Dimensionsbegreber i Topologi

Mads Kjærulf Caspersen
Henning Røigaard-Petersen

17. juni 2004

Indhold

1 Indledning

Dette projekt er et studie i dimensionsbegreber i topologi. Vi koncentrerer os om *topologisk dimension* og *Hausdorff dimension*. Hovedvægten er lagt på bestemmelse af Hausdorff dimension vha. egenskaben selv-similaritet for mængder. Undervejs vil vi berøre fraktaler, der, jf. Mandelbrots definition, er mængder hvis Hausdorff dimension adskiller sig fra dens topologiske dimension. Hausdorff dimensionen er bemærkelsesværdig, idet det er det første[1] dimensionsbegreb der bryder med traditionen om at dimensioner skal være ikke-negative heltal. Hausdorff dimensionen kan således være irrationel, som f.eks. for Cantor mængden, der har Hausdorff dimension $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$, men topologisk dimension 0. For hver af dimensionsbegreberne ovenfor er der et hovedresultat. Det kan relativt nemt vises at ethvert kompakt metrisk rum med topologisk dimension m, kan indlejres i $\mathbb{R}^{2m+1}$. Hovedresultatet for Hausdorff dimensioner er straks noget mere kompliceret at vise. Dels forudsætter det kendskab til målteori, specielt teorien for ydre mål, og dels er vejen dertil meget lang. Ideen er at visse mængder på naturlig vis opstår som grænse for gentagene anvendelse af kontraktioner. Disse mængder er ofte selv-similære, og under passende betingelser kan det vises at deres Hausdorff dimension er bestemt af Lipschitz konstanterne hørende til de frembringende kontraktioner.

De to dimensionsbegreber adskiller sig væsentligt ved de mængder de er defineret på. Hvor ethvert topologisk rum kan tilskrives en topologisk dimension, så kan Hausdorff dimensionen kun tilskrives separable metriske rum opfyldende visse pæne betingelser. Da vi som regel befinder os i $\mathbb{R}^3$ når det drejer sig om fraktaler, vil disse betingelser være opfyldt.

Vi vil gerne takke vores vejleder Jesper Michael Møller, for hans hjælp under udarbejdelsen af dette projekt.

Mads Kjærulf Caspersen
Henning Røigaard-Petersen
København, juni, 2004

[1] Se [8]

2 Topologisk Dimension

Topologisk dimension kan defineres udelukkende vha. overdækninger og egenskaber for disse. Dette gør at det er et let forståeligt dimensionsbegreb, men, som et senere eksempel vil vise, er dimensionen ikke altid intuitivt klart.

Definition 2.1. *Orden af en overdækning*
En overdækning $\mathcal{A}$ af et rum X siges at have orden $m+1$, dersom der eksisterer et element i X der ligger i netop $m+1$ af mængderne i $\mathcal{A}$, og intet andet element i X ligger i flere mængder fra $\mathcal{A}$

Definition 2.2. *Forfining af en overdækning*
En overdækning $\mathcal{B}$ siges at være en forfining af overdækningen $\mathcal{A}$, dersom

$$\forall B \in \mathcal{B}\, \exists A \in \mathcal{A} : B \subseteq A$$

Bemærk at enhver overdækning har en triviel forfining, nemlig sig selv.

Definition 2.3. *Topologisk Dimension*
Lad X være et topologisk rum

1. *X siges at være endeligdimensional, dersom der eksisterer et $m \in \mathbb{N}$, så det for enhver åben overdækning $\mathcal{A}$ af X, findes en åben overdækning $\mathcal{B}$ af X, der er en forfining af $\mathcal{A}$, og som har orden $m+1$.*

2. *Den topologiske dimension af X er det mindste m for hvilket ovenstående gælder. Dimensionen betegnes $\dim_T X$.*

Yderligere defineres $\dim_T \emptyset = -1$.

Eksempel 2.4. *Enhver kompakt delmængde $X \subseteq \mathbb{R}$ har dimension højest 1. Beviset herfor er to-delt. Først defineres en overdækning af X af orden 2, herefter vises det at denne kan skaleres til en forfining af en vilkrålig overdækning af X.*

1. *Lad $A_1 = \{]n, n+1[\,|\, n \in \mathbb{N}\}$ og $A_0 = \{]n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}[\,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Da er $A = A_1 \cup A_0$ en åben overdækning af $\mathbb{R}$ med mængder af diameter 1. Denne overdækning har klart orden 2.*

2. *Lad $\mathcal{C}$ være en overdækning af X. Da X er kompakt har $\mathcal{C}$ et Lebesque tal[2] $\delta > 0$. Enhver overdækning af mængder med diametre mindre end δ er da en forfining. Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved $f(x) = \frac{\delta}{2}x$. f er oplagt en homeomorfi hvis billede af A er en overdækning af X med mængder af diameter $\frac{\delta}{2}$, fortsat af orden 2. Altså er $\dim_T X \leq 1$.*

Den topologiske dimension har egenskaber som vist nedenfor.

[2]Se [7]

Sætning 2.5. *Lad X være et endeligtdimensionalt rum. Er $Y \subseteq X$ et afsluttet delrum, da gælder*

$$\dim_T Y \leq \dim_T X$$

Bevis. Lad $\dim_T X = m$. Betragt en åben overdækning $\mathcal{A}$ af Y. Pr. konstruktion af delrumstopologien eksisterer for hvert $A \in \mathcal{A}$ en åben mængde A' i X så

$$A = A' \cap Y$$

Vi kan da definerer en åben overdækning

$$\mathcal{A}' = \{A' \mid A \in \mathcal{A}\} \cup \{X \backslash Y\}$$

af X. Der eksisterer en forfining $\mathcal{B}$ af denne med orden $m + 1$, hvorfor

$$\{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$$

er en åben overdækning af Y hvis orden er højest $m + 1$ og som er en forfining af A. □

Vi vil anvende en lokal udgave af konceptet orden for en overdækning:

Definition 2.6. *Lokal orden*
Lad Y være et delrum af rummet X. En overdækning $\mathcal{A}$ af X siges at have orden højest $m + 1$ (lokalt) i Y, dersom intet element i Y ligger i mere end $m + 1$ af mængderne i $\mathcal{A}$.

Lemma 2.7. *Lad X være et rum, $Y \subseteq X$ et delrum af dimension m og lad $\mathcal{A}$ være en åben overdækning af X. Da eksisterer en åben overdækning $\mathcal{B}$ af X, der er en forfining af $\mathcal{A}$ og af orden højest $m + 1$ lokalt i Y.*

Bevis. Betragt systemmet

$$\{A \cap Y \mid A \in \mathcal{A}\}$$

Dette er en åben overdækning af Y. Da Y har dimension m eksisterer en forfining $\mathcal{B}$ af denne der har orden højest $m + 1$. For ethvert $B \in \mathcal{B}$ eksisterer en åben mængde U_B i X så $U_B \cap Y = B$. Yderligere eksisterer $A_B \in \mathcal{A}$ så $B \subseteq A_B$. Definer nu

$$\mathcal{C} = \{U_B \cap A_B \mid B \in \mathcal{B}\} \cup \{A \backslash Y \mid A \in \mathcal{A}\}$$

Det indses da let at $\mathcal{C}$ er en åben overdækning af X. Lad nu $y \in Y$ og antag mhp. modstrid at der eksisterer flere end $m+1$ mængder i $\mathcal{C}$ indeholdende y, dvs. ordenen er mindst $m + 2$ lokalt i Y. Disse mængder må nødvendigvis være på formen $U_B \cap A_B$ for et $B \in \mathcal{B}$. Da en sådan mængde er indeholdt i B eksisterer altså mindst $m + 2$ B'er i $\mathcal{B}$ indeholdende y, i modstrid med at $\mathcal{B}$ var af orden $m + 1$. Altså må $\mathcal{C}$'s orden være højest $m + 1$ lokalt i Y. □

Sætning 2.8. *Lad Y og Z være afsluttede endeligdimensionale delrum af X, opfyldende $X = Y \cup Z$. Da gælder*

$$\dim_T X = \max\{\dim_T Y, \dim_T Z\}$$

Bevis. Lad $\mathcal{A}$ være en åben overdækning af X og sæt $m = \max\{\dim_T Y, \dim_T Z\}$. Ved lemma 2.7 eksisterer:

- En åben overdækning $\mathcal{B}$ af X der forfiner $\mathcal{A}$, af orden højest $m+1$ i Y.
- En åben overdækning $\mathcal{C}$ af X der forfiner $\mathcal{B}$, af orden højest $m+1$ i Z.

Definer nu en afbildning $f : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$, givet ved at $f(C)$, for en mængde $C \in \mathcal{C}$, er en mængde $B \in \mathcal{B}$ så $C \subseteq B$. Et sådan valg er muligt da $\mathcal{C}$ er en forfining af $\mathcal{B}$. Definer for $B \in \mathcal{B}$ de åbne mængder

$$D(B) = \bigcup_{C \in f^{-1}(B)} C$$

og systemmet

$$\mathcal{D} = \{D(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$$

Da vil $\mathcal{D}$ være en åben overdækning af X da $C \subseteq D(f(C))$ for alle $C \in \mathcal{C}$, og $\mathcal{C}$ er en overdækning. Yderligere vil $\mathcal{D}$ være en forfining af $\mathcal{B}$ da $D(B) \subseteq B$, specielt er den en forfining af $\mathcal{A}$. Vi ønsker nu at $\mathcal{D}$ har orden højest $m+1$. Antag derfor at $x \in D(B_1) \cap \ldots \cap D(B_k)$ hvor $D(B_i)$'erne er forskellige, specielt er $B_1, \ldots, B_k$ forskellige.

Da $x \in D(B_i)$ eksisterer C_i så $x \in C_i, i = 1, \ldots, k$. Disse C_i'er vil være forskellige. Tilsvarende vil $x \in B_i$.

Da $X = Y \cup Z$ vil $x \in Y \vee x \in Z$. Er $x \in Y$ vil $k \leq m+1$ thi $\mathcal{B}$ har orden højest $m+1$ lokalt i Y. Er $x \in Z$ vil $k \leq m+1$ da $\mathcal{C}$ har orden højest $m+1$ lokalt i Z. Altså har $\mathcal{D}$ orden højest $m+1$.

Da $\mathcal{A}$ var vilkårlig, er $\dim_T \; X \leq m$. Ved sætning 2.5 er $\dim_T X \geq m$, dvs. $\dim_T \; X = m$ som ønsket. □

Ved induktion fås nemt

Korollar 2.9. *Lad $X = Y_1 \cup \ldots \cup Y_n$, hvor Y_i er et endeligdimensionalt afsluttet delrum for alle $i = 1, \ldots, n$. Da er*

$$\dim_T X = \max\{\dim_T Y_1, \ldots, \dim_T Y_n\}$$

For at vise hovedsætningen skal vi anvende lidt algebra. Vi repeterer kort lidt. Lad $n, N \in \mathbb{N}$ og betragt vektorene $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$:

En affin kombination af vektorer i V er en linearkombination hvis koefficienter summer til 1.

