at vi kan klistre to mangfoldigheder sammen langs en delmangfoldighed. De tubulære omegne/vektorbundterne er kun nødvendige tekniske værktøjer, som bevarer den differentiable struktur.

5.3. **Kobordisme.** Vi har allerede ovenfor benyttet et resultat om kobordisme. Derfor slutter vi afsnittet med en omtale af begreberne kobordisme og h-kobordisme.

Definition 5.21. To mangfoldigheder M og N kaldes kobordente eller siges at tilhøre samme kobordisme, hvis der findes en mangfoldighed W med $\partial W = M \cup N$, hvor M og N er disjunkte, samt afsluttede i ∂W. Man benytter notationen $\mathcal{C} = (W; M, N)$.

Vi vil i vores sprogbrug lade en kobordisme $(W; M, N)$ arve sine egenskaber fra W. En kompakt kobordisme henviser altså til, at W er kompakt. Kobordisme kan specialiseres til h-kobordisme, hvilket er det, vi er interesserede i.

Definition 5.22. To lukkede mangfoldigheder M og N kaldes h-kobordente eller siges at tilhøre samme h-kobordisme, hvis der findes en kobordisme $(W; M, N)$, således at M og N er deformationsretrakter af W.

Bemærkning 5.23. Da vi interesserer os for kombinatoriske mangfoldigheder, kunne vi nøjes med i definitionen at kræve, at $i : M, N \to W$ er homotopiækvivalenser. Antag nemlig, at $i : M \to W$ er en homotopiækvivalens. Vi kan opfatte M som delkompleks. Derfor giver sætning 4.2, at M er en deformationsretrakt af W.

De resultater vi har brug for, kan sammenfattes i følgende sætning, jf. Kosinski ([8], s. 158). Gruppen i sætningen betegnes Θ^n.

Sætning 5.24. *Der gælder, at h-kobordismerne for n-homotopisfærer udgør en abelsk gruppe med sammenhængende sum som komposition.*

Sætningen minder om sætning 5.7. Pga. sætning 7.1 er de faktisk to sider af samme sag. Ifølge Kosinski ([8], s. 158) gælder det, at $A^n \cong \Theta^n$ for $n \geq 5$.

Vores eneste interesse i sætning 5.24 er et lemma, som er med til at vise eksistensen af inverse elementer. Det har vi nemlig allerede brugt i afslutningen af argumentationen for sætning 5.7.

Lemma 5.25. *En homotopisfære M^n er i samme h-kobordisme som S^n, hvis og kun hvis den er rand for en kontraktibel mangfoldighed for $n \geq 2$.*

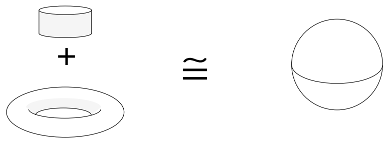
Bevis. Antag, at der findes W, så $\partial W = M \cup S^n$. Se på $W' = D^{n+1} \cup W$. Hvor W' er W med hullet omkranset af S^n fyldt ud med D^{n+1}. Da der er tale om en h-kobordisme, er S^n deformationsretrakt af W. Altså kan W' deformeres til D^{n+1}, hvilket betyder at W' er kontraktibel. Det var, hvad der skulle vises, da $\partial W' = M$.

Antag omvendt, at $M = \partial W'$. Fjern så det indre af en indlejret kugle fra W', så kuglens afslutning er disjunkt med M. Det giver en mangfoldighed W med $\partial W = M \cup (-S^n)$. Indlejringen $f : D^{n+1} \to W'$ giver anledning til en lang eksakt følge af parrene $(D^{n+1}, S^n) \to (W', W)$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & H_{n+1}(D^{n+1}, S^n) \arrow[r] \arrow[d, "{(i_{n+1}, i_{n+1})}"'] & H_n(S^n) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(D^{n+1}) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(D^{n+1}, S^n) \arrow[d, "{(i_n, i_n)}"'] \\
0 \arrow[r] & H_{n+1}(W', W) \arrow[r] & H_n(W) \arrow[r] & H_n(W') \arrow[r] & H_n(W', W).
\end{tikzcd}$$

Fordi W' er kontraktibel, bliver de næstsidste grupper i hver række trivielle. Ved excision følger det, at $(i_\star, i_\star)$ er en isomorfi. Derfor giver femlemmaet, se Hatcher ([5], s. 129), at $i_\star : H_\star(S^n) \to H_\star(W)$ er en isomorfi på homologigrupper. Da W' er kontraktibel bliver W enkeltsammenhængende for $n \geq 2$. Derfor følger det af korollar 4.5, at $i : S^n \to W$ er en homotopiækvivalens. Vi kan opfatte S^n som delkompleks, så konklusionen bliver stærkere som i bemærkning 5.23. Nemlig at S^n er en deformationsretrakt af W.

Ifølge Poincaré dualiteten 4.14 er $H_k(W, M) \cong H^{n-k}(W, S^n)$. Derfor ses det af den lange eksakte følge for (M, W), at $i : M \to W$ er en isomorfi på homologigrupper. Da M er enkeltsammenhængende, følger det derfor som for S^n, at M er en deformationretrakt af W. $\square$



FIGUR 9. En solid torus påsat en 2-hank.

6. HANKELEGEMER

6.1. **Basale egenskaber ved hanke.** Vi er allerede stødt på hankelegemer i afsnittet om Morse teori. Der var omtalen overfladisk medtaget for at understøtte afsnittets emne. I nærværende afsnit vil vi udvikle mere teori om hankelegemer og om at påsætte hanke. Der vil være tale om en smule gentagelse fra den tidligere omtale, da dette afsnit er tænkt som hvilende i sig selv.

Vi vil komme med to tilgange til begrebet at påsætte en hank. Den første er mest intuitiv, men den har en teknisk svaghed. Den anden er mere kompliceret, men undgår den første konstruktions svaghed. Dernæst vil vi vise, at de er ækvivalente.

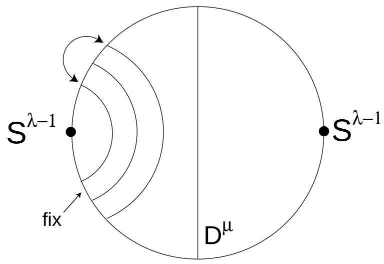
Definition 6.1. Vi kalder $D^\lambda \times D^{n-\lambda}$ for en n-dimensionel λ-hank ofte blot en λ-hank. Lad M være en n-mangfoldighed med rand ∂M. Antag, at $f^\lambda : S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda} \to \partial M$ er en indlejring. Vi kalder n-mangfoldigheden $M + (f^\lambda)$ defineret ved $M \cup_{f^\lambda} (D^\lambda \times D^{n-\lambda})$ for M påsat en λ-hank.

For at få et billede af konstruktionen gentager vi et eksempel fra tidligere. På figur 9 ser man en solid torus påsat en 2-hank. Man ser af definitionen, at vi får en topologisk mangfoldighed, men det vi gerne vil have er en glat mangfoldighed. Desværre giver konstruktionen ikke umiddelbart $M + (f^\lambda)$ en glat struktur langs sammenføjningen af randene, dvs. på $S^{\lambda-1} \times S^{n-\lambda-1}$. Dette problem kan man løse ved en metode, som Smale ([20]) kalder "udglatning af hjørnerne". Denne metode giver ifølge Smale den topologiske mangfoldighed $M + (f^\lambda)$ en struktur som en glat mangfoldighed, der er entydig op til diffeomorfi.

Den anden konstruktion giver automatisk en glat mangfoldighed. Prisen er, at vi må bruge det tekniske begreb sammenhængende sum langs en delmangfoldighed $S^{\lambda-1}$. Begrebet er beskrevet i afsnit 5, se bemærkning 5.2 for en kommentar til den bagvedliggende ide.

For at foretage konstruktionen har vi brug for $S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda}$ indlejret i randen af en mangfoldighed M^n, en tubulær omegn af den indlejrede $S^{\lambda-1} \times \{0\}$, en tubulær omegn af $S^{\lambda-1}$ i D^n, samt en diffeomorfi mellem de to tubulære omegne.

Lad $S^{\lambda-1} = \left\{(x_\lambda, x_\mu) \in D^n \mid {x_\lambda}^2 = 1\right\}$. Som tubulær omegn for $S^{\lambda-1}$ kan man vælge $T(\epsilon) = \left\{x \in D^n \mid {x_\lambda}^2 > \epsilon\right\}$ for $0 \leq \epsilon < 1$. For det meste vil vi



FIGUR 10. En diffeomorfi af $T(0) - S^{\lambda-1}$.

benytte $T(0)$. Vi har brug for en diffeomorfi af $T(\epsilon) - S^{\lambda-1}$. Hertil vælger vi

$$\begin{aligned} \alpha : T(\epsilon) - S^{\lambda-1} &\rightarrow T(\epsilon) - S^{\lambda-1}; \\ (x_\lambda, x_\mu) &\mapsto \left(\frac{x_\lambda}{\|x_\lambda\|}(1 - {x_\lambda}^2 + \epsilon)^{\frac{1}{2}}, x_\mu \frac{({x_\lambda}^2 - \epsilon)^{\frac{1}{2}}}{(1 - {x_\lambda}^2)^{\frac{1}{2}}} \right). \end{aligned}$$

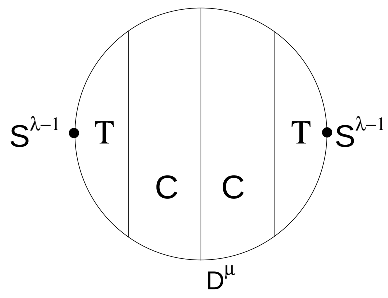
Figur 10 illustrerer diffeomorfien for $T(0)$. Man ser, at buerne spejles i buen, som løber igennem $(\frac{1}{2}, 0)$. Antag, at vi har en indlejring $h : S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda} \rightarrow \partial M$, hvor M er en n-mangfoldighed med rand ∂M. Lad $\overline{h} : T(0) \rightarrow M$ være en indlejring, som udvider h, hvor billedet er en tubulær omegn af $h(S^{\lambda-1} \times \{0\})$ i M.

Definition 6.2. Med de ovenfor omtalte betegnelser kalder vi mangfoldigheden, $M \cup H^\lambda$, som man opnår ved at identificere $x \in T(0) - S^{\lambda-1}$ med $\overline{h}\alpha(x)$ i $(M - h(S^{\lambda-1} \times \{0\})) \cup (D^n - S^{\lambda-1})$, for M med en hank påsat langs $h(S^{\lambda-1} \times \{0\})$.

Definition giver os en glat mangfoldighed. Den er til gengæld lidt sværere at forestille sig end den forrige. I stedet for at visualisere den vil vi i næste proposition vise, at de to konstruktioner på passende vis er ækvivalente. Når vi har vist det, kan vi nøjes med tegninger af $M + (f^\lambda)$. Ækvivalensen af de to konstruktioner skal forstås i følgende forstand. Antag, at vi har konstrueret $M \cup H^\lambda$ via en indlejring $h : T(0) \rightarrow M$ af en tubulær omegn af $S^{\lambda-1}$ ind i M. Vi vil konstruere en tilsvarende mangfoldighed $M + (f^\lambda)$, som er homeomorf med $M \cup H^\lambda$ på en fornuftig måde. Konklusionen bliver, at der til hver $M \cup H^\lambda$ svarer netop en $M + (f^\lambda)$, samt at $M \cup H^\lambda$ er repræsentant for den glatte struktur, som $M + (f^\lambda)$ ville få, hvis man "udglatter langs hjørnerne". For ikke at sælge skindet før bjørnen er skudt, må vi hellere bevise den omtalte proposition, men først skal vi have nogle begreber på plads.

Bemærkning 6.3. En hank har nogle centrale dele, som vi tit skal referere til, derfor definerer vi følgende begreber. Hvis man tænker på en hank som $D^\lambda \times D^{n-\lambda}$, kaldes $D^\lambda \times \{0\}$ for kernen og kernens rand, $S^{\lambda-1} \times \{0\}$, for påsætningssfæren. Hankens transverse disk er $\{0\} \times D^{n-\lambda}$, og diskens rand $\{0\} \times S^{n-\lambda-1}$ kaldes den transverse sfære.

Proposition 6.4. *Lad $M \cup H^\lambda$ være dannet via $h : T(0) \rightarrow M$. Så findes $M + (f^\lambda)$ homeomorf med $M \cup H^\lambda$ via en homeomorfi, som er identiteten på den transverse disk og på randen.*



FIGUR 11. Disken opdelt i C og T.

Bevis. Vi kan identificere D^n med $D^\lambda \times D^\mu$, $\mu = n - \lambda$, via en homeomorfi, som sender $\partial D^\lambda \times D^\mu$ til $\{(x_\lambda, x_\mu) \in \partial D^n \mid {x_\lambda}^2 \geq \frac{1}{2}\}$. Hvis h' er h's restriktion til randdelen af D^n svarende til $\partial D^\lambda \times D^\mu$, giver det os $h' : S^{\lambda-1} \times D^\mu \to \partial M$. Derfor kan vi danne en mangfoldighed $M + (f^\lambda)$ som $M \cup_{h'} D^n$ med $h' = f^\lambda$.

For at studere $M \cup H^\lambda$ opdeler vi D^n i $C = \{(x_\lambda, x_\mu) \in D^n \mid {x_\lambda}^2 \leq \frac{1}{2}\}$ og $T = \{(x_\lambda, x_\mu) \in D^n \mid {x_\lambda}^2 \geq \frac{1}{2}\}$. Så er $D^n = C \cup T$, og α, der benyttes til konstruktionen af $M \cup H^\lambda$, bytter rundt på $C - D^\mu$ og $T - S^{\lambda-1}$, mens den er identiteten på $C \cap T$. Når M og H^λ identificeres via $h\alpha$ identificeres $h(T - S^{\lambda-1})$ med $C - D^\mu$. Derfor svarer det topologiske rum $M \cup H^\lambda$ til $(M - h(T - T \cap C)) \cup_{h_1} C$, $h_1 = h\mid_{C \cap T}$. Man ser, at C svarer til D^n via homeomorfien $g : C \to D^n$ givet ved

$$(x_\lambda, x_\mu) \mapsto \begin{cases} (x_\lambda(2(1 - {x_\mu}^2))^{\frac{1}{2}}, x_\mu) & , \quad {x_\mu}^2 \leq \frac{1}{2} \\ (x_\lambda, x_\mu) & , \quad ellers. \end{cases}$$

Tilsvarende er $M - h(T - T \cap C)$ homeomorf med M via en homeomorfi, som er hgh^{-1} på $h(C - D^\mu)$ og identiteten på resten. Det giver os en homeomorfi

$$(M - h(T - T \cap C)) \cup_{h_1} C \to M \cup_{g'} D^n,$$

hvor g' fremgår af diagrammet

$$\begin{array}{ccc} C \cap T & \xrightarrow{h_1} & h(C \cap T) \\ {\scriptstyle g^{-1}} \uparrow & & \downarrow {\scriptstyle hgh^{-1}} \\ g(C \cap T) & \longrightarrow & M. \end{array}$$

Det viser, at $g' = (hgh^{-1})(h_1 g^{-1}) = h\mid_{g(C \cap T)} = h'$, dvs. at

$$M \cup H^\lambda \cong_{Top} M \cup_{h'} D^n \cong_{Top} M + (f^\lambda).$$

At homeomorfien er identiteten på den transverse disk D^μ og på randen, det følger af, at $g\mid_{D^\mu}$ og $g\mid_{C \cap \partial D^n}$ begge er identiteten. □

Da beviset kan vendes om, giver det os en metode, hvormed vi til et hankelegeme $M + (f^\lambda)$ kan knytte et hankelegeme $M \cup H^\lambda$, som er homeomorft med det første. Ifølge Smale ([20]) kan $M + (f^\lambda)$ gives en -op til diffeomorfi-entydig glat struktur, som respekterer de oprindelige på M og $D^n \times D^{n-\lambda}$. Altså må $M \cup H^\lambda$ være en repræsentant for en sådan glat struktur. Derfor vil vi fremover bruge de to betegnelser $M \cup H^\lambda$ og $M + (f^\lambda)$ i samme betydning. Vi vil omtale mangfoldigheder af denne type som hankelegemer.