Vektorene i V siges at være affint uafhængige dersom

$$(\sum_{i=0}^{n} a_i v_i = 0 \wedge \sum_{i=0}^{n} a_i = 0) \Rightarrow a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$$

Er vektorene i V affint uafhængige vil de udspænde et affint underrum P i $\mathbb{R}^N$. Dette er blot translation med v_0 af det lineære underrum $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{v_1 - v_0, \ldots, v_n - v_0\}$, altså et underrum af dimension n.

For det affine underrum gælder

1. Er $n < N$ har det affine plan tomt indre.
2. Er $v_{n+1} \in \mathbb{R}^N \backslash P$ er
$$\{v_0, \ldots, v_n, v_{n+1}\}$$
affint uafhængige i $\mathbb{R}^N$.

Definition 2.10. *General Position*
Et sæt af vektorer i $\mathbb{R}^N$ siges at være i general position i $\mathbb{R}^N$ dersom ethvert delsæt bestående af højest $N+1$ vektorer er affint uafhængige.

Lemma 2.11. *For ethvert sæt af vektorer $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$ og ethvert $\delta > 0$ eksisterer et sæt $\{w_1, \ldots, w_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$ der er i general position i $\mathbb{R}^N$ og som opfylder $\|v_i - w_i\| < \delta$ for alle $i = 1, \ldots, n$.*

Bevis. beviset føres ved induktion.

Er sættet $\{v_1\}$ en singelton, vil $w_1 = v_1$ være affint uafhængig.

Antag udsagnet holder for alle sæt $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$. Lad $\{w_1, \ldots, w_{n-1}\}$ være det tilhørende sæt af affint uafhængige vektorer og betragt de affine underrum udspændt af alle delsæt heraf, bestående af højest N elementer. Hver af disse planer har tomt indre, specielt vil deres forening F have tomt indre.

Givet en vektor $v_n \in \mathbb{R}^n$ kan vi ligge en kugle med radius δ om v_n. Denne kugle kan ikke være helt indeholdt i F da den har tomt indre. Tag et punkt $w_n \notin F$ herfra.

Som netop repeteret vil $\{w_1, \ldots, w_n\}$ være i general position og pr. valg af w_n er $\|v_n - w_n\| < \delta$, som ønsket. $\square$

Definition 2.12. *Lad X være et kompakt metrisk rum. For $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$ defineres*

$$\triangle(f) = \sup\{\mathrm{diam}\, f^{-1}(\{z\}) \mid z \in f(X)\}$$

$\triangle(f)$ er et mål for hvor meget en kontinuert funktion f afviger fra at være injektiv. f er injektiv hvis og kun hvis $f^{-1}(\{z\})$ en singelton for alle $z \in f(X)$, specielt har den diameter 0. Dette skal vi bruge til at konstruerer vores indlejring i hovedsætning 2.17, men først en række definitioner og lemmaer.

Lad nu (X, d) være et metrisk rum. Vi udstyrer $\mathbb{R}^N$ med metrikken

$$\tau(x, y) = \max\{|x_i - y_i| \mid i = 1, \ldots, N\}$$

og $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$ med supremums metrikken

$$\rho(f, g) = \sup\{\tau(f(x), g(x)) \mid x \in X\}$$

Lemma 2.13. *For et kompakt metrisk rum X og $\epsilon > 0$ er mængden*

$$U_\epsilon = \{f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N) \mid \triangle(f) < \epsilon\}$$

er åben i $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$.

Bevis. Er $U_\epsilon = \emptyset$ er vi færdige. Lad derfor $f \in U_\epsilon$ og vælg et $b > 0$ så $\delta(f) < b < \epsilon$. Hvis $f(x) = f(y) = z$, da må $d(x, y) < b$. Lad nu

$$A = \{(x, y) \in X \times X | d(x, y) \geq b\}$$

Da vil funktionen $h(x, y) = |f(x) - f(y)|$ være positiv på A. Da A er lukket i $X \times X$ er A kompakt, altså vil h have et minimum på A. Lad $\delta = \frac{1}{2} \min\{h(x, y)|(x, y) \in A\}$. Jeg ønsker nu at vise at $K_\delta(f) \subseteq E_\epsilon$.
Lad derfor g være en afbilding således at $\rho(f, g) < \delta$. Hvis $(x, y) \in A$, da vil $h(x, y) \geq 2\delta$, altså må $|g(x) - g(y)| > 0$. Så hvis $g(x) = g(y)$, så må $d(x, y) < b$. Følgeligt vil $\Delta(g) \leq b < \epsilon$.

□

Definition 2.14. *Deling af enheden*
Lad $\{U_1, \ldots, U_n\}$ være en endelig åben overdækning af et rum X. Ved en deling af enheden forstås forstås en endelig familie af kontinuerte afbildninger

$$\phi_i : X \to [0, 1], i = 1, \ldots, n$$

opfyldende

1. *supp$(\phi_i) \subseteq U_i$.*
2. *$\forall x \in X : \sum_{i=1}^n \phi_i(x) = 1$*

Lemma 2.15. *Lad $\{U_1, \ldots, U_n\}$ være en endelig åben overdækning af det normale topologiske rum X.*
Da eksisterer en åben overdækning $\{V_1, \ldots, V_n\}$ af X, så $\overline{V}_i \subseteq U_i$.

Bevis. Bemærk at $A = X \setminus (U_2 \cup \cdots \cup U_n)$ er en lukket delmængde af X, som er indeholdt i U_1. Da X er normal findes en åben mængde $V_1 \supseteq A$ således at $\overline{V_1} \subseteq U_1$. Da vil $\{V_1, U_2, \ldots, U_n\}$ overdække X. Har vi nu givet $\{V_1, \ldots, V_{k-1}, U_k, \ldots U_n\}$, således at $\overline{V_i} \subseteq U_i$, kan vil lade

$$A = X \setminus (V_1 \cup \cdots \cup V_{k-1} \cup U_{k+1} \cup \cdots \cup U_n)$$

Da vil A være en lukket og indeholdt i U_k. Vi kan således vælge $V_k \supseteq A$, således at $\overline{V_k} \subseteq U_k$. Efter det n'te skridt har vi den ønskede overdækning. □

Sætning 2.16. *Eksistens af en deling af enheden*
Er $\{U_1, \dots, U_n\}$ en endelig åben overdækning af et normalt rum X, da eksisterer en deling af enheden.

Bevis. Ved lemma 2.15 eksisterer åbne overdækninger:

- $\{V_1, \dots, V_n\}$ af X så $\overline{V}_i \subseteq U_i$.
- $\{W_1, \dots, W_n\}$ af X så $\overline{W}_i \subseteq V_i$.

Da X er normal eksisterer for alle $i = 1, \dots, n$ kontinuerte funktioner

$$\psi_i : X \to [0,1] \text{ så } \psi_i(\overline{W_i}) = \{1\} \text{ og } \psi_i(X \backslash V_i) = \{0\}$$

Da $\psi^{-1}(]0,1]) \subseteq V_i$ er

$$\text{supp}(\psi_i) \subseteq \overline{V_i} \subseteq U_i$$

Da $\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(x)$ er positiv for alle x (W_i'erne overdækker X) kan vi definere

$$\phi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(x)}$$

Da er $\phi_1, \dots, \phi_n$ oplagt en deling af enheden. □

Vi kan nu vise hovedsætningen for den topologiske dimension:

Sætning 2.17. *Indlejringssætningen*
Ethvert kompakt metriserbart rum X med topologisk dimension m kan indlejres i $\mathbb{R}^{2m+1}$.

Bevis. Lad $N = 2m + 1$. Vi ved at U_ϵ er åben og ønkser nu at vise at den er tæt i $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$ for alle $\epsilon > 0$, thi da vil $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_{\frac{1}{n}}$ være tæt i $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$, og altså specielt ikketom. Da må der findes en injektiv afbildning fra X ind i $\mathbb{R}^N$. Lad derfor $f \in C(X, \mathbb{R}^N), \delta > 0$ og $\epsilon > 0$. Vi ønsker da at finde $g \in U_\epsilon$ så $\rho(f,g) < \delta$. Overdæk nu X med endeligt mange åbne mængder $U_1, \dots, U_n$, således at

1. diam $U_i < \frac{\epsilon}{2}$
2. diam $f(U_i) < \frac{\delta}{2}$
3. $U_1, \dots, U_n$ har orden mindre end eller lig med $m + 1$.

Lad nu $\{\phi_i\}$ være en deling af enheden af $\{U_i\}$ som givet ved sætning 2.16. Vælg nu for hvert i et $x_i \in U_i$ og et punkt $z_i \in \mathbb{R}^N$, således at $|f(x_i) - z_i| < \frac{\delta}{2}$ og så $\{z_1, \dots, z_n\}$ er i general position i $\mathbb{R}^N$, dette kan gøres ved lemma 2.11. Definer nu $g : X \to \mathbb{R}^N$ ved

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) z_i$$

Vi vil nu vise at g er den ønskede funktion.
Idet $\sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) = 1$, fås at

$$\begin{aligned} g(x) - f(x) &= \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) z_i - \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) f(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x)(z_i - f(x_i)) + \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x)(f(x_i) - f(x)) \end{aligned}$$

Vi har at $|z_i - f(x_i)| < \frac{\delta}{2}$. Såfremt i er et indeks så $\phi_i(x) \neq 0$, vil $x \in U_i$, og da diam $f(U_i) < \frac{\delta}{2}$. vil $|f(x_i) - f(x)| < \frac{\delta}{2}$. Da $\sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) = 1$ må $|g(x) - f(x)| < \delta$, altså er $\rho(f, g) < \delta$.

Vi ønsker nu at vise at $g \in U_\epsilon$. Dette gøres ved at vise, at såfremt $g(x) = g(y)$, da må x, y tilhører samme U_i, thi da vil $\Delta(g) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$.
Antag derfor at $g(x) = g(y)$. Da vil

$$\sum_{i=1}^{n} (\phi_i(x) - \phi_i(y)) z_i = 0 \tag{1}$$

Da $\{U_i\}$ har orden $m + 1$, vil højst $m + 1$ af tallene $\phi_i(x) \neq 0$, og tilsvarende for $\phi_i(y)$. følgeligt vil (1) højst have 2m+2 led forskellig fra nul. Bemærk nu at

$$\sum_{i=1}^{n} (\phi_i(x) - \phi_i(y)) = 1 - 1 = 0$$

da $z_1, \ldots, z_n$ er i general position, så enhver delmængde med $N + 1 = 2m + 2$ elementer er affint uafhængige. Dvs at $\phi_i(x) - \phi_i(y) = 0$ for alle i. Vi kan altså konkludere at såfremt $\phi_i(x) > 0$, da må $x \in U_i$, men da må også $\phi_i(y) > 0$ så også $y \in U_i$. □

3 Hausdorff mål

I dette afsnit beskæftiger vi os med målteori. Udgangspunkt for definitioner o.l. er [1]. Vores tilgang her, bygger i første omgang på en mere generel konstruktion af Carathéodory. I denne situation arbejder vi med følgende omstændigheder:

1. X er et metrisk rum og $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$.
2. $\zeta : \mathcal{F} \to [0, \infty], \zeta(\emptyset) = 0$
3. $\forall \delta > 0 \, \exists E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{F} : \; X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \wedge d(E_i) < \delta$
4. $\forall \delta > 0 \, \exists E \in \mathcal{F} : \; \zeta(E) < \delta \wedge d(E) < \delta$

Her betegner $d(A)$ diameteren af delmængden $A \subseteq X$. Vi kan nu definere det ydre Carathéodory mål:

Definition 3.1. *Det ydre Carathéodory mål* ψ_δ
For $\delta \in]0, \infty]$ *og* $A \subseteq X$ *defineres*

$$\psi_\delta(A) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \zeta(E_i) \mid A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, d(E_i) < \delta, E_i \in \mathcal{F}\}$$

Bemærk at der altid vil eksisterer en overdækning jf. pkt 3 ovenfor, dvs. ψ_δ er veldefineret.

Sætning 3.2. ψ_δ *er et ydre mål på* X*.*

Bevis. Betingelse 4 ovenfor, giver at $\psi_\delta(\emptyset) = 0$. Desuden er $\psi_\delta(A) \leq \psi_\delta(B)$ dersom $A \subseteq B$, idet enhver overdækning af B specielt er en overdækning af A. Subadditiviteten er også oplagt. □

Bemærk at $\zeta(\emptyset) = 0$. Det betyder at vi også kan betragte endelige overdækninger i definitionen af det ydre mål, da en sådan blot kan suppleres med tomme mængder.

ψ_δ besidder, generelt, ikke nogen af de pænere målteoretiske egenskaber. Dette kan der repareres lidt på:

Definition 3.3. *Carathéodory målet*
For givne $\mathcal{F}$ *og* ζ *defineres*

$$\psi(\mathcal{F}, \zeta)(A) = \psi(A) = \lim_{\delta \to 0^+} \psi_\delta(A), \ A \subseteq X$$

Da $\psi_\delta(A) \leq \psi_\epsilon(A)$ for $\epsilon < \delta$, ses det nemt at vi yderligere har

$$\psi(A) = \sup_{\delta > 0} \psi_\delta(A)$$

Vi minder på at en mængde E siges at være målelig mht. et ydre mål μ, dersom

$$\mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \backslash A)$$

for alle delmængder A. Det kan vises at Borel mængderne, $\mathbb{B}(X)$, på en mængde X, er målelige hvis og kun hvis

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B), \text{ når } A, B \subseteq X, d(A, B) > 0$$

For mere om dette, se [4]

Hovedideen i at arbejde med ψ istedet for ψ_δ er følgende egenskab:

Sætning 3.4. *Borelmængderne på* X *er* ψ*-målelige.*

Bevis. ψ er fortsat et ydre mål. Lad $A, B \in \mathcal{P}(X)$ opfylde $d(A, B) > 0$. Vi kan vælge $\delta \in]0, \frac{d(A,B)}{2}[$ og en overdækning $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ så $d(E_i) < \delta$. Pr. valg af δ er hvert E_i disjunkt fra enten A eller B. Lader vi $E_A = \{E_i \mid A \cap E_i \neq \emptyset\}$ og $E_B = \{E_i \mid B \cap E_i \neq \emptyset\}$, så er oplagt $E_A \cup E_B \subseteq \{E_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ og følgelig er

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \zeta(E_i) \geq \sum_{E_i \in E_A} \zeta(E_i) + \sum_{E_i \in E_B} \zeta(E_i) \geq \psi_\delta(A) + \psi_\delta(B)$$

Tages infimum på begge sider fås

$$\psi_\delta(A \cup B) \geq \psi_\delta(A) + \psi_\delta(B)$$

Den modsatte ulighed følger af subadditiviteten af ψ. Altså er

$$\psi_\delta(A \cup B) = \psi_\delta(A) + \psi_\delta(B)$$

□

Ved Carathéodorys sætning er $(X, \mathbb{B}(X), \psi)$ et målrum. På trods af at Carathéodory målet ikke nødvendigvis er et mål på $\mathcal{P}(X)$, så omtales det som et sådan.

Målet ψ afhænger af af ζ og $\mathcal{F}$. Hausdorff målet opstår ved en konkretisering af disse to indices:

Definition 3.5. *Hausdorff målet*
Lad X være et seperabelt rum og $s \in [0, \infty[$. Carathéodory målet på X med

$$\mathcal{F} = \mathcal{P}(X) \text{ og } \zeta(E) = d(E)^s$$

hvor vi definerer

$$d(\emptyset)^s = 0 \text{ for alle } s$$

og for $E \neq \emptyset$ med $d(E) = 0$ defineres

$$0^0 = 1$$

kaldes Hausdorff målet og betegnes $\mathcal{H}^s$. Det bagvedliggende ydre mål betegnes $\mathcal{H}^s_\delta$, dvs.

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta\to 0^+} \mathcal{H}^s_\delta(A), \;\; A \subseteq X$$

Igen ser vi, at på trods af den voldsomme konkretisering, er der stadig tale om en familie af Hausdorff mål $(\mathcal{H}^s)_{s\in[0,\infty]}$. For $s = 0$ indses det nemt at $\mathcal{H}^s$ er tællemålet.

Sætning 3.6.
Lad $X = \mathbb{R}^n$. For $A \subseteq \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n$ og $t \in \mathbb{R}$ gælder:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s(A + x) &= \mathcal{H}^s(A) \\ \mathcal{H}^s(tA) &= t^s \mathcal{H}^s(A) \end{aligned}$$

hvor $A + x = \{a + x \mid a \in A\}$ og $tA\{ta \mid a \in A\}$.

Bevis. Er $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en overdækning af A, så er $(x+E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en overdækning af $A+x$, og omvendt. Altså er Hausdorff målet translationsinvariant.

Lad igen $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ være en overdækning af A med $d(E_i) = \delta_i$. Da er $(tE_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en overdækning af tA med $d(tE_i) = t\delta_i$, og

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} d(tE_i)^s = \sum_{i\in\mathbb{N}} (t\delta_i)^s = t^s \sum_{i\in\mathbb{N}} \delta_i^s = t^s \sum_{i\in\mathbb{N}} d(E_i)$$

hvilket giver det ønskede. □

Sætningen har den konsekvens, at $\mathcal{H}^s(K_r(x)) = r^s\mathcal{H}(K_1(x))$, dvs. målet af en kugle med radius r og centrum x er endeligt og positivt hvis og kun hvis målet af enhedskuglen er det. Vi får brug for lige netop dette mål når $s \in \mathbb{N}$.

Sætning 3.7. *Lad $n \in \mathbb{N}$ og betragt enhedskuglen K i $\mathbb{R}^n$. Da er*

$$0 < \mathcal{H}^n(K) < \infty$$

Bevis. Lad $V_n = m_n(K)$ angive lesbequemålet af enhedskuglen i $\mathbb{R}^n$, da vil lesbequemålet af $K_r(a)$ i $\mathbb{R}^n$ være $V_n r^n$ (jvf. [1] sætn. 6.18). Lad nu $N = 2, 3, \ldots$ og betragt

$$A_N = \{(\frac{a_1}{N}, \ldots, \frac{a_n}{N}) \in \mathbb{R}^n | a_i \in \mathbb{Z}\} \cap K$$

Da vil $|A_N| \leq (2N)^n$ og $(K_{\frac{1}{N}}(a))_{a\in A}$ er en overdækning af K. Da vil

$$\mathcal{H}^n_{N^{-1}}(K) \leq \sum_{a\in A} d(K_{\frac{1}{N}}(a))^n \leq (2N)^n \cdot (2N^{-1})^n = 2^{n+1} < \infty$$

følgeligt vil også $\mathcal{H}^n(K) < \infty$.
Da enhedskuglen er kompakt er det nok at betragte endelige overdækninger, lad $E_1, \ldots, E_l$ være en sådan. Da vil $\sum_{i=1}^{l} m_n(E_i) \geq V_n$. Lad nu K_i være den mindste kugle der indeholder E_i. Da vil

$$\sum_{i=1}^{l} d(E_i)^n = \sum_{i=1}^{l} d(K_i)^n \geq \sum_{i=1}^{l} m_n(K_i) \geq V_n$$

Altså vil $\mathcal{H}^n(K) \geq V_n > 0$. □

Det kan virke som om at $\mathcal{F} = \mathcal{P}(X)$ er at skyde gråspurve med kanoner. Følgende sætning gør det noget nemmere for os, at vælge vores overdækninger:

Sætning 3.8.
Lad X være et separabelt rum, $s \in [0, \infty[$ og $\zeta(E) = d(E)^s$ for $E \subseteq X$. Dersom:

- $\mathcal{F} = \{F \subseteq X \,|\, F \text{ er afsluttet}\}$
- $\mathcal{F} = \{U \subseteq X \,|\, U \text{ er åben}\}$

- $\mathcal{F} = \{K \subseteq \mathbb{R}^n \mid K$ *er konveks*$\}$ *når* $X = \mathbb{R}^n$

da er $\psi(\mathcal{F}, \zeta) = \mathcal{H}^s$.

Bevis. At vi kan bruge afsluttede såvel som konvekse mængder er oplagt, idet $\overline{E}$ såvel som E's konvekse hylster er af samme diameter.

Lad nu $E \subseteq X$ og $\epsilon > 0$. Definer $E_\epsilon = \{x \in X \mid d(x, E) < \epsilon\}$. E_ϵ er oplagt åben og opfylder

$$d(E_\epsilon) < d(E) + 2\epsilon \underset{\epsilon \to 0^+}{\longrightarrow} d(E)$$

Altså kan vi bruge de åbne mængder. □

For at kunne definerer Hausdorff dimensionen, skal vi bruge en central egenskab for Hausdorff målet:

Sætning 3.9.
For alle $0 \leq s < t < \infty$ *og* $A \subseteq X$ *gælder*

$$\mathcal{H}^s(A) < \infty \Rightarrow \mathcal{H}^t(A) = 0$$

Bevis. Lad $(E_i)_{i \in \mathbb{N}}$ være en overdækning af A af diameter højest δ og $\sum_{i \in \mathbb{N}} d(E_i)^s = k$. Da er

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^t_\delta(A) &\leq \sum_{i \in \mathbb{N}} d(E_i)^t \\
&= \sum_{i \in \mathbb{N}} d(E_i)^s d(E_i)^{t-s} \\
&\leq \delta^{t-s} \sum_{i \in \mathbb{N}} d(E_i)^s \\
&= \delta^{t-s} k \\
&\underset{\delta \to 0^+}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

□

En omskrivning af sætningen giver et ækvivalent udsagn

$$\mathcal{H}^t(A) > 0 \Rightarrow \mathcal{H}^s(A) = \infty \text{ når } s < t < \infty$$

Moralen er, at $\mathcal{H}^s(A)$ enten er ∞, 0 eller imellem, når s varierer. Dersom den antager begge af værdierne 0 og ∞, vil $\mathcal{H}^s(A)$ skifte fra at være den ene til at være den anden i netop ét $s \in [0, \infty[$.

$$\underset{0}{|}\underbrace{-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-}_{\mathcal{H}^i(A)=\infty}\underset{s}{|}\underbrace{-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-}_{\mathcal{H}^j(A)=0}$$

Værdien af målet i et sådan s kan vi ikke sige noget generelt om.