Vi vil bygge forskellige mangfoldigheder ud fra andre ved at påsætte hanke. Antag, at vi har en tripel $(W; V_0, V_1)$, hvor W er en kompakt orienteret n-mangfoldighed med rand lig den disjunkte forening af V_0 og V_1, der begge er afsluttede i ∂W. Der findes en omegn af V_0, som er diffeomorf med $V_0 \times [0,1]$, tænk på kraven for V_0, se evt. afsnit 9 for en definition. Vores mål er at sætte hanke på $V_0 \times [0,1]$ for at opnå en mangfoldighed diffeomorf med W.

I resten af dette afsnit optræder $(W; V_0, V_1)$ præcist i den ovenstående betydning. Til tider omtales triplen som en (n-dimensionel) kobordisme, dvs. $\mathcal{C} = (W; V_0, V_1)$, jf. afsnit 5. Vi låser også betydningen af W, V_0, V_1, selv når de ikke indgår i en tripel. Vi benytter notationen $\partial_+ W$ til at angive en komponent i ∂W, hvor en hank påsættes og $\partial_+(W + (f^\lambda))$ til at betegne en randkomponent, der er resultatet af en påsat hank.

Inden vi går videre, har vi brug for to tekniske lemmaer, som vi citerer fra Lück ([10], s. 12).

Lemma 6.5. *(Isotopilemma) Lad $(W; V_0, V_1)$ være en n-dimensionel kobordisme. Hvis $f^\lambda, g^\lambda : S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda} \to V_1$ er isotope indlejringer, så findes en diffeomorfi fra $W + (f^\lambda)$ til $W + (g^\lambda)$, som er identiteten på V_0.*

Lemma 6.6. *(Diffeomorfilemma) Lad $(W; V_0, V_1)$ og $(W'; V_0', V_1')$ betegne to kobordismer. Antag, at der findes en diffeomorfi $F : W \to W'$, som inducerer en diffeomorfi $f_0 : V_0 \to V_0'$. Lad $f^\lambda : S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda} \to V_1$ være en indlejring. Så findes en indlejring $\overline{f}^\lambda : S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda} \to V_1'$ og en diffeomorfi*

$$F' : W + (f^\lambda) \to W' + (\overline{f}^\lambda),$$

som inducerer f_0 på V_0.

Bemærkning 6.7. Det første lemma fortæller os, at isotope hanke giver samme hankelegeme. Der gælder, at vi kan nøjes med, at restriktionerne til påsætningssfærerne er isotope, da $S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda}$ kan opfattes som en afsluttet tubulær omegn, der naturligt følger med under isotopien. Et argument for denne påstand baseret på homotopi-udvidelsens-egenskaben kan findes hos Smale ([20], s. 398). Hvis dimensionerne er passende giver sætning 9.12, at det er tilstrækkeligt, at påsætningssfærerne er homotope.

Det andet lemma fortæller os, hvordan vi bevarer de øvrige hanke, når vi flytter rundt på en af dem. Pga. dette lemma vil vi nogle gange tillade os at misbruge notationen og glemme, at der egentligt er tale om nye indlejringer, hvis de giver os det samme hankelegeme. Antag, f.eks. at

$$W \cong V_0 \times [0,1] + (f^\lambda) + (f^\mu),$$

og at vi via en isotopi flytter f^λ. Resultatet bliver

$$W \cong V_0 \times [0,1] + (\overline{f}^\lambda) + (\overline{f}^\mu),$$

men vi vælger at skrive

$$W \cong V_0 \times [0,1] + (\overline{f}^{\lambda}) + (f^{\mu}),$$

hvis (f^{μ}) blot er repræsentant for en vilkårlig μ-hank.

Da W er kompakt, har vi faktisk allerede følgende resultat fra afsnittet om Morse teori.

Lemma 6.8. *For triplen $(W; V_0, V_1)$ findes hanke $H_i^{\lambda_i}$, $i = 1, \ldots, k$, så*

$$W \cong V_0 \times [0,1] \cup H_1^{\lambda_1} \cup \cdots \cup H_k^{\lambda_k},$$

hvor diffeomorfien kan vælges som identiteten på $V_0 \times \{0\}$.

Bevis. Da W opfylder betingelserne i sætning 3.7, findes en Morse funktion $f : W \to [0,1]$ så $f^{-1}(\{0\}) = V_0$. Da W er kompakt, har f endeligt mange kritiske punkter. Derfor findes ϵ, så W_ϵ er uden kritiske punkter. Altså er $W_\epsilon \cong V_0 \times [0,1]$. Ifølge bemærkning 3.10 kan vi antage, at de kritiske punkter antager forskellige værdier. Derfor findes netop et kritisk punkt svarende til den mindste kritiske værdi, dvs. $q_0 = f(p_0)$. Vi kan finde $\epsilon_0 > 0$, så p_0 er det eneste kritiske punkt i $W_{q_0-\epsilon_0, q_0+\epsilon_0}$. Det bringer os præcist i situationen beskrevet i sætning 3.11. Sætningen giver os, at

$$W_{q_0+\epsilon_0} \cong W_{q_0-\epsilon_0} \cup H^{\lambda}.$$

Lemma 6.6 giver os derfor, at

$$W_{q_0+\epsilon_0} \cong V_0 \times [0,1] \cup H^{\lambda'}.$$

Hvis vi fortsætter denne procedure omkring alle kritiske punkter, følger det, at

$$W \cong V_0 \times [0,1] \cup H_1^{\lambda_1} \cup \cdots \cup H_k^{\lambda_k}.$$

□

Vi vil gerne vise, at hanke kan sættes på ordnet efter λ. Det giver næste lemma os mulighed for.

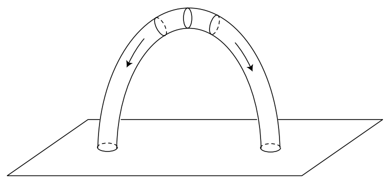
Lemma 6.9. *Lad $(W; V_0, V_1)$ være en n-dimensionel kobordisme. Antag, at $W_1 = W + (f^{\lambda}) + (f^{\mu})$ for $\mu \leq \lambda$. Så er W_1 diffeomorf med $W + (\overline{f}^{\mu}) + (f^{\lambda})$ via en diffeomorfi, som er identiteten på V_0 for en passende μ-hank, $\overline{f}^{\mu}$.*

Bevis. Vi har en indlejring $f^{\mu} \,|\colon S^{\mu-1} \times \{0\} \to \partial_+(W + (f^{\lambda}))$. Da det er en indlejring, kan vi vha. korollar 9.22 opnå en isotopi, der flytter $f^{\mu}\,|$, sådan at den er transversal med den transverse sfære $\{0\} \times S^{n-\lambda-1}$. En isotopi af påsætningssfæren giver os ifølge bemærkning 6.7 et diffeomorft hankelegeme, som vi derfor også benævner $W + (f^{\lambda})$. Da

$$\dim S^{\mu-1} + \dim S^{n-\lambda-1} = \mu - 1 + n - \lambda - 1 \leq n - 2 < n - 1$$

betyder transversaliteten, jf. bemærkning 9.19, at $f^{\mu}\,|$ ikke møder den transverse sfære.

En indlejring af $S^{\mu-1} \times D^{n-\mu}$ er isotop med en indlejring indeholdt i en vilkårlig omegn, U, omkring billedet af $S^{\mu-1} \times \{0\}$. Derfor kan vi vha. en isotopi skrumpe f^{μ}, så der findes en afsluttet omegn omkring $\{0\} \times S^{n-\lambda-1}$, der har tom fællesmængde med f^{μ}'s billede. Da U kan vælges på formen



FIGUR 12. En omegn af den transverse sfære pustes op.

$D^\lambda_\epsilon \times S^{n-\lambda-1}$, kan man via en diffeotopi, H_t, af $\partial_+(W + (f^\lambda))$ flytte ethvert punkt, som ikke er indeholdt i U uden for (f^λ), samtidig med at den er identiteten på den transverse sfære, se figur 12. Denne diffeotopi inducerer en isotopi af f^μ, som ender på formen $\overline{f}^\mu = H_1 \circ f^\mu$.

Ifølge lemma 6.5 gælder der, at

$$W + (f^\lambda) + (f^\mu) \cong W + (f^\lambda) + (\overline{f}^\mu).$$

Den ønskede konklusion følger derfor af, at

$$W + (f^\lambda) + (\overline{f}^\mu) \cong W + (\overline{f}^\mu) + (f^\lambda),$$

da $(\overline{f}^\mu)$ ikke mødes med (f^λ). □

Lemmaet giver os specielt, at rækkefølgen for påsætningen af to hanke med samme indeks er underordnet. De kan påsættes uafhængigt af hinanden. Beviset fortæller os yderligere, at to vilkårlige hanke også kan opfattes som uafhængige, hvis den sidst hanks påsætningssfære ikke møder den transverse sfære for den første.

Vi kan nu pynte på lemma 6.8. Hvis $(W; V_0, V_1)$ er en kobordisme, da findes hanke, så

$$W \cong V_0 \times [0,1] + \sum_{i=0}^{c_0} (f^0_{i_0}) + \cdots + \sum_{i=1}^{c_n} (f^n_{i_n}), \tag{6.1}$$

hvor vi benævner antallet af λ-hanke med c_λ. Det overlapper notationen for typenumre, men tallene svarer netop til hinanden, jf. beviset for lemma 6.8. Det giver os også en følge af mangfoldigheder:

$$W_{-1} = V_0 \times [0,1] \subset W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_n = W, \tag{6.2}$$

hvor W_i er W_{i-1} påsat c_i i-hanke. Vi kalder udtrykkene 6.1 og 6.2 præsentationer, $\mathcal{P}$, af W.

Ved at udnytte sætning 3.13 ser man, at en præsentation svarer til en Morse funktion $f : W \to \mathbb{R}$, men så er også $-f$ en Morse funktion på W. Den giver os mulighed for at studere kobordismen $(W; V_1, V_0)$. Det inspirerer til følgende proposition.

Proposition 6.10. *Til enhver præsentation, $\mathcal{P}$, af en mangfoldighed, W, findes en dual præsentation, $\overline{\mathcal{P}}$, så $\mathcal{P}$'s λ-hanke svarer til $\overline{\mathcal{P}}$'s $(n-\lambda)$-hanke, og så påsætningssfæren for en λ-hank i $\mathcal{P}$ svarer til den transverse sfære for den tilsvarende $(n-\lambda)$-hank i $\overline{\mathcal{P}}$ og vice versa.*

Bevis. Da W er kompakt, kan vi vælge, at billedet for f er indeholdt i $[0,1]$. Benyt Morse funktionen $g = 1 - f$, så er $g^{-1}(\{0\}) = V_1$. Derfra kan man opbygge W ligesom i beviset for lemma 6.8. Når f lokalt kan skrives som $f = -x_\lambda^2 + x_\mu^2$, så kan g skrives som $g = 1 - x_\mu^2 + x_\lambda^2$. Derfor bliver λ-hanke til $(n-\lambda)$-hanke. $\square$

Resultatet bliver nyttigt senere, fordi resultater, som vi kan vise for 0- og 1-hanke via den duale præsentation, bliver til resultater om $(n-1)$- og n-hanke.

6.2. **Hanke, Homologi og Homotopi.** Vi har brug for at vide, hvordan en hank påvirker homologien og homotopien af en mangfoldighed.

Lemma 6.11. *Der gælder, at $W \cup_{f'} (D^\lambda \times \{0\})$ er en deformationsretrakt af $W + (f^\lambda)$, hvor $f' = f^\lambda |_{S^{\lambda-1}\times\{0\}}$.*

Bevis. Da $W + (f^\lambda) = W \cup_{f^\lambda} D^\lambda \times D^{n-\lambda}$ ser man det ønskede, da $D^{n-\lambda}$ har $\{0\}$ som deformationsretrakt. $\square$

Det giver os en nyttig proposition om homotopien af et hankelegeme.

Proposition 6.12. *Homomorfien $\pi_i(W) \to \pi_i(W \cup H^\lambda)$ er surjektiv for $\lambda > i$ og injektiv for $\lambda > i+1$.*

Bevis. Ifølge lemma 6.11 kan vi se på $W \cup D^\lambda$ i stedet for $W \cup H^\lambda$. En repræsentant γ for $[\gamma] \in \pi_i(W \cup D^\lambda)$ kan vælges glat, jf. sætning 9.7. Altså har vi en glat afbildning, $\gamma : S^i \to W \cup D^\lambda$. Vi kan vælge $x \in (D^\lambda)^\circ$ og ifølge korollar 9.23 ændre γ, så γ er transversal med x, dvs. at x ikke rammes af γ for $i < \lambda$, jf. bemærkning 9.19. Ved at bruge en homotopi, der projicerer væk fra x, får vi, at γ er homotop med en afbildning ind i W. Altså er homomorfien surjektiv.

Hvis $i + 1 < \lambda$, kan en nulhomotopi i $W \cup D^\lambda$ tilsvarende opfattes som en nulhomotopi i W. Vi minder om, at en nulhomotopi for $[\gamma] \in \pi_i(W \cup D^\lambda)$ svarer til en afbildning fra D^{i+1} ind i $W \cup D^\lambda$. $\square$

En anden nyttig proposition er:

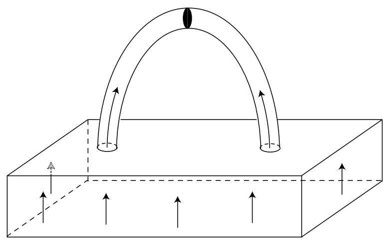
Proposition 6.13. *Antag, at $W = (V_0 \times I) \cup H^\lambda$. Da er homomorfien $\pi_i(\partial_+ W) \to \pi_i(W)$ surjektiv, hvis $i < n - \lambda$ og injektiv, hvis $i < n - \lambda - 1$.*

Bevis. Man bemærker, at $\partial_+ W$ klistret sammen med den transverse disk langs den transverse sfære udgør en deformationsretrakt af W, se figur 13. Da $\dim D^\mu = n - \lambda$, kan en afbildning $S^i \to \partial_+ W \cup D^\mu$ vælges ikke-surjektiv på D^μ for $i < n - \lambda$, jf. bemærkning 9.19. Derfor giver argumentationen fra beviset for proposition 6.12 den ønskede surjektivitet. Samme argument giver tilsvarende injektiviteten for $i < n - \lambda - 1$. $\square$

De to propositioner giver os følgende korollar om homotopien af en præsentation.

Korollar 6.14. *Hvis $V_0 \times I = W_{-1} \subset W_0 \subset \cdots \subset W_n = W$ er en præsentation, så er*

$$\pi_i(\partial_+ W_\lambda) \cong \pi_i(W_\lambda) \cong \pi_i(W)$$



FIGUR 13. En komponent af randen og den transverse disk er en deformationsretrakt.

for $i < \lambda < n - i - 1$. *Specielt hvis* $\pi_1(W) = 0$ *og* $\dim W > 4$, *da er* $\pi_1(\partial_+ W_\lambda) = 0$ *for* $2 \leq \lambda \leq n - 3$.