4 Hausdorff dimension

Hausdorff dimensionen opstår nu på naturlig vis fra Hausdorff målet.

Definition 4.1. *Hausdorff dimension*
Lad X være et separabelt rum udstyret med Hausdorff målet $\mathcal{H}^s$. Da er Hausdorff dimensionen af en mængde $A \subseteq X$:

$$\dim_H A = \begin{cases} 0 & \forall s \in [0,\infty[: \mathcal{H}^s(A) = 0 \\ \infty & \forall s \in [0,\infty[: \mathcal{H}^s(A) = \infty \\ \sup\{s \,|\, \mathcal{H}^s(A) = \infty\} & \textit{ellers} \end{cases}$$

Jf. forrige kapitel ses det let at

$$\dim_H A = \sup\{s \,|\, \mathcal{H}^s(A) > 0\} = \inf\{t \,|\, \mathcal{H}^t(A) < \infty\} = \inf\{t \,|\, \mathcal{H}^t(A) = 0\}$$

Vi har følgende generelle egenskaber for Hausdorff dimensionen:

Sætning 4.2.

1. $\dim_H A \leq \dim_H B$ *når* $A \subseteq B$.

2. $\dim \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \sup\limits_{i \in \mathbb{N}} \dim_H A_i$ *når* $A_i \subseteq X, i = 1, 2, \ldots$

Bevis.

1) Er $\dim_H B = \infty$ er vi færdige. Lad $\dim_H B = t$. Dvs.

$$\forall s > t : \mathcal{H}^s(B) = 0$$

Da $\mathcal{H}^s$ er et mål og $A \subseteq B$ er

$$\forall s > t : \mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{H}^s(B) = 0$$

dvs. $\dim_H A \leq t$.

2) $\geq$: Da $A_i \subseteq \cup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ vil $\dim_H A \leq \dim \cup_{i\in\mathbb{N}} A_i$, specielt vil $\sup_{i\in\mathbb{N}} \dim_H A_i \leq \dim \cup_{i\in\mathbb{N}} A_i$

$\leq$: Antag $\dim_H \cup_{i\in\mathbb{N}} A_i = t$, dvs. $\forall s < t : \mathcal{H}^s(\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \infty$. Da

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^s(A_i) \geq \mathcal{H}^s(\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i)$$

er $\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^s(A_i) = \infty$ for alle $s < t$. Der må altså eksistere i_0 så $\mathcal{H}^s(A_{i_0}) > 0$ for $s < t$, dvs. $\dim_H A_{i_0} \geq t$, specielt er $\sup_{i\in\mathbb{N}} \dim_H A_i \geq \sum \cup_{i\in\mathbb{N}} A_i$.

$\square$

Har A dimension s, så kan $\mathcal{H}^s(A) = 0$, $\mathcal{H}^s(A) = \infty$ eller $0 < \mathcal{H}^s(A) < \infty$. Omvendt, hvis $0 < \mathcal{H}^s(A) < \infty$ for et s, så må dette være dimensionen.

En naturlig egenskab for et dimensionsbegreb er $\dim \mathbb{R}^n = n$. Dette gør sig heldigvist gældende for Hausdorff dimensionen:

Sætning 4.3. *Lad $n \in \mathbb{N}$ og $A \subseteq \mathbb{R}^n$.*

1. $\dim_H \mathbb{R}^n = n$
2. $\dim_H A \leq n$

Bevis. Betragt $\mathbb{Z}^n$ gitteret i $\mathbb{R}^n$. Om hver punkt z heri, kan vi ligge kuglen med radius 1. Der gælder da oplagt

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}^n} K_1(z)$$

og ved 4.2 er

$$\dim_H B_1(0) \leq \dim_H \mathbb{R}^n \leq \sup_{z \in \mathbb{Z}^n} \dim_H B_1(z) = \dim_H B_1(0)$$

hvor sidste lighed følger af at $\mathcal{H}$ er translationsinvariant. Ved 3.7 har $\mathbb{R}^n$ dimension n.

Sidste udsagn følger nu af 1. og 4.2. $\square$

4.1 Tæthederne θ^k og θ_k

En anden størrelse der ligger sig tæt op af Hausdorff dimensionen er de k-dimensionale tætheder. Disse størrelser vil først blive brugt i forbindelse med selv-similære mængder, hvor de viser sig centrale ved bestemmelsen af deres Hausdorff dimension.

Definition 4.4. *Den øvre hhv. nedre k-dimensionale tæthed af mængden A i punktet x er*

$$\begin{aligned} \theta^k(A, x) &= \limsup_{r \to 0} \frac{\mathcal{H}^k(A \cap K_r(x))}{\alpha_k r^k} \\ \theta_k(A, x) &= \liminf_{r \to 0} \frac{\mathcal{H}^k(A \cap K_r(x))}{\alpha_k r^k} \end{aligned}$$

hvor $\alpha_k = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^k}{\Gamma((\frac{k}{2})^k + 1)}$

Dersom de er ens, betegnes deres fælles værdi $\theta(A, x, k)$.

α_k er blot en normeringsstørrelse, der ikke komme til at spille den store rolle i dette projekt.

Definitionen af den k-dimensionale tæthed kan udvides til mål:

Definition 4.5. *Lad μ være et mål på X og $x \in X$. Da defineres*

$$\begin{aligned}\theta^k(\mu, x) &= \limsup_{r\to 0} \frac{\mu(K_r(x))}{\alpha_k r^k} \\ \theta_k(\mu, x) &= \liminf_{r\to 0} \frac{\mu(K_r(x))}{\alpha_k r^k}\end{aligned}$$

Dersom de er ens, betegnes deres fælles værdi $\theta(\mu, x, k)$.

Specielt de øvre k-dimensionale tætheder kommer til at spille en rolle, som angivet nedenfor:

Sætning 4.6. *Lad μ være et mål på X og $A \subseteq X$. Da gælder:*

1. $(\forall a \in A : \theta^k(\mu, a) \geq \lambda) \Rightarrow \mathcal{H}^k(A) \leq \lambda^{-1}\mu(A)$
2. $(\forall a \in A : \theta^k(\mu, a) \leq \lambda) \Rightarrow \mathcal{H}^k(A) \geq 2^k\lambda^{-1}\mu(A)$

Specielt er $0 < \mathcal{H}^k(A) < \infty$, dvs. $\dim_H A = k$, dersom $\theta^k(\mu, a)$ er numerisk begrænset.

Bevis. For et bevis, se [5] □

4.2 Alternative Hausdorff dimensioner

Vores opbygning af Hausdorff dimensionen læner sig tungt op ad Hausdorff målet, men det er faktisk muligt at konstruerer dimensionesbegrebet uden brug af mål, som nedenstående sætning viser:

Sætning 4.7.
Lad $A \subseteq X$, $s \in [0, \infty[$ og $\delta \in]0, \infty]$. Da er følgende ækvivalente udsagn:

1. $\mathcal{H}^s(A) = 0$
2. $\mathcal{H}^s_\delta(A) = 0$
3. $\forall \epsilon > 0 \exists (E_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq X : (A \subseteq \cup_{i\in\mathbb{N}} E_i \wedge \sum_{i\in\mathbb{N}} d(E_i)^s < \epsilon)$

Bevis. oplagt i rækkefølgen (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (3). □

Man vil altså kunne definerer Hausdorff funktionen alene ud fra overdækninger.

Derudover kan det være praktisk at betragte andre funktioner end $\zeta = d(E_i)^s$ for et givent s. Er $h : [0, \infty[\to [0, \infty[$ en ikke-aftagende funktion med $h(0) = 0$, kan vi definerer $\zeta(E) = h(d(E))$. Målet $\psi(\mathcal{P}(X), \zeta)$ kaldes da gerne for Hausdorff-h målet og betegnes Λ_h. Det er klart at $\mathcal{H}^s$ er specialtilfældet hvor $h(t) = t^s$. Hvor $\mathcal{H}^s$ giver os en forståelse for den "fylde"delmængderne har i X, så vil andre valg af h kunne give andre former for indsigt. Vi vil dog kun interessere os for $\mathcal{H}^s$.

5 Nogle Fraktaler

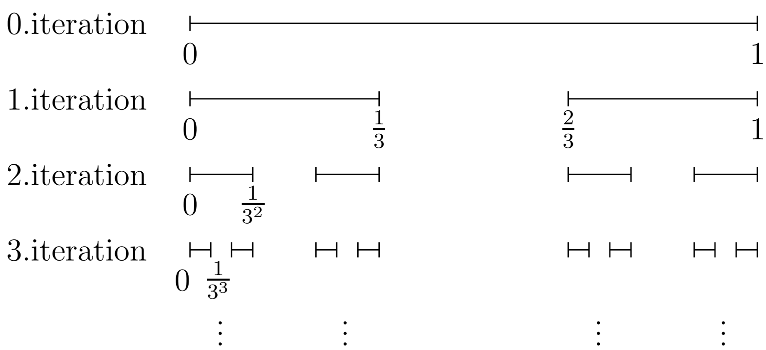
Benoit Mandelbrot definerede[3] en fraktal til at være en mængde, hvis Hausdorff dimension er større end dens topologiske dimension. Ordet betyder i sig selv "at brække"og kommer af latinsk "fractus".

5.1 Cantor mængden

Lad $0 < \lambda < \frac{1}{2}$. Lad nu $I_{0,1} = [0,1]$, og lad $I_{1,1} = [0,\lambda], I_{1,2} = [1-\lambda, 1]$. Processen forsættes nu således: Givet intervaller $I_{k-1,1}, \ldots, I_{k-1,2^{k-1}}$ defineres intervallerne $I_{k1,1}, \ldots, I_{k,2^k}$, ved at tage et interval $I_{k-1,j}$ og fra dette fjerne et interval af længde $(1-2\lambda)d(I_{k-1,j}) = (1-2\lambda)\lambda^{k-1}$ fra midten af dette, således skabes der to nye intervaller. Vi har således at alle intervallerne $I_{j,k}$ har længde λ^k. Cantormængden $C(\lambda)$ defineres nu ved

$$C(\lambda) = \bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^k} I_{k,j}$$

Oftest betragter man cantormængden med $\lambda = \frac{1}{3}$. Jvf figuren nedenfor:



Vi vil nu vise at den topologiske dimension af $C(\lambda)$ er 0. Lad $\epsilon > 0$ være givet og betragt intervallet $I_\epsilon =]-\epsilon, 1+\epsilon[$. Dette er en åben mængde der overdækker $C(\lambda)$ af orden 1 og diameter $1 + 2\epsilon$. Vi kan lade iterationsprocessen virke på I_ϵ n gange, hvorved der fremkommer en åben overdækning I_ϵ^n af $C(\lambda)$, bestående af 2^n intervaller af diameter $\frac{1+2\epsilon}{3^n}$. Denne overdækning er af orden 1 dersom ϵ er passende lille i forhold til n. For givent n kan der vælges ϵ så ordenen bliver 1.