Bevis. For et fast i er forskellen på W_λ og $W_{\lambda+1}$ endeligt mange disjunkte $(\lambda + 1)$-hanke, men så er

$$\pi_i(W_\lambda) \cong \pi_i(W_{\lambda+1})$$

for $i+1 < \lambda+1$, dvs. $i < \lambda$, ifølge proposition 6.12. Altså er $\pi_i(W_\lambda) \cong \pi_i(W)$.

For samme faste i betragter vi den duale præsentation til kobordismen $(W_\lambda; V_0, \partial_+ W_\lambda)$:

$$\partial_+ W_\lambda \times I = W'_{-1} \subset W'_0 \subset \cdots \subset W'_\lambda = W_\lambda.$$

Forskellen mellem $W_{\lambda-i}$ og $W_{\lambda-i-1}$ er nogle $(\lambda - i)$-hanke. Forskellen mellem W'_i og W'_{i-1} svarer til det duale. Altså består forskellene mellem de mærkede hanke af $(n - (\lambda - i - 1))$-hanke for $i = -1, \ldots, \lambda$. Derfor følger det af proposition 6.12, at

$$\pi_i(\partial_+ W_\lambda) \cong \pi_i(W_\lambda)$$

for $i+1 < n-(\lambda-(-1)-1)$, dvs. $i < n-\lambda-1$, hvilket viser det ønskede. □

En ting, som bliver nødvendig senere, er at kunne fjerne hanke. Det følger af sætning 4.20 om forholdet mellem Euler karakteristikken og hanke, at vi aldrig kan opnå samme hankelegeme ved at fjerne en enkelt hank. Derimod viser det sig, at man under de rette omstændigheder godt kan få samme hankelegeme ved at fjerne to nabohanke. Vi har faktisk allerede set et eksempel på dette fænomen på figur 9. Figuren viser, hvordan

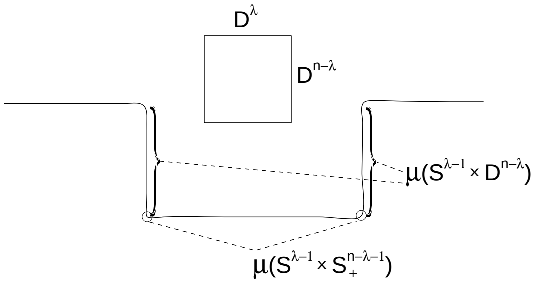
$$D^3 \cup H^1 \cup H^2 \cong \textit{Solid torus} \cup H^2 \cong D^3.$$

Næste eksempel generaliserer denne konstruktion, men først en bemærkning.

Bemærkning 6.15. Antag, at vi har en situation, hvor vi klæber en sammenhængende mangfoldighed M med rand sammen med D^n via D^{n-1} indlejret i randen, dvs. $M \cup_{D^{n-1}} D^n$. Det svarer til den ene halvdel af en 0-hank. Ækvivalensen af de to metoder til at påsætte hanke viser, at situationen svarer til at klistre M og D^n sammen via tubulære omegne omkring et punkt. Altså er der tale om en sammenhængende randsum, dvs.

$$M \cup_{D^{n-1}} D^n \cong M \sharp_b D^n \cong M,$$

hvor den sidste diffeomorfi følger af proposition 5.17.



FIGUR 14. Påsætning af disk.

Eksempel 6.16. *Vi opfatter D^n som på figur 14 for $0 \leq \lambda \leq n-1$. Antag, at vi har en indlejring*

$$\mu : S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda} \cup_{S^{\lambda-1} \times S_+^{n-\lambda-1}} D^\lambda \times S_+^{n-\lambda-1} \to \partial_+ W,$$

hvor $S_+^{n-\lambda-1}$ er den øvre halvsfære, og W er en n-mangfoldighed med en randkomponent $\partial_+ W$. Det vi gør, er at indlejre en del af randen for D^n, som svarer til S^{n-1} fratrukket en åben $(n-1)$-disk $(D^\lambda)^\circ \times S_-^{n-\lambda-1}$. Man bemærker, at S^{n-1} fratrukket en åben $(n-1)$-disk er en $(n-1)$-disk.

Lad os benytte $\mu \mid_{S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda}} = f^\lambda$ som påsætningsafbildning for en λ-hank. Denne hank tilføjer $D^\lambda \times D^{n-\lambda}$ med rand $D^\lambda \times S^{n-\lambda-1}$ til mangfoldigheden. Vi kan opfatte halvdelen af denne rand som

$$S_+^\lambda \times S_+^{n-\lambda-1} = D^\lambda \times S_+^{n-\lambda-1} \subset D^\lambda \times S^{n-\lambda-1} \subset \partial_+(W + (f^\lambda)),$$

hvilket svarer til en indlejring

$$f_+^{\lambda+1} : S_+^\lambda \times S_+^{n-\lambda-1} \to \partial_+(W + (f^\lambda)).$$

Hvis vi ser på endnu en restriktion af μ, giver det os

$$f_-^{\lambda+1} : S_-^\lambda \times S_+^{n-\lambda-1} \to \partial_+(W + (f^\lambda)),$$

hvor $f_-^{\lambda+1} = \mu \mid_{D^\lambda \times S_+^{n-\lambda-1}}$. Vores to indlejringer mødes i $S^{\lambda-1} \times S_+^{n-\lambda-1}$, og kan derfor stykkes sammen til

$$g^{\lambda+1} : S^\lambda \times D^{n-\lambda-1} \to \partial_+(W + (f^\lambda)),$$

da $S^\lambda \times D^{n-\lambda-1} = S_-^\lambda \times S_+^{n-\lambda-1} \cup_{S^{\lambda-1} \times S_+^{n-\lambda-1}} S_+^\lambda \times S_+^{n-\lambda-1}$. Hvis vi for et øjeblik studerer $(f^\lambda) + (g^{\lambda+1})$, så ser vi, at

$$(f^\lambda) = D^\lambda \times D^{n-\lambda} \text{ og } (g^{\lambda+1}) = D^{\lambda+1} \times D^{n-\lambda-1},$$

dvs. at

$$(f^\lambda) + (g^{\lambda+1}) = D^\lambda \times D^{n-\lambda} \cup_{S_+^{\lambda-1} \times S_+^{n-\lambda-1}} D^{\lambda+1} \times D^{n-\lambda-1},$$

hvor $S_+^\lambda \times S_+^{n-\lambda-1} = D^\lambda \times D^{n-\lambda-1}$. *Den sidste mangfoldighed er en* $(n-1)$-*disk. Altså svarer summen til* $D^n \natural_b D^n = D^n$. *Her har vi benyttet bemærkning 6.15. Vores mangfoldighed* $W + (f^\lambda) + (g^{\lambda+1})$ *er derfor lig* $W \cup_\mu D^n$. *Igen bemærker man, at* μ *klæber de to mangfoldigheder sammen langs en* $(n-1)$-*disk, så det svarer til* $W \natural_b D^n \cong W$.

Eksemplet viser os, at to nabohanke under specielle betingelser kan annullere hinanden. Det interessante er naturligvis, hvordan de er specielle. Næste lemma uddrager netop en betingelse, som er tilstrækkelig.

Sætning 6.17. *Lad* $(W; V_0, V_1)$ *være en* n-*dimensionel kobordisme. Lad*

$$f^\lambda : S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda} \to V_1 \text{ og } g^{\lambda+1} : S^\lambda \times D^{n-\lambda-1} \to \partial_+(W + (f^\lambda))$$

være to indlejringer. Antag, at $g^{\lambda+1}(S^\lambda \times \{0\})$ *er transversal med den transverse sfære for* λ-*hanken* (f^λ), *og at de skærer hinanden i præcist et punkt. Så findes en diffeomorfi fra* W *til* $W + (f^\lambda) + (g^{\lambda+1})$, *som er identiteten på* V_0.

Bevis. Lad $(S^\lambda \times \{0\}) \cap (\{0\} \times S^{n-\lambda-1}) = \{(x,y)\}$. Hvis vi opfatter (x,y) som nordpol for $S^\lambda \times \{0\}$, så kan vi ændre på $S^\lambda \times \{0\}$ ved at skrumpe den nordlige halvkugle og udvide den sydlige, indtil $S_+^\lambda \times \{0\}$ er indeholdt i en vilkårlig omegn af (x,y). Pga. transversaliteten i (x,y) findes en omegn omkring punktet, hvor $S^\lambda \times \{0\}$'s billede kan ensrettes med fibrene i en tubulær omegn, $D_\epsilon^\lambda \times S^{n-\lambda-1}$, omkring $\{0\} \times S^{n-\lambda-1}$, jf. korollar 9.24. Vi kan altså opfatte $S_+^\lambda \times \{0\}$ som indlejret i $D^\lambda \times \{y\}$. Ved en diffeotopi af $\partial_+(W + (f^\lambda))$, som er stationær på den transverse sfære, kan vi udvide en passende omegn, så

$$S_+^\lambda \times \{0\} = D^\lambda \times \{y\} \subset D^\lambda \times S^{n-\lambda-1} \subset \partial(f^\lambda),$$

mens $S_-^\lambda \times \{0\}$ sendes uden for (f^λ). Da diffeotopien svarer til en isotopi af påsætningsfæren, ændrer den ikke på hankelegemet. Dette bringer os i situationen, som blev undersøgt i eksempel 6.16, hvilket viser det ønskede. □

Vi vil benytte ovenstående metode til at fjerne 0- og 1-hanke i en given præsentation. Det er indholdet af de næste to sætninger.

Sætning 6.18. *Antag, at* $\mathcal{C} = (W; V_0, V_1)$ *er en kobordisme, hvor* W *er sammenhængende og* $V_0 \neq \emptyset$. *Da findes en præsentation af* $\mathcal{C}$ *uden* 0-*hanke.*

Bevis. Der findes en præsentation på formen (6.1) for W. Antag, at $c_0 > 0$. Vælg en hank (f^0). Da W er sammenhængende, og da 1-hanke er de eneste hanke, som kan ændre på antallet af sammenhængskomponenter, må W_1 være sammenhængende. Altså findes der en 1-hank (f^1) med en ende i $V_0 \times I$ og den anden i (f^0). Men hvis en 1-hank kun har en ende indlejret i en 0-hank, så opfylder de betingelserne i sætning 6.17, dvs. at de annullerer hinanden. Således har vi en metode til at reducere antallet af 0-hanke med en. Altså kan vi fjerne dem alle. □

Sætning 6.19. *Lad* $\mathcal{C} = (W; V_0, V_1)$ *være en* n-*dimensionel kobordisme med* $V_0 \neq \emptyset$ *og sammenhængende,* W *enkeltsammenhængende og* $n \geq 5$. *Så findes en præsentation uden* 0-*og* 1-*hanke.*

Bevis. Ifølge sætning 6.18 kan vi antage, at vi allerede har fjernet 0-hankene. Altså er $\partial_+ W_0 = V_0 \times \{1\}$ sammenhængende. Antag, at $c_1 > 0$. Vælg en 1-hank (f^1), samt en kurve $L_1 : t \mapsto (t, q) \in D^1 \times S^{n-2}$ for q fast, der løber på randen af hanken. Denne kurve er glat og skærer den transverse sfære transversalt i netop et punkt. Kurvens endepunkter $q_i = (i, q), i = \pm 1$ ligger begge i $\partial_+ W_0$. Da denne mangfoldighed er sammenhængende kan de forbindes med en glat simpel kurve, L_2, ifølge korollar 9.8. Tilsammen giver L_1 og L_2 os en simpel lukket kurve, S_1, som kan antages glat. Da påsætningssfærerne for de andre 1-hanke udgør endeligt mange punkter kan S_1, vælges uden om dem. Derfor ligger S_1 i $\partial_+ W_1$. Påsætningssfærerne for 2-hankene udgør en kompakt delmængde af $\partial_+ W_1$. Vi kan derfor vælge S_1 transversal med disse påsætningssfærer. Da $\dim S_1 + \dim S^1 = 2 < 4$ følger det af transversaliteten, at S_1 ikke skærer disse, dvs. at S_1 ligger i $\partial_+ W_2$. Ifølge korollar 6.14 er $\partial_+ W_2$ enkeltsammenhængende, så S_1 er nulhomotop.

Vælg et punkt i $\partial_+ W_1$, som ikke har noget at gøre med de transverse sfærer for 1-hankene og påsætningssfærerne for 2-hankene. Så findes en omegn omkring punktet med samme egenskab. Da $W_1 \sharp_b D^n \cong W_1$ kan vi klæbe D^n på W_1 i punktet uden at ændre på diffeomorfiklassen. Ligesom i eksempel 6.16 er $D^n \cong (f^2) + (f^3)$. Det giver os en 2- og en 3-hank, så

$$W_1 \cong W_1 + (f^2) + (f^3).$$

I dette tilfælde er (f^2)'s påsætningssfære, S_2, nulhomotop via en indlejring, da den er indlejret som randen på en disk. Da både S_1 og S_2 er nulhomotope i $\partial_+ W_2$, er de isotope ifølge sætning 9.12, da $\dim \partial_+ W_2 \geq 4$. Isotopien giver os, at vi kan påsætte (f^2) langs S_1. Altså er

$$\begin{aligned} W_2 &\cong W_1 + (f^2) + (f^3) + (2 - \text{hanke}) \\ &\cong W_0 + (1 - \text{hanke}) + (f^1) + (f^2) + (f^3) + (2 - \text{hanke}) \\ &\cong W_0 + (1 - \text{hanke}) + (f^3) + (2 - \text{hanke}), \end{aligned}$$

hvor vi i sidste skridt benytter sætning 6.17 på (f^1) og (f^2). Denne procedure til at fjerne 1-hanke kan fortsættes, indtil der ikke er flere. □

Da $(n-1)$- og n-hanke i en præsentation svarer til 0- og 1-hanke for den duale præsentation, kan vi, hvis V_1 er sammenhængende, forbedre udsagnet i sætning 6.19 til, at $\mathcal{C}$ har en præsentation uden 0- ,1- ,$(n-1)$- og n-hanke.

6.3. **Hanke og Matricer.** Lad $(W; V_0, V_1)$ være en n-dimensionel kobordisme, hvor W er kompakt og orienterbar. Vælg en præsentation

$$W_{-1} = V_0 \times [0, 1] \subset W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_n = W,$$

for kobordismen. Vi kan opfatte de transverse sfærer, $\beta_j^{n-\lambda}$, for $(\lambda - 1)$-hankene og påsætningssfærerne, $\alpha_i^{\lambda - 1}$, for λ-hankene, som lukkede delmangfoldigheder af $\partial_+ W_{\lambda - 1}$, der skærer hinanden transversalt pga. korollar 9.22. Da

$$\dim \partial_+ W_{\lambda - 1} = n - 1 = \lambda - 1 + (n - \lambda),$$

følger det af bemærkning 9.21, at de skærer hinanden i endeligt mange punkter.

Det giver os mulighed for at definere snittallet $[\alpha_i^{\lambda-1} : \beta_j^{n-\lambda}]$, se beskrivelse i afsnit 9 om begreber. Fortegnet bestemmes ved, at der for hver hank vælges en orientering på kernen $D^\lambda \times \{0\}$. Hvis $c_\lambda, c_{\lambda-1} > 0$ kan vi organisere disse snittal i en $c_{\lambda-1} \times c_\lambda$-matrix, $\mathfrak{M}_\lambda$, hvor elementerne er $[\alpha_i^{\lambda-1} : \beta_j^{n-\lambda}]$ for $1 \leq j \leq c_{\lambda-1}$ og $1 \leq i \leq c_\lambda$. Lad C_λ betegne den frie abelske gruppe frembragt af λ-hankene $H_1^\lambda, \ldots, H_{c_\lambda}^\lambda$. For $c_\lambda = 0$ er C_λ den trivielle gruppe med et element, mens $\mathfrak{M}_\lambda$ og $\mathfrak{M}_{\lambda+1}$ er en henholdsvis triviel $c_\lambda \times 1$-matrix og triviel $1 \times c_{\lambda+1}$-matrix. Et element $\sum m_i H_i^\lambda$ i C_λ kan skrives som $(m_1, \ldots, m_{c_\lambda})^t$. Med den notation definerer vi en afbildning

$$\partial_\lambda : C_\lambda \to C_{\lambda-1};\ v \mapsto \mathfrak{M}_\lambda v,$$

dvs. at $\partial_\lambda H_i^\lambda = \sum [\alpha_i^{\lambda-1} : \beta_j^{n-\lambda}] H_j^{\lambda-1}$. Koblingen mellem disse frie grupper og kobordismen er indholdet af følgende sætning.