Lad nu $\mathcal{C}$ være en åben overdækning af $C(\lambda)$. Da $C(\lambda)$ er kompakt har $\mathcal{C}$ et Lebesque tal $\delta > 0$, således at enhver overdækning af $C(\lambda)$ med mængder af diameter mindre end δ, er en forfining af $\mathcal{C}$. Dette kan opnås med I_ϵ^n for passende stort n. Altså har $C(\lambda)$ topologisk dimension højest 0. Pr. definition af topologisk dimension er da $\dim_T C(\lambda) = 0$.

[3] Se [9]

Vi ønsker nu at beregne Hausdorff-målet, og herved Hausdorff-dimensionen af $C(\lambda)$, som viser sig at være $\frac{\log 2}{\log \frac{1}{\lambda}}$. Men først to små lemmaer.

Lemma 5.1. *Lad* $s = \frac{\log 2}{\log \frac{1}{\lambda}}$, *lad* $l, n \in \mathbb{N}$ *således at* $l \geq n$, *da vil*

(1) $\sum_{i=1}^{2^l} d(I_{l,i})^s = 1$

(2) $\sum_{I_{l,i} \subseteq I_{n,j}} d(I_{l,i})^s d(I_{n,j})^s$

Bevis. Vi har at

$$\sum_{i=1}^{2^l} d(I_{l,i})^s = 2^l \lambda^{ls} = (2\lambda^s)^l = 1$$

hvor sidste lighedstegn følger ved vores valg af s. (2) følger nu af (1) idet

$$2^n d(I_{n,j})^s = 1 = 2^n \cdot 2^{l-n} d(I_{l,i})^s = 2^n \sum_{I_{l,i} \subseteq I_{n,j}} d(I_{l,i})^s$$

hvilket giver det ønskede. □

Lemma 5.2. *Lad* I *være et åbent interval, lad* $l \in \mathbb{N}$ *og lad* $s = \frac{\log 2}{\log \frac{1}{\lambda}}$, *da vil*

$$\sum_{I_{l,i} \subseteq I} d(I_{l,i})^s \leq 4d(I)^s$$

Bevis. Såfremt $\{I_{l,i} | I_{l,i} \subseteq I\} = \emptyset$ er det oplagt. Antag derfor at der findes intervaller $I_{l,i} \subseteq I$, og lad n være det mindste heltal således at I indeholder $I_{n,i}$. Da vil $n \leq l$. Lad nu $I_{n,j_1}, \ldots, I_{n,j_p}$, være de intervaller som har elementer fælles med I, da vil $p \leq 4$, som følge af vores valg af n. Da vil

$$4d(I)^s \geq \sum_{m=1}^{p} d(I_{n,j_p})^s = \sum_{m=1}^{p} \sum_{I_{l,i} \subseteq I_{n,j_m}} d(I_{l,i})^s \geq \sum_{I_{l,i} \subseteq I} d(I_{l,i})^s$$

hvor lighedstegnet følger af lemma 5.1. □

Sætning 5.3. *Lad* $\lambda \in]0, \frac{1}{2}[$ *og lad* $s = \frac{\log 2}{\log(\frac{1}{\lambda})}$, *da vil*

$$\frac{1}{4} \leq \mathcal{H}^s(C(\lambda)) \leq 1$$

følgeligt vil $dim_H(C(\lambda)) = s$.

Bevis. Lad $k \in \mathbb{N}$, da vil $C(\lambda) \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_{k,j}$, så for et vilkårligt $s \in [0, \infty[$, vil

$$\mathcal{H}^s_{\lambda^k}(C(\lambda)) \leq \sum_{j=1}^{2^k} d(I_{k,j})^s 2^k \lambda^{ks} = (2\lambda^s)^k = 1 \tag{2}$$

Det ses nu at

$$\mathcal{H}^s(C(\lambda)) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{H}^s_{\lambda^k}(C(\lambda)) \le 1$$

Vi ønsker nu at vise at for en vilkårlig overdækning $(U_i)_{i\in I}$ af $C(\lambda)$ vil

$$\sum_i d(U_i)^s \ge \frac{1}{4}$$

Da $C(\lambda) \subset \mathbb{R}$ er det nok at se på overdækninger bestående af intervaller, og da $C(\lambda)$ er kompakt, er det nok se på endelige overdækninger af intervaller $I_1, \dots, I_n$. Da $C(\lambda)$ ikke har nogle indre punkter, kan vi, ved om nødvendigt at gøre I_j en smule størrere, antage at endepunkterne for I_j ikke har noget til fælles med $C(\lambda)$. Da findes der et $\delta > 0$ således at afstanden fra $C(\lambda)$ til alle intervalendepunkterne er mindst δ. Vælger vi nu k så stor at $\delta > \lambda^k d(I_{k,i})$, har vi at ethvert interval $I_{k,i}$ er indeholdt i et passende interval I_j. Da giver lemma 5.2 at

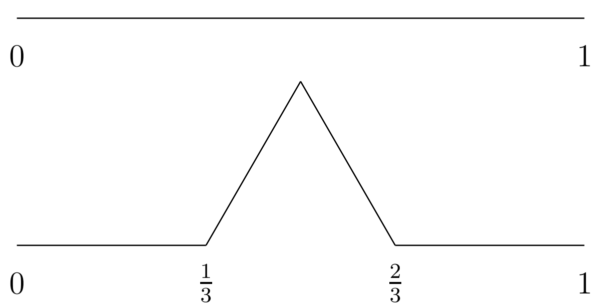
$$4\sum_j d(I_j)^s \ge \sum_j \sum_{I_{k,i}\subset I_j} d(I_{k,i})^s \ge \sum_{i=1}^{2^k} d(I_{k,i})^s = 1$$

Hermed er det ønskede vist. □

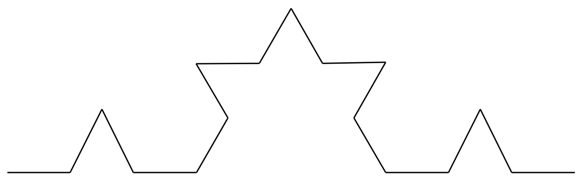
Bemærk at (2) ledte os hen imod hvad værdien af s skulle være, idet $\frac{\log 2}{\log \frac{1}{\lambda}}$ er den mindste værdi for hvilket $(2\lambda^s)^k$ forbliver endelig, når k går imod uendelig.

5.2 Koch kurven

Koch kurven er en delmængde af $\mathbb{R}^2$. Udgangspunktet for iterationen er en ret linie, f.eks. intervallet $[0, 1]$. Vi tager den miderste trediedel af linien, og oprejser en ligesidet trekant med sidelængde svarende til det miderste liniestykke, mens de to endestykker efterlades urørt. Herved fremkommer fire liniestykker:



Processen kan nu gentages på hver af liniestykkerne, hvorved der fremkommer 16 liniestykker:



Processen fortsættes hvorved antalet af liniestykker og trekanter vokser kraftigt, men deres længde aftager! En interessant observation er, at antallet af liniestykker vokser hurtigere en deres længde aftager. Efter det n.trin vil der være 4^n liniestykker, hver af længde $\frac{1}{3^n}$.
Den samlede længde af kurven efter den n'te iteration er da

$$L_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

En konsekvens heraf er at grænsen af iterationer vil have uendelig længde. Koch kurven defineres til at være grænsen for disse iterationer! På trods af denne egenskab er Koch kurven begrænset. Lad A_n betegne arealet mellem Koch kurven og linien givet ved intervallet $[0,1]$, med $A_0 = 0$. I det n.te trin øges A_{n-1} med arealet svarende til de 4^{n-1} trekanter vi tilføjer. Vi kan vurdere denne størrelse opad ved istedet at tilføje arealet af kvadratet omspændende trekanterne. Disse har areal $\left(\frac{1}{3^n}\right)^2$. Vi har altså:

$$A_n < A_{n-1} + 4^{n-1}\left(\frac{1}{3^n}\right)^2 = A_{n-1} + \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3^2}\right)^n$$

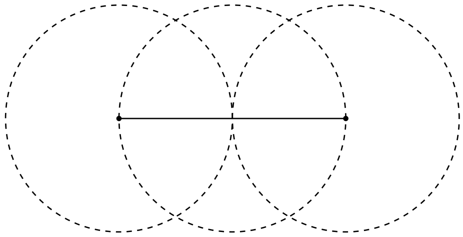
Fortsættes den rekursive betragtning fås

$$A_n < \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3^2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3^2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3^2}\right)^3 + \ldots + \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3^2}\right)^n$$

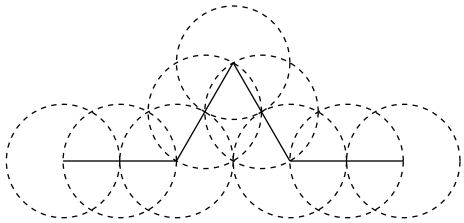
Dette er en geometrisk række på nær konstantled. Vi kan altså vurdere arealet opdad ved:

$$\lim_{n\to\infty} A_n < \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3^2}\right)^i = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\frac{1-\left(\frac{4}{3^2}\right)^{n+1}}{1-\frac{4}{3^2}} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Vi kan nu vise at Koch kurven har topologisk dimension højest 1. Til hver iteration af liniestykket af længde λ definerer vi en overdækning. Overdækningen af den n'te iteration betegnes O_n. Overdækningen består af et antal åbne kugler, 2 for hver af de 4^n liniestykker $+1$. Kuglerne ligges i hver ende af linierne og en i midten. De har radius svarende til halvdelen af liniens længde, dvs. radius er $\frac{\lambda}{2 \cdot 3^n}$. For $n = 0$ ser O_0 således ud:



For $n = 1$ ser O_1 således ud:



Det er da klart at ethvert punkt i Kock kurven ligger i højest 2 af kuglerne fra O_n for ethvert $n \in \mathbb{N}_0$. Desuden er det klart at kuglerne i O_n er af aftagende diameter, dvs. for enhver forelagt overdækning med Lebesque tal $\delta > 0$, kan vi forfine den med en O_n for passende n. Altså er den topologiske dimension højest 1.

Koch kurven er sammenhængende, hvorfor en åben overdækning af denne af orden 1 ikke kan eksisterer. Antag modsat, da må overdækningen bestå af disjunkte mængder, dvs. vi kan skrive kurven som en disjunkt forening af 2 mængder, i strid med at den var sammenhængende. Overdækningen O_n ovenfor viser yderligere at enhver forfining heraf må bestå af mindst 2 mængder.

Vi skal senere vise at Koch kurve er en fraktal, altså har ikke-heltallig Hausdorff dimension. Vi viser dette vha. similariteter. Dette illustrere også anvendeligheden af konceptet selv-similaritet ved beregning af dimensioner.

6 Grundliggende begreber for Selv-similaritet

Vi skal først have lagt de grundlæggende definitioner og notationer på plads.

I det følgende er N et fast naturligt tal.

Definition 6.1. *p-tupler/P_N*
Lad $p \in \mathbb{N}$.

- *En p-tupel i $\{1, \ldots, N\}$ er en mængde $\langle i_1, \ldots, i_p \rangle$ opfyldende $i_j \in \{1, \ldots, N\}$*

- *Mængden af tupler i* $\{1,\dots,N\}$ *betegnes* P_N, *dvs.*

$$P_N = \{\langle i_1,\dots,i_p\rangle \,|i_j \in \{1,\dots,N\},\ p\in\mathbb{N}\}$$

- *For* $\alpha = \langle i_1,\dots,i_p\rangle$ *defineres længden* $l : P_N \to \mathbb{N}$ *ved* $l(\alpha) = p$.