Sætning 6.20. *Der gælder, at $\{C_\lambda, \partial_\lambda\}$ er et kædekompleks med samme homologi som (W, V_0), dvs. $H_\star(C_\star) = H_\star(W, V_0)$.*

Sætningen giver os en metode til at opnå kendskab til en kobordismes homologi. Vi skal se på, hvordan vi kan ændre på matricerne, hvilket svarer til at finde en ny præsentation for en kobordisme.

Vi kalder $(C_\lambda, \mathfrak{M}_\lambda)$ for en præsentations homologidata. Der er tre elementære søjle/række-operationer på matricer.

$E1$ Ombytning af to søjler eller to rækker.
$E2$ Ændring af fortegn på en søjle eller række.
$E3$ Addition af en søjle(række) til en anden søjle(række).

Antag, at vi for en kobordisme med præsentation, $\mathcal{P}$, gerne vil udføre en af operationerne på en matrix $\mathfrak{M}_\lambda$, så den bliver til $\mathfrak{M}'_\lambda$. Hvis vi kan finde en anden præsentation for kobordismen, som har netop denne nye matrix i sit homologidata i stedet for den gamle, så siger vi, at operationen kan udføres geometrisk. Man ser, at $E1$ svarer til at omnummerere to hanke. Den kan altså udføres geometrisk. Operationen $E2$ svarer til, at man skifter orientering på $D^\lambda \times \{0\}$ for en hank. Da en sådan orientering vælges vilkårligt i definitionen af snittallet, kan den ændres, hvorved $E2$ udføres geometrisk. Man kan vise, at $E3$ også kan udføres geometrisk. Vi samler resultaterne i følgende sætning, som vi citerer fra Kosinski ([8], s. 147).

Sætning 6.21. *Lad $(W; V_0, V_1)$ være en kobordisme med W, V_0 sammenhængende. Givet λ for $1 < \lambda < n$, kan de elementære søjleoperationer $E1 - E3$ og deres inverser udføres geometrisk uden at påvirke andre matricer end $\mathfrak{M}_\lambda$ og $\mathfrak{M}_{\lambda+1}$.*

Man kan vi finde matricer for den duale præsentation. Hvis W er orienteret, viser det sig, at en søjleoperation på en matrix fra en præsentations homologidata svarer til en rækkeoperation på en matrix fra den duale præsentations data. Derfor kan man, hvis V_1 er sammenhængende, udnytte både søjle- og rækkeoperationer. Resultatet bliver følgende sætning, jf. Newman ([16], s. 26).

Sætning 6.22. *Lad $(W; V_0, V_1)$ være en kobordisme, hvor W, V_0, V_1 er sammenhængende og orienterede. Da findes en præsentation af W, så alle matricerne $\mathfrak{M}_\lambda$ er diagonale.*

Da matricerne ikke nødvendigvis er kvadratiske, bør det præciseres, at en matrix opfattes som diagonal, hvis den har en kvadratisk undermatrix, som er diagonal, og har nuller på de resterende pladser.

En 4. geometrisk operation, som ændrer på matricerne er følgende: Vi ved fra sætning 6.17, at

$$M \cong M + (f^\lambda) + (f^{\lambda+1}),$$

hvis f^λ og $f^{\lambda+1}$ vælges, så $[\alpha^\lambda : \beta^{n-\lambda-1}] = 1$. Denne geometriske operation påvirker $\mathfrak{M}_{\lambda+1}$ ved at tilføje en ekstra søjle og række, som har nuller pånær den fælles koefficient, der er lig 1. Også nabomatricerne ændres: $\mathfrak{M}_\lambda$ får tilføjet en søjle med nuller og $\mathfrak{M}_{\lambda+2}$ en række med nuller.

At forsøge den modsatte operation geometrisk er langt fra trivielt. I en situation, hvor snittallet mellem en påsætningssfære og en transvers sfære er ± 1, ønsker vi, at det egentlige antal skæringer kan ændres til netop 1. Vi kan gøre denne problemstilling mere generel. Antag, at V, V' er delmangfoldigheder af M med $[V : V'] = c$. Spørgsmålet bliver så: Findes der en isotopi af en af delmangfoldighederne, så $\sharp(V \cap V') = \mid c \mid$?

Følgende sætning giver et positivt svar under passende omstændigheder. Vi omformulerer sætning 6.6 hos Milnor ([11], s. 71) og den tilhørende bemærkning.

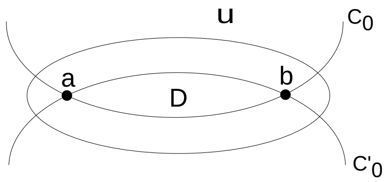
Sætning 6.23. *Lad M være en enkeltsammenhængende orienteret $(n-1)$-mangfoldighed uden rand. Antag, at $V^{\lambda-1}$ og $V^{n-\lambda}$ er lukkede sammenhængende delmangfoldigheder, som skærer hinanden transversalt. Antag, at $n \geq 6$, at $3 \leq \lambda \leq n-3$ og at $\pi_1(M - V^{n-\lambda}) = 1$. Da findes isotopi, h_t, af identiteten på M, så $h_1(V^{\lambda-1})$ skærer $V^{n-\lambda}$ transversalt i præcist $\mid [V^{\lambda-1} : V^{n-\lambda}] \mid$ punkter.*

Vi vil ikke give et fuldstændigt bevis. Det kan findes hos Milnor ([11]), hvor det strækker sig over 11 sider. Nogle af ideerne bag beviset er dog vigtige for os, fordi dimensionsbegrænsningerne i sætningen er dem, som senere optræder i beviset for Den generaliserede Poincaré formodning. Vi viser sætningen modulo et teknisk lemma.

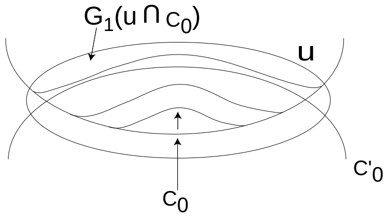
Bevis. (Skitse)Hvis antallet af skæringer ikke er lig snittallet, findes der mindst to punkter p, q, som har forskellige fortegn. Ifølge Milnor ([11], s. 72) findes, pga. at $V^{\lambda-1}$ og $V^{n-\lambda}$ er sammenhængende, en indlejret kurve fra p til q, som løber i $V^{\lambda-1}$ og en fra q til p, som løber i $V^{n-\lambda}$. De løber begge uden om $S = (V^{\lambda-1} \cap V^{n-\lambda}) - \{p, q\}$. Henvisningen til Milnor skyldes kun tilfældet $\lambda = 3$. For $\lambda > 3$ følger kurvens eksistens af sætning 9.11, og transversalitet giver, at S kan undgåes.

Det giver os en topologisk indlejring, L, af S^1. Den er ikke glat i p og q. Man bemærker, at L er kontraktibel i M, fordi M er enkeltsammenhængende. Forlæng kurven i $V^{\lambda-1}$ fra p til q lidt i begge ender, og kald den C. Tilsvarende fås C' gennem q og p i $V^{n-\lambda}$.

Nu flytter vi fokus til planen $\mathbb{R}^2$. Lad C_0 og C_0' være åbne simple kurver



FIGUR 15. Disk i planen.



FIGUR 16. Isotopi af C_0 i planen.

i $\mathbb{R}^2$, som skærer hinanden transversalt i netop to punkter a, b, således at kurverne indeslutter en disk D, se figur 15. Vi kan vælge en topologisk indlejring $\phi_1 : C_0 \cup C_0' \to V^{\lambda-1} \cup V^{n-\lambda}$, så $\phi_1(C_0) = C$ og $\phi_1(C_0') = C'$ med a, b svarende til p, q. Med ovenstående betegnelser gælder der følgende tekniske lemma, se Milnor ([11], s. 73):

Lemma 6.24. *Der findes en omegn U af D, så vi kan udvide $\phi_1 |_{U\cap(C_0\cup C_0')}$ til en indlejring $\phi : U \times \mathbb{R}^{\lambda-2} \times \mathbb{R}^{n-\lambda-1} \to M$, således at*

$$\phi^{-1}(V^{\lambda-1}) = (U\cap C_0)\times\mathbb{R}^{\lambda-2}\times\{0\} \;\; \textit{og} \;\; \phi^{-1}(V^{n-\lambda}) = (U\cap C_0')\times\{0\}\times\mathbb{R}^{n-\lambda-1}.$$

Ud fra lemmaet kan vi konstruere en isotopi $F_t : M \to M$, så $F_0 = id$, $F_1(V^{\lambda-1}) \cap V^{n-\lambda} = S$, og så F_t er identiteten uden for ϕ's billede. På denne måde kan vi fjerne overskydende punkter i par, indtil vi opnår, at antallet af skæringer er lig snittallet.

For at definere F_t ser vi først på en isotopi $G_t : U \to U$, hvor U er omtalt i lemmaet. Da vi befinder os i planen, kan vi vælge en isotopi, så

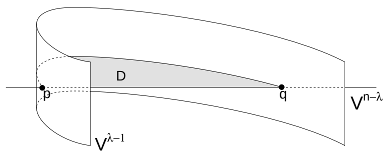
1) G_0 er identiteten på U;
2) G_t er identiteten i en omegn af randen $\overline{U} - U$, $0 \le t \le 1$;
3) $G_1(U \cap C_0) \cap C_0' = \emptyset$.

F.eks. kunne G_t se ud som på figur 16. Vi har brug for en afbildning

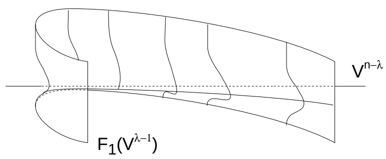
$$\rho : \mathbb{R}^{\lambda-2} \times \mathbb{R}^{n-\lambda-1} \to [0, 1],$$

som opfylder

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} 1 & , \|x\|^2 + \|y\|^2 \le 1 \\ 0 & , \|x\|^2 + \|y\|^2 \ge 2. \end{cases}$$



FIGUR 17. Skæring mellem $V^{\lambda-1}$ og $V^{n-\lambda}$ i p og q.



FIGUR 18. Resultat efter isotopi af $V^{\lambda-1}$.

Vi kan vælge en kontinuert afbildning, som opfylder det ønskede, og gøre den glat vha. sætning 9.7. Ud fra ρ kan vi definere en ny isotopi

$$H_t : U \times \mathbb{R}^{\lambda-2} \times \mathbb{R}^{n-\lambda-1} \to U \times \mathbb{R}^{\lambda-2} \times \mathbb{R}^{n-\lambda-1}$$

ved

$$(u, x, y) \mapsto (G_{t\rho(x,y)}(u), x, y).$$

Man ser, at H_t forskyder C_0 med fuld effekt omkring $U \times \{0\} \times \{0\}$, mens effekten aftager, desto længere væk man er fra denne del. Men så er F_t defineret som $\phi \circ H_t \circ \phi^{-1}$ på $\phi(U \times \mathbb{R}^{\lambda-2} \times \mathbb{R}^{n-\lambda-1})$ og identiteten på resten en isotopi, der opfylder det ønskede. Se figur 17 for en visualisering af isotopien, som fjerner to skæringspunkter. □

Det er værd at understrege en væsentlig ingrediens i beviset for sætning 6.23, nemlig at L er kontraktibel i $M - (V^{\lambda-1} \cup V^{n-\lambda})$. Det følger af, at $M-(V^{\lambda-1} \cup V^{n-\lambda})$ er enkeltsammenhængende. I første omgang gælder det, at $V^{n-\lambda}$ mindst har kodimension 3, eller at vi har forudsat $\pi_1(M - V^{n-\lambda}) = 0$. Da $V^{\lambda-1}$ mindst har kodimension 3, følger det ønskede. Derfor findes en disk i $M - (V^{\lambda-1} \cup V^{n-\lambda})$ med L som rand. Ifølge sætning 9.11 kan vi opfatte denne disk som indlejret. Det er eksistensen af denne disk, som muliggør indlejringen af omegnen $U \times \mathbb{R}^{\lambda-2} \times \mathbb{R}^{n-\lambda-1}$ omtalt i lemmaet. Vi ser altså, at det er dimensionsbegrænsningerne i 9.11, som giver begrænsningerne i sætningen.

Sætning 6.23 giver os mulighed for at udføre den modsatte operation til den 4. operation geometrisk. Det er indholdet af næste sætning, som afslutter afsnittet om hanke.

Sætning 6.25. *Lad M_λ være en matrix fra homologidata for en n-dimensionel kobordisme, $n \geq 6$, hvor W er enkeltsammenhængende, og V_0 er sammenhængende. Antag, at der om $\mathfrak{M}_\lambda$ gælder, at der om den j'te række og den i'te søjle gælder, at de har nuller pånær den fælles koefficient, som er lig ± 1. Hvis præsentationen er uden 1-hanke, og $\pi_1(V_0) = 1$, kan man fjerne* *de til rækken og søjlen hørende hanke uden at påvirke de øvrige snittal for* $3 \leq \lambda \leq n-3$.

Bevis. Først viser vi, at antallet af skæringer kan reduceres til snittallet. Hvis $\lambda \geq 4$, så er $\partial_+ W_{\lambda-1}$ enkeltsammenhængende, da W er enkeltsammenhængende, jf. korollar 6.14. Da kodimensionen af $\beta_j^{n-\lambda}$ er mindst 3 er $\pi_1(\partial_+ W_{\lambda-1} - \beta_j^{n-\lambda}) = 0$. Altså fortæller sætning 6.23, at man kan fjerne overskydende skæringspunkter. Man bemærker, at den isotopi, som benyttes til at fjerne overskydende skæringer, ikke behøver at have noget med de øvrige påsætningssfærer og transverse sfærer at gøre, da

$$\pi_1(\partial_+ W_{\lambda-1} - (\cup_i \alpha_i^{\lambda-1} \cup_j \beta_j^{n-\lambda})) = 0.$$

Hvis $\lambda = 3$, så er $\partial_+ W_2$ enkeltsammenhængende, men spørgsmålet er, om $\partial_+ W_2 - \beta^{n-3}$ er enkeltsammenhængende? Det sidste følger af, at $\partial_+ W_2$ fratrukket alle de transverse sfærer har $\partial_+ W_1$ fratrukket påsætningssfærerne for 2-hankene som deformationsretrakt. Da påsætningssfærerne har kodimension mindst 3, og der ikke er nogle 1-hanke, får vi, at

$$\pi_1(\partial_+ W_2 - \beta^{n-3}) = \pi_1(V_0) = 0.$$

Vi er nu i en situation, hvor en λ-hank og en $(\lambda-1)$-hank skærer hinanden transversalt i netop et punkt, mens de ikke har noget med andre λ- og $(\lambda-1)$-hanke at gøre. Det betyder, at vi kan fjerne de to hanke vha. sætning 6.17. $\square$

7. Formodningen i dimensioner større end 4

7.1. **h-kobordismesætningen.** Vi har i afsnit 6 etableret redskaberne til at vise Den generaliserede Poincaré formodning i 5 dimensioner og højere. Vi vil vise formodningen for glatte mangfoldigheder ved at vise den 6-dimensionelle h-kobordismesætning. Den blev vist første gang af John Milnor i 1963, se Milnor ([11]).

Sætning 7.1. *Lad $\mathcal{C} = (W; V_0, V_1)$ være en enkeltsammenhængende kompakt glat h-kobordisme af dimension $n \geq 6$. Så er $\mathcal{C}$ triviel dvs. at*

$$W \cong V_0 \times I.$$

Specielt er $V_0 \cong V_1$.

Bevis. Vi kan ifølge lemma 6.19 vælge en præsentation af $\mathcal{C}$ uden 0- og 1-hanke. Vi kan også fjerne $(n-1)$-og n-hanke vha. dualitet, jf. proposition 6.10. Til denne præsentation hører homologidata $\{C_i, \mathfrak{M}_i\}$. Vi vil gerne vise, at $\mathfrak{M}_i$ er triviel for alle i, da det svarer til, at h-kobordismen har en præsentation uden hanke. Vi viser det ved induktion. Induktionsstarten er klaret, da $\mathfrak{M}_1$ og $\mathfrak{M}_2$ er trivielle. Antag derfor, at $\mathfrak{M}_i$ er triviel for $i \leq \lambda$ for $2 \leq \lambda \leq n-3$. Se på $\mathfrak{M}_{\lambda+1}$. Af sætning 6.22 følger det, at vi kan antage, at $\mathfrak{M}_{\lambda+1}$ er diagonal. Da vi samtidig ved fra sætning 6.20, at

$$C_\lambda/\mathrm{Im}\ \partial_{\lambda+1} = \mathrm{Ker}\ \partial_\lambda/\mathrm{Im}\ \partial_{\lambda+1} = H_\lambda(W, V_0) = 0$$

må $C_\lambda = \mathrm{Im}\ \partial_{\lambda+1}$. Derfor er elementerne på diagonalen lig ± 1, da $\partial_{\lambda+1}$ ellers ikke er surjektiv.

For $\lambda \leq n-3$ gælder der derfor ifølge sætning 6.25, at vi kan fjerne λ-hankene uden at tilføje hanke for $j \leq \lambda$. Altså bliver $\mathfrak{M}_i$'erne trivielle for $3 \leq i \leq n-2$. Da de var trivielle for $i = 1, 2, n-1, n$ fra starten, følger det, at alle matricerne er trivielle. Altså har $(W; V_0, V_1)$ en præsentation uden hanke, men så er $W \cong W_{-1} = V_0 \times [0, 1]$. □

I beviset for formodningen får vi brug for Den generaliserede Schoenflies sætning, som vi vælger at citere fra Bredon ([1], s. 236).

Sætning 7.2. *Antag, at $f : S^{n-1} \times [-1, 1] \to S^n$ er en topologisk indlejring. Så er afslutningen på hver komponent af $S^n - f(S^{n-1} \times \{0\})$ homeomorf med D^n.*

Bemærkning 7.3. Det indgår i beviset, at $f(S^{n-1} \times \{0\})$ er lig randen på de to diske.

Sætning 7.4. *Lad M være en glat n-homotopisfære, $n \geq 5$. Da er M og S^n homeomorfe.*

Bevis. Da M er en homotopisfære følger det af konklusionen i afsnit 5.1, at $M\sharp(-M)$ er i samme h-kobordisme som S^n. Vi har altså en h-kobordisme $(W; M\sharp(-M), S^n)$. Anvend sætning 7.1 på $\mathcal{C} = (W; M\sharp(-M), S^n)$, så følger det, at $M\sharp(-M)$ er diffeomorf med S^n.

Lad $\mathbb{R}^n_p$ være et kort om et punkt p. Lad D betegne enhedskuglen i $\mathbb{R}^n_p$ med p som centrum og rand S. Vi kan antage, at vi har dannet $W = M\sharp(-M)$

ved at fjerne p og benyttet $\mathbb{R}^n_p$ som tubulær omegn.

Vi har altså en indlejring af S i W dvs. af S^{n-1} i en topologisk S^n. Denne indlejring kan udvides til en indlejring $f : S \times [0,1] \to W$, da den svarer til en indlejring af S i $\mathbb{R}^n - \{p\}$. Derfor kan vi benytte sætning 7.2, som giver, at afslutningen på hver af de to sammenhængskomponenter for $W - S$ er homeomorfe med en n-disk, dvs. at afslutningen af $M - D$ er en disk. Altså er M to diske, som vi klistrer sammen vha. en diffeomorfi langs deres rande S^{n-1}. Det betyder, at M er homeomorf med S^n. □

Hermed har vi bevist den generaliserede formodning for glatte mangfoldigheder. Beviset for kombinatoriske mangfoldigheder er flyttet til næste underafsnit om Smales arbejde, sætning 7.10. I det afsnit har vi også knyttet en kommentar til beviset for topologiske mangfoldigheder.

7.2. **Smales metode.** Den første til at bevise Den generaliserede Poincaré formodning for $n \geq 5$ var Smale i artiklen Smale ([20]). Vi har set på et bevis for formodningen for glatte mangfoldigheder, som ikke stammer fra Smale, men derimod stammer fra Milnor i Milnor ([11]). Der er en række fællestræk, som man vil bemærke af følgende oversigt over Smales bevis for formodningen.

Hovedsætningen i Smales artikel er hans Handlebody Theorem. Vi vil ikke se på beviset. Sætningens udsagn giver god mening, hvis man sammenholder med vores teori fra afsnit 6. Notationen er omtalt i afsnit 3.

Sætning 7.5. *(Handlebody Theorem) Lad $n \geq 2\lambda + 2$ og $n \geq 5$ for $\lambda = 1$. Antag, at $H \in \mathcal{H}(n,k,\lambda)$, $V = \chi(H; f_1, \ldots, f_r; \lambda + 1)$ og $\pi_\lambda(V) = 0$, $r \geq k$. Hvis $\lambda = 1$, så antag yderligere, at $\pi_1(\chi(H; f_1, \ldots, f_{r-k}; 2)) = 0$. Da er $V \in \mathcal{H}(n, r-k, \lambda+1)$.*

Vha. denne sætning og de resultater fra Morse teorien, som er vist i afsnit 3, viser Smale to sætninger.

Smale hævder, at den første sætning gælder for $(n,m) \neq (4,2)$, men da vi ikke har brug for tilfældet $(5,2)$, har jeg kun medtaget den nødvendige del af sætningen.

Sætning 7.6. *Lad M^n være en lukket $(m-1)$-sammenhængende glat mangfoldighed, hvor $n \geq 2m$ og $m \geq 3$. Så findes en pæn funktion $f : M \to \mathbb{R}$ med typenumre $c_0 = c_n = 1$ og $c_i = 0$ for $0 < i < m$, $n - m < i < n$.*

Ud fra vores kendskab til sammenhængen mellem typenumre og antallet af hanke kan man se, at sætningen gør det muligt at finde præsentationer for M uden hanke af bestemte indices. Den anden sætning er en reduceret udgave af h-kobordismesætningen.

Sætning 7.7. *Lad M_1 og M_2 være $(m-1)$-sammenhængende lukkede glatte $(2m+1)$-dimensionelle mangfoldigheder i samme h-kobordisme, $m \geq 2$. Så er M_1 og M_2 diffeomorfe.*

Vi er nu parate til at se, hvordan Smale viste formodningen for $n \geq 5$ for glatte mangfoldigheder. Sætningen svarer til sætning 7.4, så beviset er udelukkende medtaget af historisk interesse.

Sætning 7.8. *Lad M være en glat n-homotopisfære, $n \geq 5$. Da er M og S^n homeomorfe.*

Bevis. Antag først, at n er lige. Vælg m, så $n = 2m$ i sætning 7.6. Altså har vi en pæn funktion $f : M \to \mathbb{R}$ med $c_0 = c_n = 1$, $c_i = 0$ for $i \neq 0, \frac{n}{2}, n$, mens $c_{\frac{n}{2}}$ er ukendt. Ifølge korollar 4.21 er $\chi(M) = \sum(-1)^q c_q = 2 \pm c_{\frac{n}{2}}$, men da M er en homotopisfære med lige dimension, gælder det som tidligere bemærket, at $\chi(M) = 2$, dvs. at $M_{\frac{n}{2}} = 0$. Derfor er de eneste kritiske punkter for f på M et maksimum og et minimum, hvilket betyder, at M er homeomorf med S^n ifølge sætning 3.12.

Antag nu, at $n = 2m + 1 \geq 5$. I dette tilfælde ligner Smales bevis beviset for sætning 7.4. Han udnytter sætning 7.7 i stedet for sætning 7.1. $\square$

At Smales bevis for ulige n minder om vores, skal ses som et bud på, hvordan beviset i Smales artikel kan være tænkt. Smale tilkendegiver nemlig visse steder ikke sine argumenter explicit. Der er dog en mulig forskel, idet han har en kommentar om, at han først viser, at homotopisfæren minus et punkt er diffeomorf med $\mathbb{R}^{2m+1}$. Det tyder på, at han har benyttet sig af begrebet uendelige sammenhængende summer, som Milnor benytter i Milnor ([13]). En grund, til at han muligvis har benyttet dette begreb, kan være, at vores udgave af Den generaliserede Schoenflies sætning er en smule kraftigere end det tilsvarende resultat af Mazur, som Smale benytter.

Bemærkning 7.9. For at bevise formodningen for kombinatorisk mangfoldigheder bruger Smale et resultat af Munkres. I sin artikel Munkres ([15]) redegører James Munkres for, hvornår en kombinatorisk mangfoldighed kan udstyres med en differentiabel struktur. Resultatet betyder, at en kontraktibel kombinatorisk mangfoldighed kan udstyres med en differentiabel struktur.

Sætning 7.10. *Lad M være en kombinatorisk n-homotopisfære, $n \geq 5$. Så er M^n homeomorf med S^n.*

Bevis. Se på $M - D$, hvor D er en topologisk indlejret disk med centrum p og rand S. Det følger af lemma 4.17, at $M - D$ er en kontraktibel mangfoldighed. Tilsvarende er $M' = M - \{p\}$ kontraktibel. Derfor kan M' udstyres med en differentiabel struktur, jf. bemærkning 7.9.

Nu kan vi danne den sammenhængende sum $W = M\sharp(-M)$ via en tubulær omegn om p, som indeholder D, fordi vi i konstruktionen kan ignorere, hvorvidt den differentiable struktur findes i det punkt, som vi fjerner. Som i beviset for sætning 7.4 følger det, at W er diffeomorf med S^n. Konklusionen bliver derfor den samme, at afslutningen af $M - D$ er en disk, dvs.

$$M = \overline{M - D} \cup D \cong_{Top} D^n \cup D^n \cong_{Top} S^n.$$

$\square$

En afsluttende kommentar er, at Newman i en artikel ([17]) fra 1966 viste den topologiske udgave af formodningen. Beviset bygger på en videreudvikling af metoden benyttet af Stallings og Zeeman for kombinatoriske mangfoldigheder.

8. Den 4-dimensionelle formodning

Smales bevis for Den generaliserede Poincaré formodning gælder kun for dimensioner større end 4. Der gik endnu 20 år, før beviset for formodningen i 4 dimensioner så dagens lys. Freedman beviste i sin artikel ([3]) en klassifikationssætning for enkeltsammenhængende 4-dimensionelle mangfoldigheder. Denne enorme sætning vil vi ikke komme nærmere ind på, men undervejs i artiklen beviste han en 5-dimensionel topologisk udgave af den kompakte h-kobordisme sætning, hvilket er præcist det, vi har brug for i forbindelse med Poincaré formodningen. Man skal være opmærksom på, at der er to dimensioner i spil i dette afsnit. Den 4-dimensionelle Poincaré formodning løses vha. den 5-dimensionelle h-kobordismesætning.

Sætning 8.1. *Lad $(W; V, V')$ være en glat enkeltsammenhængende kompakt 5-dimensionel h-kobordisme. Så er $W \cong_{Top} V \times [0,1]$.*

Vi vil kommentere beviset for denne sætning lidt senere. Først vil vi benytte den til at vise Den generaliserede Poincaré formodning i 4 dimensioner.

Sætning 8.2. *Lad M være en 4-dimensionel kombinatorisk homotopisfære. Så er M homeomorf med S^4.*

Bevis. Som nævnt i afsnit 9 kan alle kombinatoriske 4-mangfoldigheder gives en differentiabel struktur. Derfor kan vi antage, at M er en glat mangfoldighed. Lad $\mathbb{R}^n_p$ være et kort om et punkt p. Lad S betegne enhedssfæren i $\mathbb{R}^n_p$ med p som centrum. Hvis vi danner $W = M\sharp(-M)$ ved at fjerne p og benytter $\mathbb{R}^n_p$ som tubulær omegn, opnår vi en indlejring af S i W.

Ifølge lemma 5.25 er W h-kobordent med S^4. Altså er W en topologisk sfære, jf. sætning 8.1. Vi har altså en indlejring af S i W, dvs. af S^{n-1} i en topologisk S^n. Denne indlejring kan derfor udvides til en indlejring $f : S \times [0,1] \to W$, da den svarer til en indlejring af S ind i $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Nu giver sætning 7.2 os, at afslutningen af hver af de to sammenhængskomponenter af $W - f(S \times \{0\})$ er en n-disk. Men den ene af disse sammenhængskomponenter er $M - D$, så

$$M = \overline{(M-D)} \cup D \cong_{Top} D^4 \cup D^4 \cong_{Top} S^4.$$

□

Man kan vha. Freedmans klassifikationssætning også bevise den topologiske udgave af formodning, se Freedman ([3], s. 371).

Vi vil nu se nærmere på Freedmans bevis for sætning 8.1. Beviset kan findes på side 439 i Freedmans artikel. Beviset er meget teknisk og kræver indførelse af en lang række begreber, som man ikke har behov for i de højere dimensioner. Ideen med resten af dette afsnit er derfor ikke at gengive Freedmans bevis, men at give en løs bevisskitse i et specialtilfælde som illustrerer hovedideerne.

I det 5-dimensionelle tilfælde er problemet, at man ikke umiddelbart kan indlejre den Whitney disk, som benyttes i sætning 6.23. Disken svarer til en nulhomotopi, som man via sætning 9.11 kan antage er indlejret. Dimensionsbetingelserne i sætningen betyder, at vi er nødt til at finde en anden måde at tilvejebringe en indlejret nulhomotopi på. Inden vi overvejer, hvordan vi kan indlejre denne disk, er vi imidlertid nødt til at overveje eksistensen af disken. Eksistensen af en nulhomotopi kan sikres, hvis det omkringliggende rum er enkeltsammenhængende.

Derfor skal vi bruge et lemma, der giver os mulighed for at flytte to indlejrede sfærer i en 4-dimensionel mangfoldighed, så komplementærmængden bliver enkeltsammenhængende. Inden det lemma ser vi på et teknisk lemma fra gruppeteorien.