Vi indfører en relation og en komposition på P_N:

Definition 6.2.
Lad $\alpha,\beta \in P_N$.

- *Vi siger at* α *er et* initial segment *for* β, *og skriver* $\alpha \prec \beta$, *dersom*

$$\alpha = \langle i_1,\dots,i_p\rangle, \beta = \langle i_1,\dots,i_p, i_{p+1},\dots,i_q\rangle,\ q\geq p$$

  Vi skriver yderligere $\alpha \precneqq \beta$ *dersom* $\alpha\prec\beta$ *og* $\alpha\neq\beta$.

- *For* $\alpha = \langle i_1,\dots,i_p\rangle$ *og* $\beta = \langle j_1,\dots,j_q\rangle$ *defineres*

$$\alpha\beta = \langle i_1,\dots,i_p, j_1,\dots,j_q\rangle$$

Definition 6.3.
Ved Cantormængden på N symboler, *forstås mængden af afbildninger* $i : \mathbb{N} \to \{1,\dots,N\}$, *dvs.*

$$\mathcal{C}(N) = \{1,\dots,N\}^{\mathbb{N}}$$

Med notationen $i(p) = i_p$ *skrives elementerne fra* $\mathcal{C}(N)$ *på følgeform:*

$$i_1 i_2 \dots i_p \dots$$

Det ses let at $\mathcal{C}(N) = \prod_{i=1}^{\infty}\{1,\dots,N\}$. Vi kan anvende koncepterne fra ordnede tupler på $\mathcal{C}(N)$. For en $\alpha\in P_N$ og $i\in\mathcal{C}(N)$ vil vi anvende $\alpha\prec i$ og αi med de oplagte fortolkninger.

Vi udstyrer $\{1,\dots,N\}$ med den diskrete topologi og $\mathcal{C}(N)$ med produktopologien induceret heraf. Årsagen er at vi senere skal betragte kontinuerte afbildninger herfra.

Definition 6.4.
For $\alpha = \langle i_1,\dots,i_p\rangle \in P_N$ *defineres*

- $\hat\alpha \in \mathcal{C}(N)$ *ved*

$$\hat\alpha = i_1,\dots,i_p, i_1,\dots,i_p, i_1,\dots,i_p,\dots$$

  $\hat\alpha$ *er altså den "cykliske"gentagelse af* α.

- $\alpha^* = \{\beta\in\mathcal{C}(N)\,|\,\alpha\prec\beta\}$.

Definition 6.5.
Lad I være en endelig delmængde af P_N (dvs. alle elementerne har en fælles øvre grænse for deres længde).

- $\hat{I} = \{\alpha_1 \cdots \alpha_p \cdots \mid \alpha_i \in I\}$. *Dvs.* $\hat{I}$ *er alle uendelige følger der opstår ved at komponerer uendeligt mange elementer fra* I.
- I *siges at være* sikker *dersom* $\forall \beta \in \mathcal{C}(N) \exists \alpha \in I : \alpha \prec \beta$
- I *siges at være* stram *dersom* $\forall \beta \in \mathcal{C}(N) \exists! \alpha \in I : \alpha \prec \beta$.
  At være stram adskiller sig således kun fra at være sikker ved et entydigheds udsagn!

Der gælder oplagt $\hat{I} \subseteq \mathcal{C}(N)$. Derudover ses det let, at det at være sikker er ækvivalent med følgende:
Lad $p = \max\{l(\alpha) \mid \alpha \in I\}$. I er da sikker dersom der for enhver p-tuppel β eksisterer $\alpha \in I$ så $\alpha \prec \beta$.

Sætning 6.6.

1. *Følgende er ækvivalente udsagn:*
   (a) $\hat{I} = \mathcal{C}(N)$
   (b) $\mathcal{C}(N) = \bigcup_{\alpha \in I} \alpha^*$
   (c) I *er sikker.*
2. *Følgende er ækvivalente udsagn:*
   (a) $\forall \beta \in \mathcal{C}(N) \exists! \alpha \in \hat{I} : \beta = \alpha$. *(bemærk entydigheds udsagnet!)*
   (b) $\mathcal{C}(N) = \bigvee_{\alpha \in I} \alpha^*$ *(disjukt forening!)*
   (c) I *er stram.*

Bevis. Oplagt i rækkefølgen $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a)$ i begge tilfælde. $\square$

7 Selv Similaritet

Lad igen $N \in \mathbb{N}$ være et fast tal. En del af matrialet præsenteret herunder er formuleret for generelt metrisk rum (X, d). Vi vil dog fra tid til anden springe til tilfælder $(\mathbb{R}^n, d)$, hvor d betegner den sædvanlige metrik. Efterhånden som teoriens udvikles vil vi anvende den på Cantor mængden. Alle resultater herfor er samlet til sidst.

Definition 7.1. *Er $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_N\}$ en mængde af afbildninger $S_i : X \to X$, da defineres*

$$S_{i_1 \dots i_p} = S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_p}$$

hvor $i_j \in \{1, \dots, N\}$ for alle $j \in \{1, \dots, p\}$.
Yderligere defineres for $A \subseteq X$:

$$\mathcal{S}(A) = \bigcup_{S_i \in \mathcal{S}} S_i(A)$$

og

$$A_{i_1 \dots i_p} = S_{i_1 \dots i_p}(A)$$

Definition 7.2. *Similaritet*
En afbildning $S : X \to X$ siges at være en similaritet *dersom:*

$$\forall x, y \in X \exists r \in \mathbb{R}_+ : d(S(x), S(y)) = rd(x, y)$$

I tilfælder $(X, d) = (\mathbb{R}^n, d)$ kan det vises at S er en similaritet hvis og kun hvis S er sammensat af afbildninger

$$\mu_r \circ \tau_b \circ O$$

for passende $\mu_r(x) = rx$, translation $\tau_b = x - b$ og ortogonal transformation O. En similaritet kan således betragtes som en "skalering"af $\mathbb{R}^n$.

Similariteterne er de afbildninger, der ved gentagende anvendelse, skal "frembringe"vores fraktal. Da de fraktaler vi er interesseret i generelt består af iterrationer der formindsker figuren, vil vi fra nu af kun betragte similariteter der er kontraktioner, dvs. $0 < r < 1$.

Eksempel 7.3. *Afbildningerne $S_1, S_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved $S_1(x) = \frac{1}{3}x, S_2(x) = \frac{1}{3}(x-1) + 1$ er similariteter med $r_1 = r_2 = \frac{1}{3}$*

Der knytter sig en vigtig størrelse til en mængde af disse similariteter. Lader vi $r_1, \dots, r_N$ være de tilhørende Lipschitz konstanter, så vil afbildningen $\gamma(t) = \sum_{i=1}^{N} r_i^t$ være en kontinuert aftagende funktion med $\gamma(0) = N$ og $\lim_{t \to \infty} \gamma(t) = 0$. Der findes da et entydigt bestemt $D \in \mathbb{R}$ så

$$\gamma(D) = \sum_{i=1}^{N} r_i^D = 1$$

Definition 7.4. *Lad $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_N\}$ en mængde af similariteter med Lipschitz konstanter $r_1, \dots, r_N$. Det entydigt bestmte $D \in \mathbb{R}$ der opfylder*

$$\sum_{i=1}^{N} r_i^D = 1$$

kaldes for similaritets dimensionen *af $\mathcal{S}$.*

Det vil vise sig at D er Hausdorff dimensionen for visse selv-similære mængder, f.eks. Cantor mængden.

Eksempel 7.5. *Forsætter vi vores eksempel fra før, ser vi at D opfylder $(\frac{1}{3})^D + (\frac{1}{3})^D = 1$ når $D = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$.*

7.1 Invariante mængder

Formålet med dette kapitel, er til enhver mængde af similariteter $\mathcal{S}$, at knytte en afsluttet og begrænset mængde, betegnet $|\mathcal{S}|$. Denne mængde vil i de senere angivne konkrete tilfælde være selv-similær.

Definition 7.6. *Invariant under $\mathcal{S}$*
Lad $\mathcal{S}$ være en endelig mængde af similariteter. En delmængde $K \subseteq X$ siges at være invariant under $\mathcal{S}$ *dersom*

$$\mathcal{S}(K) = K$$

Vi ønsker nu at påpege eksistensen af en entydigt bestemt begrænset og afsluttet mængde, der er invariant under forelagt $\mathcal{S}$. Til dette skal vi bruge fuldstændigheden af mængden af afsluttet og begrænsede mængder i X med Hausdorff metrikken

Definition 7.7. *Hausdorff metrikken*

- *Mængden af afsluttede og begrænsede mængder i X betegnes $\mathcal{B}(X)$*
- *For $E, F \subseteq \mathcal{B}(X)$ defineres Hausdorff metrikken*

$$\rho(E, F) = \max\{d(x, F), d(y, E) \,|\, x \in E, y \in F\}$$

At ρ er en metrik er velkendt fra Mat2AN (se [6]).

Lemma 7.8.
Lad $f : X \to X$ være en afbildning og Lip$(f) = \sup_{x,y \in X}\{\frac{d(f(x),f(y))}{d(x,y)}\}$. Da gælder

1. *$\rho(f(A), f(B)) \leq$ Lip $(f)\rho(A, B)$ for alle delmængder $A, B \subseteq \mathcal{B}(X)$.*
2. *$\rho(\cup_{i\in I} A_i, \cup_{i\in I} B_i) \leq \sup_{i\in I} \rho(A_i, B_i)$ for delmængder $(A_i)_{i\in I}, (B_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{B}(X)$, således at deres forening $\cup_{i\in I} A_i, \cup_{i\in I} B_i$ igen er i $\mathcal{B}(X)$.*

Bevis.

1. Vi har $\rho(f(A), f(B)) = \max\{d(x, f(B)), d(y, f(A)) \,|\, x \in f(A), y \in f(B)\}$. Antag, uden tab af generalitet, at $d(x, f(B)), x \in f(A)$, er den største.

$$\begin{aligned} \max\{d(x, f(B)) \,|\, x \in f(A)\} &= d(f(x_0), f(B)) \quad \text{(for passende } x_0 \in f(A)) \\ &\leq \text{Lip } (f)d(x_0, B) \\ &\leq \text{Lip } (f)\rho(A, B) \end{aligned}$$

2. Vi kan skrive

$$\rho\left(\bigcup_{i\in I} A_i, \bigcup_{i\in I} B_i\right) = \max\{\sup_{x\in\cup_{i\in I}B_i} d(x, \bigcup_{i\in I} A_i), \sup_{y\in\cup_{i\in I}A_i} d(y, \bigcup_{i\in I} B_i)\}$$

Antag, igen uden tab af generalitet, at $\sup_{x\in\cup_{i\in I}B_i} d(x, \bigcup_{i\in I} A_i)$ er den største.