Lemma 8.3. *Lad G være en perfekt gruppe, dvs. at G er lig sin kommutatorundergruppe $[G, G]$. Antag, at $G =< a_i >=< b_j >$, hvor $(a_i) = A$ og $(b_j) = B$ er to familier af elementer, hvor $a_i^{-1} \in A, b_j^{-1} \in B$, og antag yderligere, at $g[a_i, b_j]g^{-1} = [a_{i'}, b_{j'}]$. Da er $G =< [a_i, b_j] >$.*

Bevis. Man bemærker, at der altid gælder, at

$$g_i g_j = g_j g_i [g_i^{-1}, g_j^{-1}] = [g_i, g_j] g_j g_i. \tag{8.1}$$

Af antagelserne følger det , at

$$g[a_i, b_j] = [a_{i'}, b_{j'}]g. \tag{8.2}$$

Et element i $[G, G]$ kan skrives vha. elementer på formen

$$[\prod a_i, \prod b_j] = \prod_{i=i_0}^{i_a} a_i \prod_{j=j_0}^{j_b} b_j (\prod_{i=i_0}^{i_a} a_i)^{-1} (\prod_{j=j_0}^{j_b} b_j)^{-1}.$$

I dette produkt kan man flytte a_i'erne mod højre, indtil de støder på et $a_{i_{i+1}}$ eller $a_{i_a}^{-1}$. Dette kan man gøre vha. (8.1). Hver flytning producerer en kommutator, som kan flyttes til venstre vha. (8.2). Det giver os, at

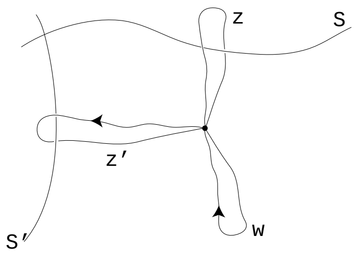
$$[\prod a_i, \prod b_j] = \prod [a_{i'}, b_{j'}] \prod b_j \prod a_i (\prod a_i)^{-1} (\prod b_j)^{-1} = \prod [a_{i'}, b_{j'}].$$

□

For en enkeltsammenhængende mangfoldighed, M, som opfylder Poincaré dualitet, se sætning 4.13, er den eneste ukendte homologigruppe $H_2(M)$. Derfor er H_2 og H^2 af afgørende betydning for en beskrivelse af mangfoldigheden. Vi skal kun ridse overfladen af dette studie. Et element i $H_2(M)$ kan repræsenteres af en indlejret orienteret flade, hvis M er lukket og orienteret, se Kirby ([7], s. 20). Man kan definere et produkt på elementer i H_2, som for to sfærer svarer til snittet defineret i afsnit 6.3. Dette produkt skriver vi $\alpha \cdot \beta$ for $\alpha, \beta \in H_2(M)$.

Lemma 8.4. *Lad N være en enkeltsammenhængende 4-mangfoldighed uden rand. Lad S, S' være indlejrede 2-sfærer med trivielle tubulære omegne, så $S \cdot S' = 1$. Antag, at $N - S$ og $N - S'$ begge er enkeltsammenhængende. Da findes en isotopi af S', så $\pi_1(N - (S \cup S')) = 0$.*

Bevis. Vi benytter to udsagn, som er anført hos Guillou og Marin ([4], s. 206):



FIGUR 19. De to meridianer og en løkke.

(1) $G = \pi_1(N - (S \cup S'))$ er frembragt af de konjugerede til en meridian z for S, da $N - S'$ er enkeltsammenhængende. Tilsvarende er G frembragt af meridianen z' for S'.

(2) $H_1(N - (S \cup S')) = 0$, fordi $S \cdot S' = 1$ betyder, at z er nulhomolog i $N - (S \cup S')$.

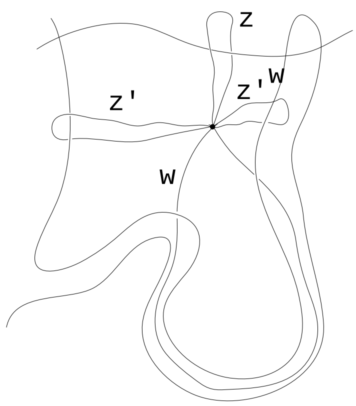
I forbindelse med det første udsagn skal det nævnes, hvad der forstås ved en meridian. Vi kan opfatte en afsluttet tubulær omegn omkring S over $p \in S$ som $\{p\} \times D^2$. Altså vil $\{p\} \times \partial D^2$ være en cirkel. Denne kaldes meridianen for p. Meridianen omtalt i 1) er meridianen for et $p \in S$ så $p \notin S'$, se evt. figur 19. Af 2) følger det, at G er perfekt, da H_1 er abeliseringen af π_1, jf. Hatcher ([5], s. 166). Derfor viser lemma 8.3, at G er frembragt af elementer på formen $[z^u, z'^v]$, hvor z, z' evt. udbyttes med deres inverser. Altså er

$$z = \prod [z^{u_i}, z'^{v_i}] = \prod [z, z'^{w_i}]^{u_i},$$

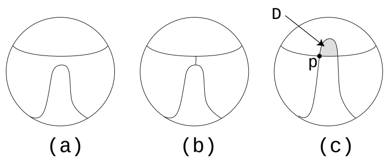
fordi $g[z^u, z'^v]g^{-1} = [z^{gu}, z'^{gv}]$ betyder, at $[z, z'^{w_i}]^{u_i} = [z^{u_i}, z'^{u_i w_i}]$. Derfor bliver en ny fundamentalgruppe den trivielle gruppe, hvis vi kan få $[z, z'^{w_i}]$ til at forsvinde. Det vi ønsker er en isotopi af S', så z og z'^{w_i} kommuterer i den nye fundamentalgruppe, da en isotopi af en påsætningssfære ikke ændrer på hankelegemet, jf. lemma 6.5. Metoden til at gøre dette kaldes en anti-Whitney proces eller et fingermove.

Situationen ser ud som på figur 19. Vi har to sfærer S, S' og en repræsentant fra $\pi_1(N - (S \cup S'))$ for hver af de to meridianer z og z', samt en repræsentant for $[w] \in \pi_1(N - (S \cup S'))$. Hvis man begynder en kurve i et punkt på meridianen for S' svarende til z' og følger z' til basispunktet, derefter w og til slut z, får man en kurve fra S' til S, som ikke berører S' og S. Da kurven har en tubulær omegn, som heller ikke rører sfærerne, kan vi i denne omegn føre en finger af S' over på S, se figur 20. Som antydet på figuren skal fingerspidsen krydse S. Man bemærker, at det konjugerede element $z'^{w^{-1}}$ kan repræsenteres ved en løkke i nærheden af der, hvor fingeren sættes på S.

Hvad gør isotopien ved fundamentalgruppen? Der, hvor der sker noget, er i området, hvor de to nye skæringspunkter opstår. Figur 21 viser dette område i tre situationer, hvor fundamentalgruppen ikke ændres. Komplementærmængden til sfærerne på figur 21.a har samme π_1 som de oprindelige sfærer.



FIGUR 20. En finger af S' rører S.



FIGUR 21. Tre figurer, der illustrerer isotopien.

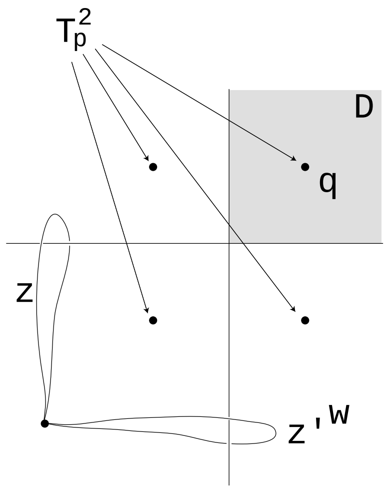
Da π_1 er upåvirket af en tilføjelse af kodimension-3-delmangfoldigheder, sker der ikke noget med π_1 mellem figur a) og b). På figur c) har vi placeret en disk, D, på fingerspidsen, men disken betyder, at fundamentalgruppen for komplementærmængden på figur c) er den samme som for komplementærmængden på figur b). De to figurers komplementærmængder er homeomorfe. Forskellen mellem fundamentalgrupperne før og efter isotopien svarer altså til resultatet af, at man fjerner disken D på figur 21.c, dvs. at man tilføjer D til komplementærmængden.

Lokalt i punktet p svarer foreningen af de to sfærer til en transversal skæring af to planer, $\mathbb{R}^2_{x,y}$ og $\mathbb{R}^2_{z,w}$. Der findes derfor en torus, kaldet den karakteristiske torus, omkring punktet med lokale koordinater

$$T^2_p = \left\{(x, y, z, w) \mid x^2 + y^2 = 1 = z^2 + w^2\right\}.$$

Den karakteristiske torus kan ses på figur 22. Vi kan opfatte z og z'^w som elementer i $\pi_1(T^2)$. Disken D skærer T^2 i et punkt q, derfor kan man tænke på kommutatoren af z og z'^w som kommutatoren, når de opfattes som elementer i en punkteret torus. Når D fjernes, dvs. tilføjes til komplementærmængden, tilføjes punktet q til torusen. Da en torus har abelsk fundamentalgruppe, forsvinder $[z, z'^w]$, hvilket var det vi ønskede. $\square$

Som tidligere lovet vil vi se på Freedmans bevis for sætning 8.1. Derfor gentager vi sætningen.



FIGUR 22. Den karakteristiske torus.

Sætning 8.5. *Lad* $(W; V, V')$ *være en glat enkeltsammenhængende kompakt 5-dimensionel h-kobordisme. Så er* $W \cong_{Top} V \times [0,1]$.

Bevis. (Skitse) Da W er en sammenhængende mangfoldighed med rand, har vi ifølge sætning 6.18, at

$$W \cong V \times [0,1] + \cup H^1 + \cup H^2 + \cup H^3 + \cup H^4.$$

Det følger af sætning 6.19, at vi også kan fjerne 1- og 4-hankene. Altså er

$$W \cong V \times [0,1] + H^2 + H^3.$$

Sætning 4.20 om Euler karakteristik giver os yderligere, at $\nu_2 = \nu_3$, dvs. at vi har samme antal 2- og 3-hanke. Lad os benytte notationen

$$M = \partial_+ W_2 = \partial(V \times [0,1] + \cup H^2).$$

Det er denne delmangfoldighed, som indeholder de transverse sfærer for 2-hankene og påsætningssfærerne for 3-hankene. De to ingredienser som afgør, hvordan mangfoldigheden ser ud.

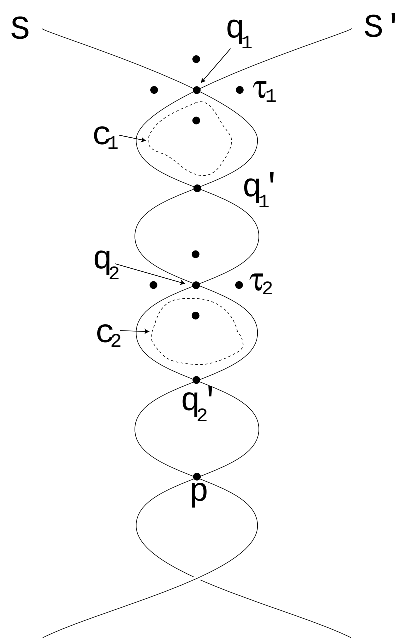
Antag for et øjeblik, at der kun er en 2-hank. I det tilfælde er

$$M = (V \times \{1\} - (S^1 \times D^3)) \cup (D^2 \times S^2).$$

Hvis man fjerner den transverse sfære, ser man, at $M - (\{0\} \times S^2)$ har $V \times \{1\} - (S^1 \times D^3)$ som deformationsretrakt, dvs. at $M - (\{0\} \times S^2)$ er homotopiækvivalent med $V - S^1$. Da S^1 har kodimension 3 i V, gælder det, at $\pi_1(V - S^1) = \pi_1(V) = 0$. Tilfældet med mere end en 2-hank løses tilsvarende, da 2-hankene kan antages at være påsat disjunkt. Hvis vi betegner de transverse sfærer med a_i, viser argumentet, at

$$\pi_1(M - \cup a_i) \cong \pi_1(V - \cup S_i^1) \cong \pi_1(V) = 0.$$

Ved en tilsvarende betragtning får man, at $\pi_1(M - \cup d_i) = \pi_1(V') = 0$, hvor d_i er de opstigende sfærer, dvs. påsætningssfærerne for 3-hankene. De



FIGUR 23. Skæringspunkter,cirkler og karakteristiske tori.

to delmangfoldigheder $\cup d_i$ og $\cup a_i$ opfylder det, som Freedman kalder π_1-negligerbarhed.

Den eneste ikke-trivielle snitmatrice er $\mathfrak{M}_3$. Hankene kan ifølge sætning 6.22 ændres, så matricen kommer på diagonalform. Da der kun er 2- og 3-hanke, repræsenterer matricen en bijektiv afbildning, altså svarer $\mathfrak{M}_3$ til enhedsmatricen, hvis vi vælger orienteringerne på hankene passende. Selvom der efter rækkeoperationerne på matricen ikke er tale om de samme hanke, tillader vi os at misbruge notationen a_i og d_i. Vi har stadig, at $\cup a_i$ og $\cup d_j$ er π_1-negligerbare.

Vi vil i resten af skitsen antage, at der kun er tale om en 2-hank og en 3-hank. Vi har altså en transvers sfære S og en påsætningssfære S' begge indlejrede med trivielle diskbundter. Som tidligere nævnt i skitsen er både $\pi_1(M-S) = 0$ og $\pi_1(M-S') = 0$. Vi har arrangeret det, således at $S \cdot S' = 1$, da $\mathfrak{M}_3 = I$. Ifølge korollar 6.14 er M enkeltsammenhængende, altså kan vi benytte lemma 8.4. Lemmaet giver os en isotopi, så $\pi_1(N - (S \cup S')) = 0$, hvor vi også lader S' betegne resultatet af flytningen.

For et skæringspunkt, p, mellem S og S' kan vi ensrette $\{p\} \times D^2$ med $S^2 \times \{0\}$ i en omegn af p og omvendt vha. korollar 9.24. Det, vi har, er en plumbing af to trivielle diskbundter over S^2, se Bredon ([1], s. 426). Det er ikke centralt at vide mere om plumbings, lad os blot indføre notationen $X = S \times D^2 \cup S' \times D'^2$ for denne plumbing. Da $S \cdot S' = 1$ har vi et ulige antal skæringer $\{p, q_1, q_1', \ldots, q_k'\}$, hvor q_i og q_i' har modsatte fortegn, se figur 23. Teknisk set bør man arbejde med punkter på randen af X, som svarer til skæringspunkterne. Da vi i forvejen har set bort fra det meste teknik, vælger vi også at se bort fra denne detalje, se evt. Kirby ([7], s. 76).

Ved at forbinde punkterne med kurver kan vi få k cirkler, $C_1, \dots, C_k$, svarende til cirklen, der omkranser D i bevisskitsen for sætning 6.23. Lad os nu opfatte $C_1, \dots, C_k$ som cirkler på randen af X, og lad os studere $W = M - (X)^\circ$. Da $M - (S \cup S')$ er enkeltsammenhængende, er W det også. Vi kan derfor vælge en nulhomotopi, D_1, for C_1. Denne kan vælges som en immersion af D^2 ifølge Hirsch ([6], s. 53). Det afgørende i den sammenhæng er, at 2 dim $D^2 \leq$ dim W.

Vi har altså en immersion af D_1. Spørgsmålet er nu, om $W - D_1$ er enkeltsammenhængende. Det kan man ikke være sikker på. Andrew Casson fandt imidlertid på metoden fingermoves i beviset for lemma 8.4. En metode svarende til den i beviset, hvor man i stedet for at benytte en isotopi til at skabe skæringer med, benytter en regulær homotopi til at skabe selvskæringer med. Det er indholdet af næste lemma, som er taget fra Guillou og Marin ([4], s. 204).