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\cup_{i\in I}B_i} d(x, \bigcup_{i\in I} A_i) &= d(x_0, \bigcup_{i\in I} A_i) \quad \text{(for passende } x_0 \in B_{i_0}\text{)} \\
&\leq d(x_0, A_{i_0}) \\
&\leq \sup_{x\in B_{i_0}} (x, A_{i_0}) \\
&= \rho(A_{i_0}, B_{i_0}) \\
&\leq \sup_{i\in I} \rho(A_i, B_i)
\end{aligned}$$

□

Sætning 7.9. $(\mathcal{B}(X), \rho)$ *er et fuldstændigt metrisk rum.*

Bevis. For et bevis, se [3]. □

Sætning 7.10. *For enhver mængde $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_N\}$ af similariteter findes netop en kompakt mængde K der er invariant under $\mathcal{S}$.*

Yderligere vil der for enhver kompakt mængde F gælde

$$\bigcup_{i_1=1}^{N} \cdots \bigcup_{i_m=1}^{N} S_{i_1\ldots i_m}(F) \underset{m\to\infty}{\rightarrow} K$$

Bevis. Betragt afbildningen $\tilde{S} : \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(X)$, givet ved $\tilde{S}(E) = \cup_{i=1}^{N} S_i(E)$. Denne er en kontraktion i Hausdorff metrikken ved lemma 7.8, og ved Banachs Fikspunktssætning eksisterer en entydigt bestemt afsluttet og begrænset mængde K der er fikspunkt for $\tilde{S}$. Dette er netop vores søgte K. Banachs sætning giver også andet udsagn. □

Definition 7.11. *Den entydigt bestemte afsluttet og begrænset mængde invariant mht. $\mathcal{S}$ betegnes $|\mathcal{S}|$.*

Eksempel 7.12. *Lader vi igen $\mathcal{S} = \{S_1, S_2\}$ med S_1 og S_2 som før, kan det nemt indses at $C(\frac{1}{3})$ netop er den invariante afsluttede og begrænsede mængde $|\mathcal{S}|$*

7.2 Invariante mål

I det følgende er $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_N\}$ fortsat en mængde af similariteter med Lipschitz konstanter $r = \{r_1, \ldots, r_N\}$ og similaritets dimension D.

Analogt til metoden anvendt i forrige kapitel, vil vi til enhver mængde $\mathcal{S}$ af similariteter, knytte et mål, betegnet $\|\mathcal{S}\|$.

Definition 7.13. *Lad μ være et mål på X.*

- *Støtten for μ er supp $(\mu) = X \setminus \cup U$ hvor U'erne er de åbne mængder i X opfyldende $\mu(U) = 0$*
- *μ's masse er afbildningen M fra mængden af mål på X ind i $[0, \infty]$, givet ved $M(\mu) = \mu(X)$.*
- $\mathcal{M} = \{\mu \mid \mu \text{ mål, supp } (\mu) \text{ begrænset}, M(\mu) < \infty\}$
- $\mathcal{M}^1 = \{\mu \in \mathcal{M} \mid M(\mu) = 1\}$
- $\tilde{\mathcal{M}}^1 = \{\mu \in \mathcal{M}^1 \mid \text{supp } (\mu) \text{ kompakt}\}$

Definition 7.14. f_*
For en Lipschitz afbildning $f : X \to X$ defineres

$$f_* : \mathcal{M} \to \mathcal{M}, \;\; f_*(\mu)(E) = \mu(f^{-1}(E))$$

Det ses umiddelbart at $M(f_*(\mu)) = M(\mu)$.

Definition 7.15. *Lad $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_N\}$ være similariteter og lad $\rho = \{\rho_1, \ldots, \rho_N\}$ være en vilkårlig mængde af reelle tal opfyldende $0 < \rho_i < 1$ for alle i og $\sum_{i=1}^N \rho_i = 1$.*

- *$(\mathcal{S}, \rho) : \mathcal{M}^1 \to \mathcal{M}^1$ er afbildningen givet ved $(\mathcal{S}, \rho)(\nu) = \sum_{i=1}^N \rho_i S_{i*}\nu$, dvs for $E \subseteq X$ er*

$$(\mathcal{S}, \rho)(v)(E) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \nu(S_i^{-1}(E))$$

- *$(\mathcal{S}, \rho)^0(\nu) = \nu, (\mathcal{S}, \rho)^1(\nu) = (\mathcal{S}, \rho)(\nu)$ og induktivt for $p \geq 2$*

$$(\mathcal{S}, \rho)^p(\nu) = (\mathcal{S}, \rho)((\mathcal{S}, \rho)^{p-1}(\nu))$$

- *Af hensyn til overskueligheden indføres notationen*

$$v_{i_1 \ldots i_p} = \rho_{i_1} \cdot \ldots \cdot \rho_{i_p} \cdot S_{i_1 \ldots i_p *}(\nu)$$

Bemærkning 7.16. *Af definitionen fås følgende observationer*

1. $(\mathcal{S},\rho)^p(\nu) = \sum_{i_1,\ldots,i_p} \nu_{i_1,\ldots,i_p}$.

2. $M((\mathcal{S},\rho)(\nu)) = M(\nu)$ *og følgeligt er* $M((\mathcal{S},\rho)^p(\nu)) = M(\nu)$. $(\mathcal{S},\rho)$ *er altså en veldefineret afbildning!*

Definition 7.17. *Invariant mht.* $(\mathcal{S},\rho)$
$\nu \in \mathcal{M}^1$ *siges at være invariant mht.* $(\mathcal{S},\rho)$ *dersom*

$$(\mathcal{S},\rho)(\nu) = \nu$$

Afbildningen $(\mathcal{S},\rho)$ er interessant når ρ vælges til at være mængden $r = \{r_1^D,\ldots,r_N^D\}$, hvor r_i er Lipschitz konstanten hørende til S_i og D er similaritets-dimensionen.

Vi vil nu indfører en metrik på $\mathcal{M}^1$, der sikrer os at $\mathcal{M}^1$ bliver fuldstændigt og $(\mathcal{S},\rho)$ bliver en kontraktion. Herved kan vi anvende Banachs fikspunktssætning til at finde et entydigt bestemt invariant mål.

Definition 7.18.

- $\mathcal{BC}(X) = \{f : X \to \mathbb{R} \mid f$ *er kontinuert og begrænset på begrænsede mængder*$\}$.
- *For* $\mu \in \mathcal{M}$ *defineres afbildningen* $\tilde{\mu} : \mathcal{BC}(X) \to [0,\infty[$ *ved*

$$\tilde{\mu}(\phi) = \int \phi d\mu$$

Definition 7.19. $L(\mu,\nu)$
For $\mu,\nu \in \mathcal{M}^1$ *defineres*

$$L(\mu,\nu) = \sup\{\tilde{\mu}(\phi) - \tilde{\nu}(\phi) \mid \phi \in \mathcal{BC}(X), Lip\ \phi \le 1\}$$

Sætning 7.20. L *er en metrik på* $\mathcal{M}^1$

Bevis. Først bør det overvejes om $L(\mu,\nu) < \infty$ for alle $\mu,\nu \in \mathcal{M}^1$. Lad derfor μ,ν være givet, og vælg $x \in X$ og $R \in \mathbb{R}_+$ så supp (μ), supp $(\nu) \subseteq K_R(x)$. Vi har da

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}(\phi) - \tilde{\nu}(\phi) &= \tilde{\mu}(\phi - \phi(x) + \phi(x)) - \tilde{\nu}(\phi - \phi(x) + \phi(x)) \\
&= \tilde{\mu}(\phi - \phi(x)) - \tilde{\nu}(\phi - \phi(x)) \\
&\le \tilde{\mu}(R) - \tilde{\nu}(R) \\
&= 2R \\
&< \infty
\end{aligned}$$

Her følger anden lighed af at

$$\tilde{\mu}(\phi(x)) = \int \phi(x) d\mu = \phi(x)\int d\mu = \phi(x)\mu(X) = \phi(x) = \phi(x)\nu(X) = \int \phi(x) d\nu = \tilde{\nu}(\phi(x))$$

og første ulighed af $\phi - \phi(x)$ er en afbildning hvis billede af $K_R(x)$ er et interval om 0 med radius højest R. Dvs.

$$\tilde{\mu}(\phi - \phi(x)) = \int \phi - \phi(x) d\mu \leq \int R d\mu = \tilde{\mu}(R)$$

$$\tilde{\nu}(\phi - \phi(x)) = \int \phi - \phi(x) d\nu \geq \int -R d\nu = -\tilde{\nu}(R)$$

Vi kan nu vise at L opfylder de 3 metrik aksiomer:

Er $\tilde{\mu}(\phi) - \tilde{\nu}(\phi) \geq 0$ for alle $\phi \in \mathcal{BC}(X)$, så er L altid ikke-negativ. Antag derfor $\tilde{\mu}(\phi) - \tilde{\nu}(\phi) < 0$ for et $\phi \in \mathcal{BC}(X)$. Da vil $-\phi \in \mathcal{BC}(X)$ og, da $\tilde{\mu}$ er lineær for alle $\mu \in \mathcal{M}^1$, er $\tilde{\mu}(-\phi) - \tilde{\nu}(-\phi) = \tilde{\nu}(\phi) - \tilde{\mu}(\phi) > 0$. Dvs. $L(\mu, \nu) \geq 0$. Det indses også nemt at $\mu = \nu$ hvis og kun hvis $L(\mu, \nu) = 0$. Symmetrien følger nu af tilsvarende overvejselser, idet

$$\tilde{\mu}(\phi) - \tilde{\nu}(\phi) = -(\tilde{\nu}(\phi) - \tilde{\mu}(\phi)) = \tilde{\nu}(-\phi) - \tilde{\mu}(-\phi)$$

Da $-\phi \in \mathcal{BC}(X)$ vil identiteten bevares når vi tager supremum over ϕ på begge sider. Yderligere er for $\mu, \nu, \xi \in \mathcal{M}'$ og $\phi, \theta \in \mathcal{BC}(X)$ med Lip θ, Lip $\phi \leq 1$

$$\begin{aligned}
L(\mu, \xi) + L(\xi, \nu) &= \sup_{\phi}\{\tilde{\mu}(\phi) - \tilde{\xi}(\phi)\} + \sup_{\theta}\{\tilde{\xi}(\theta) - \tilde{\nu}(\theta)\} \\
&= \sup_{\theta, \phi}\{\tilde{\mu}(\phi) + \tilde{\xi}(\theta - \phi) - \tilde{\nu}(\theta)\} \\
&\geq \sup_{\theta, \phi}\{\tilde{\mu}(\phi) - \tilde{\nu}(\theta)\} \\
&\geq \sup_{\phi}\{\tilde{\mu}(\phi) - \tilde{\nu}(\phi)\} \\
&= L(\mu, \nu)
\end{aligned}$$

□

Sætning 7.21. *$(\mathcal{S}, \rho)$ er en kontraktion i $(\mathcal{M}^1, L)$.*

Bevis. Lad $\phi \in \mathcal{BC}(X)$ med Lip $\phi \leq 1$ og antag at $r_N = \max\{r_1, \ldots, r_N\}$ er den største af similariteternes lipschitzkonstanter. For $\mu, \nu \in \mathcal{M}^1$ gælder:

$$\begin{aligned}
\widetilde{(\mathcal{S}, \rho)(\mu)}(\phi) - \widetilde{(\mathcal{S}, \rho)(\nu)}(\phi) &= \sum_{i=1}^{N} \widetilde{S_{i*}(\mu)}(\phi) - \sum_{i=1}^{N} \widetilde{S_{i*}(\nu)}(\phi) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \rho_i[\tilde{\mu}(\phi \circ S^{-1}) - \tilde{\nu}(\phi \circ S_i^{-1})] \\
&= \sum_{i=1}^{N} \rho_i r_N[\tilde{\mu}(r_N^{-1}\phi \circ S^{-1}) - \tilde{\nu}(r_N^{-1}\phi \circ S_i^{-1})] \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} \rho_i r_N(\tilde{\mu}(\phi) - \tilde{\nu}(\phi)) \\
&\leq r_N L(\mu, \nu)
\end{aligned}$$

idet vi i første ulighed anvender at $r_N^{-1}\phi(S_i)$ er en Lipschitz afbildning med Lip $r_N^{-1}\phi(S_i) \leq r_N^{-1} \cdot 1 \cdot \rho_i \leq 1$. Tages supremum på venstre side, står det ønskede. □

$\mathcal{M}^1$ har en fuldstændiggørelse $\bar{\mathcal{M}}^1$ og $(\mathcal{S}, \rho)$ har en entydig udvidelse $\overline{(\mathcal{S}, \rho)}$ som kontraktion i $\bar{\mathcal{M}}^1$.