Lemma 8.6. *Lad W være en enkeltsammenhængende 4-mangfoldighed og $f : D^2 \to W$ være en normal immersion. Antag, at der findes $\beta \in H_2(W)$, så $f \cdot \beta = 1$. Da er f regulært homotop rel S^1 med en normal immersion $g : D^2 \to W$, så $W - g(D^2)$ er enkeltsammenhængende.*

Der indgår nogle begreber og en enkelt forudsætning, som fortjener en kommentar. En regulær homotopi er en homotopi (f_t), hvor f_t er en immersion for alle t. En immersion $f : D^2 \to W$ kaldes normal, hvis den skærer ∂W transversalt i $f(S^1)$, og alle selvskæringer er transversale dobbeltpunkter i det indre af W. Det sidste er eksistensen af β. Hvis vi for et øjeblik opfatter D_1 som en disk i M og mindes, hvordan der omkring en transversal skæring, q_1, mellem to planer findes en karakteristisk torus. Denne karakteristiske torus repræsenterer et element $\tau_1 \in H_2(M)$, og D_1 kan vælges så $\tau_1 \cdot D_1 = 1$. Da τ_1 er indeholdt i W, bliver $\tau_1 \in H_2(W)$ det ønskede β.

Ovenstående betyder, at vi kan ændre D_1 via en regulær homotopi. Vi misbruger som så ofte før notationen og kalder resultatet for D_1. Altså er $W - D_1$ enkeltsammenhængende, dvs. at C_2 er nulhomotop. Ovenstående procedure giver os muligheden for at danne afbildninger $f_1, \dots, f_k : D^2 \to W$, så $f_i \mid_{S^1} = C_i$ er en indlejring ind i ∂W. Det giver mulighed for at benytte følgende sætning af Casson, som vi citerer fra Guillou og Marin ([4], s. 202).

Sætning 8.7. *Lad W være en enkeltsammenhængende 4-mangfoldighed. Lad $f_1, \dots, f_k : D^2 \to W$ være afbildninger, så $f_i \mid_{S^1}$ er en indlejring ind i ∂W og $f_i(S^1) \cap f_j(S^1) = \emptyset$ for $i \neq j$. Antag, at alle snittal $f_i \cdot f_j$ er nul. Antag, at der findes $\beta_i \in H_2(W)$, så $f_i \cdot \beta_j = \delta_{ij}$, og så $\beta_j \cdot \beta_j$ er lige. I den situation findes åbne mængder $V_1, \dots, V_n$ i W, så:*

(1) *$(V_i, V_i \cap \partial W)$ har samme homotopitype som $(D^2 \times \mathbb{R}^2, S^1 \times \mathbb{R}^2)$;*

(2) *$V_i \cap \partial W$ er en åben tubulær omegn for $f_i(S^1)$ i ∂W;*

(3) *f_i er homotop rel S^1 med en afbildning ind i V_i.*

Som β_i i sætningen kan vi benytte τ_i, hvilket betyder, at betingelserne i sætningen er opfyldte. Udsagnet 1) ansporer indholdet af den næste sætning, som er den centrale sætning i Freedmans artikel ([3]) fra 1982. Inden sætningen skal det nævnes, at V_i'erne omtalt i sætning 8.7 kaldes fleksible hanke eller Casson hanke. Freedmans sætning ([3], s. 361) lyder:

Sætning 8.8. *Enhver Casson hank er som par homeomorf med den åbne standardhank $(D^2 \times \mathbb{R}^2, S^1 \times \mathbb{R}^2)$.*

Sætningen giver os eksistensen af en topologisk Whitney disk, som muliggør en topologisk isotopi svarende til isotopien i sætning 6.23. Altså ender vi med en kobordisme

$$W \cong_{Top} V \times [0,1] + H^2 + H^3,$$

hvor H^2 og H^3 skærer hinanden transversalt i netop et punkt. En topologisk udgave af sætning 6.17 giver derfor, at

$$W \cong_{Top} V \times [0,1].$$

□

En mulig grund, til at det tog så mange år at vise denne sætning, kan være, at man forsøgte at vise en glat udgave. Umiddelbart efter Freedmans bevis i 1982, viste Simon Donaldson en sætning, der som korollar har et modeksempel til den glatte 5-dimensionelle h-kobordismesætning, se Kirby ([7], s. 32).

9. Nyttige begreber

Grundlæggende for hele specialet er begreberne topologisk mangfoldighed, differentiabel mangfoldighed og kombinatorisk mangfoldighed. De præcise definitioner på topologisk og differentiabel mangfoldighed kan findes i de fleste bøger om differential topologi f.eks. Bröcker og Jänich ([2]). Derfor vil vi nøjes med skrabede definitioner af de to første begreber. Definitionen af en kombinatorisk mangfoldighed er mindre tilgængelig i standard litteraturen, så den vil vi uddybe.

Definition 9.1. Et 2.tælleligt Hausdorff rum, som er lokalt euklidisk, kaldes for en topologisk mangfoldighed. Hvis dimensionen er relevant taler man om en topologisk n-mangfoldighed, hvor n er dimensionen af det euklidiske rum. Vi benytter nogle gange notationen M^n for at antyde dimensionen.

Der findes også mangfoldigheder med rand. De adskiller sig ved, at lokalt euklidisk i definitionen skiftes ud med lokalt homeomorf med en åben delmængde af halvplanen $H^n = \mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty[$. Begge typer af mangfoldigheder kan være kompakte, når de opfattes som topologiske rum. Ved en lukket mangfoldighed forstår vi en kompakt mangfoldighed uden rand. Vi vil benytte betegnelsen mangfoldighed både om en mangfoldighed uden rand og om en generel mangfoldighed, når det ikke er væsentligt, hvorvidt den har rand eller ej.

Definition 9.2. En topogisk mangfoldighed med en differentiabel struktur kaldes en glat eller C^∞-mangfoldighed.

Den sidste type af mangfoldigheder, som bliver aktuel, er de kombinatoriske. Definitionen er en del længere end de foregående. Dette er på ingen måde udtryk for de forskellige mangfoldighedstypers rolle i dette speciale. Alt praktisk arbejde vil nemlig foregå enten med glatte eller topologiske mangfoldigheder. De kombinatoriske mangfoldigheder er udelukkende medtaget, fordi Poincaré oprindeligt formulerede sin formodning for denne type af mangfoldigheder. Det kan derfor fint lade sig gøre at springe over denne definition og vende tilbage, hvis man senere skulle få lyst til det.

Først er vi nødt til at definere, hvad vi mener med en triangulering. Den næste definition er en sammenfatning fra Thurston ([22], s. 119). Definitionen forudsætter kendskab til begrebet et simpleks. Med lokalt endeligt menes, at ethvert punkt kun er indeholdt i endeligt mange simplekser.

Definition 9.3. Et simplicielt kompleks er en lokalt endelig samling af simplekser, Σ, der opfylder to betingelser:

1) Ethvert delsimpleks af et simpleks i Σ ligger selv i Σ.
2) Fællesmængden af to simplekser er enten tom eller et delsimpleks af dem begge.

Foreningen af simplekserne i Σ kaldes Σ's polyeder og betegnes $\mid \Sigma \mid$. Vi siger, at et topologisk rum, X, kan trianguleres, hvis der findes et simplicielt kompleks Σ, samt en homeomorfi fra $\mid \Sigma \mid$ til X. En afbildning mellem triangulerede rum kaldes simpliciel, hvis den respekterer trianguleringerne.

De kombinatoriske mangfoldigheder er mangfoldigheder med en speciel triangulering kaldet kombinatorisk triangulering. En kombinatorisk mangfoldighed kaldes også en stykkevis lineær mangfoldighed. Da definitionen ikke er så væsentlig for os, vil vi nøjes med at anskueliggøre den ved at citere næste proposition fra Thurston ([22], s. 191). I propositionen benyttes begrebet et link for et simpleks. Hvis $\sigma \in \Sigma$ er et simpleks, og $\tau_1, \ldots, \tau_k$ er de simplekser, som indeholder σ, så findes i hvert τ_i et simpleks modsat σ, dvs. så $\sigma \cap \sigma_i = \emptyset$ og $\sigma \cup \sigma_i$ udspænder τ_i. Linket for σ er lig det simplicielle kompleks $\{\sigma_i\}$.

Proposition 9.4. *Et simplicielt kompleks er en stykkevis lineær mangfoldighed, hvis og kun hvis linket for hvert simpleks er ækvivalent med den stykkevis lineære sfære.*

Den omtalte ækvivalens i propositionen indebærer, at objekterne er homeomorfe via en homeomorfi, som er restriktionen af en simpliciel afbildning.

Der gælder nogle resultater om de tre typer mangfoldigheders indbyrdes relationer, som vi kort vil nævne. Man kan vise, at alle differentiable mangfoldigheder kan trianguleres kombinatorisk, se Thurston ([22], s. 194). For en, to og tre dimensioner gælder det, at de tre typer mangfoldigheder er sammenfaldende, se Saveliev ([19], s. 83). Nicolai Saveliev nævner samme sted, at alle kombinatoriske 4-mangfoldigheder kan gives en differentiabel struktur. I fire dimensioner bliver der forskel på de tre kategorier. Freedman har et eksempel på en ikke-triangulerbar 4-mangfoldighed, jf. Freedman ([3], s. 374).

For at have en ramme omkring de tre typer mangfoldigheder kan vi opfatte dem som tilhørende tre kategorier. Vi kalder kategorien af topologiske mangfoldigheder med kontinuerte afbildninger som morfier for **Top**, vi benævner kategorien af kombinatoriske mangfoldigheder med stykkevis lineære kontinuerte afbildninger som morfier med **PL**, og vi benævner kategorien af glatte mangfoldigheder med glatte afbildninger som morfier med **Diff**. Hvis to topologiske mangfoldigheder er homeomorfe, vil vi derfor benytte notationen $\cong_{Top}$, og hvis to glatte mangfoldigheder er diffeomorfe, vil vi benytte notationen $\cong_{Diff}$. Ud fra de nævnte resultater får man følgende diagram

$$\mathbf{Diff} \to \mathbf{PL} \to \mathbf{Top},$$

hvor en pil betyder, at en mangfoldighed via en pil kan opfattes som tilhørende den kategori, som pilen fører over i. Som nævnt er der pile den modsatte vej i visse dimensioner.

Som det bemærkes af Bredon ([1], s. 246) er en trianguleret mangfoldighed specielt et CW-kompleks. Derfor kan vi benytte resultater fra algebraisk topologi vedr. CW-komplekser til vores arbejde med kombinatorisk og differentiable mangfoldigheder. For en omtale af CW-komplekser, se Hatcher ([5], s. 5)

I den anledning har vi brug for to definitioner, som knytter sig til homotopien af en mangfoldighed. Vi har også brug for begreberne homologi og kohomologi. Vi vil nøjes med følgende korte kommentar om deres væsen. De resultater, som vi har brug for, om homologi og homotopi kan ses i afsnit 4.1.

Begreberne dækker over, at vi til et topologisk rum, X, knytter en gruppe, f.eks. $\pi_1(X)$, på en sådan måde, at to homeomorfe rum får tilknyttet to isomorfe grupper. Den i'te homotopigruppe for X noteres $\pi_i(X)$. Man kalder også den 1. homotopigruppe for fundamentalgruppen. Den i'te homologigruppe noteres $H_i(X)$, og den i'te kohomologigruppe noteres $H^i(X)$. For et delrum $A \subset X$ kan man også danne relative grupper $\pi_i(X, A), H_i(X, A)$ og $H^i(X, A)$.

Et element $[\gamma] \in \pi_i(X)$ kan repræsenteres af en afbildning $\gamma : S^i \to X$. To homotope afbildninger giver anledning til samme element. Det er nyttigt at bemærke, at en afbildning derfor repræsenterer neutralelementet, hvis den er nulhomotop, og at en nulhomotopi svarer til en afbildning $\overline{\beta} : D^{i+1} \to X$. Grupperne π_i, $i \geq 2$ og H_i er alle abelske.

Definition 9.5. Vi kalder en sammenhængende mangfoldighed med triviel fundamentalgruppe for enkeltsammenhængende.

Definition 9.6. Vi kalder et par (X, A) for n-sammenhængende, hvis enhver afbildning $(D^r, S^{r-1}) \to (X, A)$ for $0 \leq r \leq n$ er homotop rel S^{r-1} med en afbildning ind i A, dvs. at alle X's sammenhængskomponenter rører ved A, samt at $\pi_r(X, A, a) = 0$ for $a \in A$ og $1 \leq r \leq n$. Vi kalder en mangfoldighed for n-sammenhængende, hvis $(X, \{x\})$ er n-sammenhængende.

Man bemærker, at 0-sammenhængende svarer til sammenhængende, og at 1-sammenhængende svarer til enkeltsammenhængende. Vi benytter begrebet homotop rel A, hvis restriktionen til en delmængde A af en homotopi eller lignende er uafhængig af t. Resten af dette kapitel handler om begreber og resultater fra differentialtopologien.

Det er et grundlæggende resultat, at afbildninger kan approximeres med glatte afbildninger.

Sætning 9.7. *Lad $f : M \to \mathbb{R}^n$ være en kontinuert afbildning, som er glat på en afsluttet delmængde $K \subset M$ og $\epsilon > 0$. Da findes en glat afbildning $g : M \to \mathbb{R}^n$, så $f\,|_K = g\,|_K$ og $|\, f(p) - g(p)\,| < \epsilon$.*

Denne sætning har som korollar.

Korollar 9.8. *Hvis M er en sammenhængende mangfoldighed, så kan to punkter $p, q \in M$ forbindes via en glat kurve.*

Vi får brug for at kunne tale om specielle typer af glatte afbildninger. Vi minder om følgende definition.

Definition 9.9. Lad $f : M \to N$ være en glat afbildning. Vi kalder f en immersion, hvis Df er injektiv og en submersion, hvis Df er surjektiv. En topologisk indlejring er en afbildning, som er en homeomorfi på sit billede. Vi siger, at f er en indlejring, hvis den er en immersion og en topologisk indlejring. Vi kalder $M \subset N$ for en delmangfoldighed, hvis inklusionen er en indlejring.

En topologisk isotopi mellem to topologiske indlejringer er en homotopi (f_t), hvor f_t til alle tider er en topologisk indlejring. Den glatte version er indholdet af næste definition.

Definition 9.10. Lad $f, g : M \to N$ være to indlejringer. En isotopi mellem f og g er en glat afbildning $F : M \times I \to N$, så

a) $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) = g(x)$;
b) $F_t : M \times \{t\} \to N$ er en indlejring for alle t.

En diffeotopi af en mangfoldighed N er en glat afbildning $H : N \times I \to N$, så $H_0 = id_N$, og $H_t : N \to N$ er en diffeomorfi for alle t.

Vi har brug for endnu en sætning om approximation, som vi citerer fra Kosinski ([8], s. 33).

Sætning 9.11. *Lad $f : M \to N$ være en glat afbildning, som er en indlejring på en afsluttet delmængde $K \subset M$. Hvis* $\dim N \geq 2 \dim M + 1$*, da findes en indlejring $g : M \to N$, som approximerer f, og så $f|_K = g|_K$.*

Man er strengt taget nødt til at præcisere, hvad der menes med at approximere, når der er tale om to mangfoldigheder. Det kan lade sig gøre og på en sådan måde, at den approximerende afbildning kan vælges homotop med den oprindelig, se f.eks. Kosinski ([8], s. 47).

En meget teknisk sætning af Hassler Whitney, som vi citerer via Kosinski ([8], s. 36), er følgende. Man bemærker, at denne sætning og den foregående begge har dimensionsbegrænsninger. Det er disse begrænsninger, som gør, at Smales bevis for Poincaré formodningen for $n \geq 5$ ikke kan bruges for $n = 3, 4$.

Sætning 9.12. *Lad $f, g : M^m \to N^n$ være to homotope indlejringer af en kompakt glat mangfoldighed M^m. Hvis $n \geq 2m + 2$, så er f og g isotope.*

Vi får brug for to begreber, der beskriver omegne omkring delmangfoldigheder af en mangfoldighed. Lad M være en mangfoldighed med rand ∂M. En omegn af ∂M i M diffeomorf med $\partial M \times [0, 1)$, hvor ∂M identificeres med $\partial M \times \{0\}$ kaldes en krave. Man kan vise, at kraver findes.

Før vi kan tale om det andet begreb, er vi nødt til at repetere den teknisk tunge definition af et vektorbundt. Det er indholdet af de næste tre definitioner.

Definition 9.13. Ved et k-dimensionelt topologisk vektorbundt forstår vi en tripel (E, π, X), hvor $\pi : E \to X$ er en kontinuert surjektiv afbildning og $E_x = \pi^{-1}(\{x\})$ har struktur, som et k-dimensionelt vektorrum, så:

Ethvert punkt har en omegn, U, for hvilken der findes en homeomorfi

$$f : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k,$$

så

$$f_x := f|_{E_x} : E_x \to \{x\} \times \mathbb{R}^k$$

er en isomorfi mellem vektorrum. Vi kalder (f, U) for et bundtkort og E for totalrummet.

Definition 9.14. Lad (E, π, X) være et k-dimensionelt topologisk vektorbundt. En familie $\{(f_\alpha, U_\alpha)\}$ af bundtkort kalder vi et bundtatlas, hvis $\cup_{\alpha \in A} U_\alpha = X$. Afbildningerne

$$\begin{aligned} U_\alpha \cap U_\beta &\to GL(k, \mathbb{R}) \\ x &\mapsto f_{\beta x} \circ f_{\alpha x}^{-1} \end{aligned}$$

kaldes transitionsfunktioner.

Definition 9.15. Et bundtatlas for et topologisk vektorbundt over en glat mangfoldighed kaldes differentiabelt, hvis alle transitionsfunktioner er glatte. Et vektorbundt er et par $(E, \mathfrak{B})$ bestående af et topologisk vektorbundt E over M med et maksimalt differentiabelt bundtatlas $\mathfrak{B}$ for E.

Det er en lang definition. Det væsentlige er den lokale trivialitet i definition 9.13. Nu er vi parate til det andet begreb: en tubulær omegn.

Definition 9.16. Antag, at M^m er en delmangfoldighed af N^n. En delmængde af N, som udgør et $(n-m)$-vektorbundt over M med M som nulsnittet, kaldes en tubulær omegn af M.

Kosinski viser eksistensen af tubulære omegne for delmangfoldigheder uden rand, jf. Kosinski ([8], s. 46). Det er en del af konstruktionen, at en indlejring kan udvides til en indlejring af en tubulær omegn. Vi citerer følgende sætning fra Kosinski ([8], s. 55).

Sætning 9.17. *Lad M være en delmangfoldighed uden rand i det indre af mangfoldighed N. Lad F^0, F^1 være to tubulære omegne af M. Da er F^0 og F^1 isotope via en isotopi, som er stationær på M.*

Vi får brug for at kunne tale om en tubulær omegn af en delmangfoldighed M af randen $B = \partial N$ på en n-mangfoldighed N. Antag, at M er en delmangfoldighed uden rand af B. Så er inklusionen en indlejring, og vi kan udvide den til en indlejring af en tubulær omegn af M, T_M. Denne indlejring kan udvides til en indlejring af $T_M \times \mathbb{R}_+$ i N via kraven $\partial N \times \mathbb{R}_+$. Denne konstruktion kalder vi for en tubulær omegn af M i N. Der findes entydighed svarende til sætning 9.17.

Et vigtigt begreb i differentialtopologi er transversalitet.

Definition 9.18. Lad $f : M \to N$ og $g : V \to N$ være to glatte afbildninger. Vi siger, at f er transversal med g, og skriver $f \pitchfork g$, hvis

$$Df(T_pM) + Dg(T_qV) = T_{f(p)}N \text{ for } p \in M, q \in V,$$

når $f(p) = g(q)$.

Hvis der er tale om indlejringer eller inklusionsafbildninger, benyttes også notationen $f \pitchfork V$ eller $M \pitchfork V$.

Bemærkning 9.19. Det er et nyttigt resultat, at hvis to delmangfoldigheder mødes transversalt, samtidig med at summen af deres dimensioner er strengt mindre end dimensionen af den omkringliggende mangfoldighed, så mødes de ikke, dvs. de har tom fællesmængde.

En mere generel beskrivelse af fællesmængden for to transversale delmangfoldigheder er næste sætning, som vi citerer fra Bredon ([1], s. 114).

Sætning 9.20. *Antag, at $f : X \to M$ er en glat afbildning, og at $g : Y \to M$ er en indlejring. Hvis $f \pitchfork g$ for alle $z = f(x) = g(y)$, så er $f^{-1}(f(X) \cap g(Y))$ en delmangfoldighed af X med dimension* $\dim X + \dim Y - \dim M$.

Vi skal benytte sætningen til følgende bemærkning.

Bemærkning 9.21. Antag, at vi har to lukkede delmangfoldigheder V^λ og $V^{n-\lambda}$ i en mangfoldighed M^n, samt at $V^\lambda \pitchfork V^{n-\lambda}$. Af sætningen følger, at $V^\lambda \cap V^{n-\lambda}$ udgør en 0-dimensionel delmangfoldighed af V^λ. Da V^λ er kompakt, følger det, at $V^\lambda \cap V^{n-\lambda}$ består af endeligt mange punkter.

Vi får brug for at kunne vælge afbildninger ind i en mangfoldighed transversale på delmangfoldigheder, og at to afbildninger er transversale på hinanden. Derfor citerer vi følgende to tekniske korollarer fra Kosinski ([8], s. 65).

Korollar 9.22. *Lad V være en kompakt delmangfoldighed af N, U en åben omegn af V i N og $f : M \to N$ en glat afbildning. Da findes en isotopi, h_t, af N, som er identiteten uden for U, så $f \pitchfork h_1(V)$.*

Korollar 9.23. *Lad $f : M \to N$ og $g : V \to N$ være to afbildninger. Så findes homotopi, h_t, af g, så $h_0 = g$, og $h_1 \pitchfork f$.*

Et sidste resultat om transversalitet, hvormed vi senere skal definere snittallet for to delmangfoldigheder, er følgende resultat, som vi citerer fra Kosinski ([8], s. 62).

Korollar 9.24. *Lad M^m, V_1^r, V_2^r være delmangfoldigheder af N^n, $n = m+r$. Antag, at V_1, V_2 begge skærer M transversalt i samme punkt p. Da findes en isotopi af N, som er stationær på M og flytter V_1, så den bliver sammenfaldende med V_2 i en omegn af p.*

Vi vil ud fra dette korollar omtale snittal. Først er vi nødt til at nævne begrebet orientering.

Vi siger, at en mangfoldighed er orienteret, hvis alle transitionsafbildningerne i et givet atlas har positiv determinant. Hvis der til en mangfoldighed findes et atlas, som kan gøre den orienteret, kaldes mangfoldigheden orienterbar. En delmangfoldighed af en orienteret mangfoldighed er orienterbar. Det er værd at bemærke, at enkeltsammenhæng medfører orienterbarhed, jf. Hatcher ([5], s. 234).

Antag, at vi har en orienteret lukket n-mangfoldighed, N, og lukkede delmangfoldigheder V^r, M^m, $n = m + r$, der skærer hinanden transversalt. Transversaliteten betyder, at $V \cap M = \{p_1, \ldots, p_k\}$, jf. bemærkning 9.21. Hvis N er orienteret, giver det os en orientering af en tubulær omegn omkring M. Vi kan vælge en orientering af V. Ifølge korollar 9.24 kan vi via en isotopi anse fiberen, F_{p_i}, i den tubulære omegn over hvert punkt for sammenfaldende med V i en omegn af p_i. Hvis de to orienteringer stemmer overens, noterer vi $\epsilon(p_i) = 1$, hvis de er modsatte, noterer vi $\epsilon(p_i) = -1$. Vi definerer snittallet som

$$[V : M] = \sum_i \epsilon(p_i).$$

Man bemærker, at en modsat orientering af V giver, at

$$[-V : M] = -[V : M].$$

10. Dimensionerne et,to og tre

Vi har set på Den generaliserede Poincaré formodning for $n \geq 4$. Tilbage er der tilfældene $n = 1, 2, 3$. De to første $n = 1$ og $n = 2$ var kendte, da Poincaré fremsatte sin formodning i 1904. Det tredje tilfælde er endnu uafklaret.

For $n = 1$ gælder der, at en lukket sammenhængende 1-mangfoldighed er diffeomorf med S^1, se Milnor ([14], s. 55). Det løser formodning i det 1-dimensionelle tilfælde. For $n = 2$ gælder der, at kompakte flader kan klassificeres vha. orienterbarhed og Euler karakteristik, se f.eks. Lee ([9], s. 138 og s. 143). Da formodningens forudsætninger giver en orienterbar mangfoldighed med Euler karakteristik 2, følger det derfor, at mangfoldigheden er homeomorf med S^2.

Tilfældet $n = 3$ er det oprindelige. Det er på paradoksal vis det eneste uafklarede tilfælde. Det virker usandsynligt, at Freedmans metode kan forbedres til også at virke i tre dimensioner. Vi kan f.eks. ikke antage, at en glat afbildning af en 2-disk kan tilnærmes af en immersion. Derfor er det helt andre metoder, der forsøges i dag for at bevise formodningen. Vi vi anskueliggøre dette ved at se på Thurstons formodning, der har Poincaré formodningen som følge.

Vi vil nøjes med at se på den del af Thurstons formodning, som har forbindelse til Poincaré formodningen. Vi vælger følgende formulering taget fra Scott ([21], s. 482).

Thurstons formodning 10.1. *Lad M^3 være en lukket og orienterbar mangfoldighed med endelig fundamentalgruppe. Så har M en modelgeometri baseret på S^3.*

Der indgår et enkelt begreb, som vi ikke er stødt på før nemlig modelgeometri. Om lidt vil der komme en definition af dette, som vil indeholde nye begreber, som vi ser på efterfølgende. Dette fører forhåbentlig frem til den nødvendige intuitive forståelse af begreberne, som er formålet med dette afsnit.

Definition 10.2. En modelgeometri (G, X) er en mangfoldighed X sammen med en Lie gruppe G af diffeomorfier af X, så:

a) X er enkeltsammenhængende;

b) G virker transitivt på X med kompakte punktstabilisatorer;

c) G er ikke indeholdt i en større gruppe af diffeomorfier på X med kompakte punktstabilisatorer;

d) Der findes en kompakt mangfoldighed, som er et (G, X)-rum, dvs. at den har et atlas med transitionsafbildninger i G.

En mangfoldighed, M, siges at have en modelgeometri baseret på X, hvis den er et (G, X)-rum, hvor (G, X) opfylder definitionen. Det kan her hjælpe at tænke på en topologisk mangfoldighed som en $(Top(\mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n)$-mangfoldighed og en glat mangfoldighed som en $(Diff(\mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n)$-mangfoldighed, hvor Diff og Top dog ikke er Lie grupper af diffeomorfier, men det som kaldes pseudogrupper af homeomorfier. Et eksempel på en modelgeometri kunne være (G, S^n), hvor G er en undergruppe af $O(n+1)$, som opfylder b) og c).

Hvordan leder Thurstons formodning frem til Poincaré formodningen? Implikationen baserer sig på følgende proposition, som vi i modificeret udgave citerer fra Thurston ([22], s. 143).

Proposition 10.3. *Hvis G er en gruppe af analytiske diffeomorfier for et enkeltsammenhængende rum X, så er enhver fuldstændig (G, X)-mangfoldighed, M, homeomorf med kvotienten ${}^{X}\!/_{\Gamma}$, hvor Γ er en gruppe, som virker på X og er homomorft billede af $\pi_1(M)$.*

Her skal ikke forstås fuldstændighed som i analyse, men et krav om at en bestemt afbildning fra M's universelle overlejring ind i X er en overlejring. En modelgeometri fra definitionen opfylder dette krav om fuldstændighed.

Hvis M er en lukket enkeltsammenhængende 3-mangfoldighed, følger det af Thurstons formodning, at M har en modelgeometri baseret på S^3. Da det eneste homomorfe billede af en triviel gruppe er den trivielle, følger det af proposition 10.3, at $M \cong_{Top} S^3$.

Det afslutter vores undersøgelse af, hvad der begyndte for snart 100 år siden med Poincarés spørgsmål, jf. indledningen. Det er naturligt at spørge sig selv, hvorfor det lige præcist er det oprindelige 3-dimensionelle problem, der stadig giver matematikersamfundet grå hår?

Hvis man ser på de afgørende skridt i beviserne, så skinner det igennem, at det er fundamentalgruppen, som har en afgørende rolle. Det er ikke overraskende. Det grundlæggende spørgsmål, som Poincaré stillede, var: Er enkeltsammenhæng nok til at kendetegne sfæren blandt lukkede 3-mangfoldigheder? I de lavere dimensioner gælder dette netop. Fundamentalgruppen klassificerer til overflod lukkede 1-mangfoldigheder og klassificerer på passende vis lukkede 2-mangfoldigheder. I de højere dimensioner forsvinder problemerne med fundamentalgruppen, selvom de i høj grad til dels findes i 4 dimensioner og en smule i 5 dimensioner.

Litteratur

[1] Bredon, G.: Topology and Geometry. Springer-Verlag, 1993.
[2] Bröcker, T. og Jänich, K.: Introduction to differential topology. Cambridge University Press, 1982.
[3] Freedman, M.: The topology of four-dimensional manifolds, Journal of Differential Geometry 17 (1982), s. 357-453.
[4] Ed. Guillou, L. og Marin, A.: A la Recherche de la Topologie Perdue. Birkhäuser, 1986.
[5] Hatcher, A.: Algebraic Topology. Cambridge University Press, 2002.
[6] Hirsch, M.: Differential Topology. Springer-Verlag, 1976.
[7] Kirby, R.: The Topology of 4-Manifolds. Springer-Verlag, 1989.
[8] Kosinski, A.: Differential Manifolds. Academic Press, 1993.
[9] Lee, J.: Introduction to Topological Manifolds. Springer 2000.
[10] Lück, W.: A Basic Introduction To Surgery Theory, Topology of High-Dimensional Manifolds - Part 1. ICTP Lecture Notes Series, vol. IX, 2002.
[11] Milnor, J.: Lectures on the h-cobordisme theorem. Princeton University Press, 1965.
[12] Milnor, J.: Morse Theory. Princeton University Press, 1963.
[13] Milnor, J.: Sommes de variétes différentiables et structures différentiable des sphères, Bull. Soc. Math. France 87 (1959), s. 439-444.
[14] Milnor, J.: Topology from a Differential Viewpoint. Princeton University Press, 1997.
[15] Munkres, J.: Obstructions to smoothing of piecewise-differentiable homeomorphisms, Annals of Mathematics 72 (1960), s. 521-554.
[16] Newman, M.: Integral Matrices. Academic Press, 1972.
[17] Newman, M. H. A.: The engulfing theorem for topological manifolds, Annals of Mathematics (2) 84 (1966), s. 555–571.
[18] Poincaré, H.: Oeuvres de H. Poincaré, Tome VI, Paris 1953.
[19] Saveliev, N.: Invariants for Homology 3-Spheres. Springer, 2002.
[20] Smale, S.: Generalized Poincaré's Conjecture in dimensions greater than four, Annals of Mathematics 74 (1961), s. 391-403.
[21] Scott, P.: The Geometries of 3-Manifolds, The Bulletin of the London Mathematical Society XV (1983), s. 401-487.
[22] Thurston, W.: Three-Dimensional Geometry and Topology, vol. 1. Princeton University Press, 1997.