Sætning 7.22. *For enhver endelig mængde $\mathcal{S}$ af similariteter eksisterer et entydigt bestemt mål $\mu \in \bar{\mathcal{M}}^1$ invariant mht. $\overline{(\mathcal{S}, \rho)}$.*

Yderligere vil $\overline{(\mathcal{S}, \rho)}^p(\nu) \to \mu$ i L metrikken for ethvert mål $\nu \in \bar{\mathcal{M}}^1$.

Bevis. Simpel anvendelse af Banach's fixpunkssætning. □

Definition 7.23. *Det entydigt bestemte invariante mål mht. $\overline{(\mathcal{S}, \rho)}$ betegnes $\|(\mathcal{S}, \rho)\|$. Er $\rho = \{r_1^D, \dots, r_N^D\}$ skrives blot $\|\mathcal{S}\|$.*

I næste afsnit viser vi at $\|(\mathcal{S}, \rho)\|$ faktisk ligger i $\mathcal{M}^1$.

7.3 Om $|\mathcal{S}|$ og $\|(\mathcal{S}, \rho)\|$

Dette kapitel omhandler egenskaber for mængden $K = |\mathcal{S}|$ og målet $\|(\mathcal{S}, \rho)\|$. Igen, af hensyn til generaliteten, betragtes en mængde $\rho = \{\rho_1, \dots, \rho_N\}$ opfyldende $\rho_i > 0$ og $\sum_{i=1}^N \rho_i = 1$.

Sætning 7.24. *Der gælder*

1. $K \supseteq K_{i_1} \supseteq K_{i_1 i_2} \supseteq \dots \supseteq K_{i_1 \dots i_p} \supseteq \dots$
2. *diam*$(K_{i_1 \dots i_p}) \to 0$ *for* $p \to \infty$.
3. $\lim_{p\to\infty} K_{i_1 \dots i_p}$ *eksisterer og er en singelton i* K*. Ydermere opstår hvert eneste element i* K *på denne måde.*

Bevis. Vi har

$$\begin{aligned}
K &= \bigcup_{i_1=1}^{N} S_{i_1}(K) \\
&= \bigcup_{i_2=1}^{N} S_{i_2}(\bigcup_{i_1=1}^{N} S_{i_1}(K)) \\
&= \bigcup_{i_2=1}^{N} \bigcup_{i_1=1}^{N} S_{i_1 i_2}(K) \\
&= \bigcup_{i_2=1}^{N} \bigcup_{i_1=1}^{N} K_{i_1 i_2} \\
&\vdots \\
&= \bigcup_{i_p=1}^{N} \dots \bigcup_{i_1=1}^{N} K_{i_1 \dots i_p} \\
&= \bigcup_{i_1,\dots,i_p} K_{i_1 \dots i_p}
\end{aligned}$$

Hvor sidste lighedstegn blot er af hensyn til notationen. Yderligere er

$$\begin{aligned}
K_{i_1 \dots i_p} &= S_{i_1 \dots i_p}(K) \\
&= S_{i_1 \dots i_p}(\bigcup_{i_{p+1}=1}^{N} S_{i_{p+1}}(K)) \\
&= \bigcup_{i_{p+1}=1}^{N} S_{i_1 \dots i_{p+1}}(K) \\
&= \bigcup_{i_{p+1}=1}^{N} K_{i_1 \dots i_{p+1}}
\end{aligned}$$

Specielt må da

$$K \supseteq K_{i_1} \supseteq K_{i_1 i_2} \supseteq \dots \supseteq K_{i_1 \dots i_p} \supseteq \dots$$

Samtidig er

$$\operatorname{diam}(K_{i_1 \dots i_p}) = r_{i_1} \cdot \dots \cdot r_{i_p} \cdot \operatorname{diam}(K) \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Da X er fuldstændigt vil $K_{i_1 \dots i_p}$ konvergere mod en singelton, der, da K specielt er afsluttet, må ligge i K. Det er yderligere klart at alle $k \in K$ opstår som grænseværdier for $S_{i_1 \dots i_p}$. □

Bemærkning 7.25. *Vi har set at ethvert $k \in K$ opstår som grænseværdi for en følge $S_{i_1 \dots i_p}$. Vi kan som sådan altid skrive*

$$k = k_{i_1 \dots i_p \dots}$$

for at symbolisere dette.

Sætning 7.26. *Lad $A \subseteq X$ være ikke-tom og begrænset, og lad $k_{i_1 \dots i_p \dots} \in K$. Da gælder*

$$d(A_{i_1 \dots i_p}, k_{i_1 \dots i_p \dots}) \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Bevis.

$$\begin{aligned} d(A_{i_1 \dots i_p}, k_{i_1 \dots i_p \dots}) &= d(S_{i_1 \dots i_p}(A), S_{i_1 \dots i_p}(k_{i_p \dots})) \\ &\leq r_{i_1} \cdot \ldots \cdot r_{i_p} d(A, k_{i_p \dots}) \\ &\leq r_{i_1} \cdot \ldots \cdot r_{i_p} \sup\{d(a,k) \mid a \in A, k \in K\} \end{aligned}$$

og sidstnævnte går mod 0 som $p \to \infty$ da $\sup\{d(a,k) \mid a \in A, k \in K\}$ er en konstant. □

Definition 7.27.

- *Lad $\tilde{r} : \{1, \dots, N\} \to]0,1[$ være målet givet ved $\tilde{r}(i) = \rho_i$.*
- *Lad τ være produktmålet på $\mathcal{C}(N)$ induceret af $\tilde{r}$ på hver af faktorene $\{1, \dots, N\}$.*
- *Lad $\pi : \mathcal{C}(N) \to K$ være koordinat afbildningen givet ved $\pi(i) = k_i$.*

Sætning 7.28. *Koordinat afbildningen er kontinuert ($\mathcal{C}(N)$ har produkttopologien jf. kapitel 4)*

Bevis. Lad $i = i_1 \dots i_p \dots \in \mathcal{C}(N)$ og $\epsilon > 0$. Idet $\pi(i) = k_{i_1 \dots i_p \dots}$ eksisterer $q \in \mathbb{N}$ således at

$$K_{i_1 \dots i_q} \subseteq \{k \in K \mid d(k, \pi(i)) < \epsilon\} = U$$

Da $K_{i_1 \dots i_q}$ er billedet af den åbne mængde

$$V = \{i' \in \mathcal{C}(N) \mid i'_1, \dots, i'_q = i_1, \dots, i_q\}$$

og

$$\pi^{-1}(U) = V$$

har vi til enhver omegn U(kuglerne udgør en basis!) af et vilkårligt punkt i K, fundet en omegn V i $\mathcal{C}(N)$ så $\pi^1(U) \subseteq V$, dvs. π er kontinuert. □

Næste sætning illustrerer at der, ikke overraskene, er sammenhæng mellem $|\mathcal{S}|$ og $\|(\mathcal{S}, \rho)\|$:

Sætning 7.29.

1. $\|(\mathcal{S}, \rho)\| = \pi_* \tau$
2. *supp* $\|(\mathcal{S}, \rho)\| = |\mathcal{S}|$

Bevis.

1. Lad for $j \in \{1, \ldots, N\}$ $\sigma_j : \mathcal{C}(N) \to \mathcal{C}(N)$ være givet ved $\sigma_j(i) = ji$. Da er

$$\begin{aligned} \pi \circ \sigma_j(i_1 \ldots i_p \ldots) &= \pi(ji_1 \ldots i_p \ldots) = k_{ji_1 \ldots i_p \ldots} \\ S_j \circ \pi(i_1 \ldots i_p \ldots) &= S_j(k_{i_1 \ldots i_p \ldots})k_{ji_1 \ldots i_p \ldots} \end{aligned}$$

dvs. $\pi \circ \sigma_j = S_j \circ \pi$. Vi har da

$$(\mathcal{S}, \rho)(\pi_* \tau) \sum_{j=1}^{N} \rho_j S_{j*}(\pi_* \tau) \sum_{i=j}^{N} \rho_j \pi_*(\sigma_{j*} \tau) \pi_* \sum_{j=1}^{N} \rho_j \sigma_{j*}(\tau) = \pi_* \tau$$

dvs. $\pi_* \tau$ er $(\mathcal{S}, \rho)$ invariant, og ved entydighed heraf, må $\pi_* \tau = \|(\mathcal{S}, \rho)\|$.

2. $\subseteq$ Tag $x \in$ supp $\pi_* \tau$. Der må gælder at $\forall U \in \mathcal{U}(x)$ er $\pi_* \tau(U) \neq 0$ for antag modsat, da vil $U \cap \text{supp } \pi_* \tau = \emptyset$, specielt vil $x \notin$ supp $\pi_* \tau$. Altså

$$0 \neq \pi_* \tau(U) = \tau(\pi^{-1}(U))$$

og $U \cap K \neq \emptyset$. Betragt nu omegnene $U_\epsilon = K_\epsilon(x), \epsilon > 0$. Der gælder $\lim_{\epsilon \to 0} U_\epsilon = x$ og $U_\epsilon \cap K \neq \emptyset$ for alle $\epsilon > 0$, dvs. $x \in K$.

$\supseteq$ Tag $k = k_{i_1 \ldots i_p \ldots} \in K$. For alle $\epsilon > 0$ er $\pi^{-1}(K_\epsilon(k)) \neq \emptyset$ og åben i $\mathcal{C}(N)$. Vi har $k_{i_1 \ldots i_p \ldots} \in K_{i_1 \ldots i_p}$ for alle $p \in \mathbb{N}$ og ved beviset for kontinuiteten af π er

$$\pi^{-1}(K_{i_1 \ldots i_p}) = \{i' \in \mathcal{C}(N) \mid i'_1, \ldots, i'_p = i_1, \ldots, i_p\}$$

åben i $\mathcal{C}(N)$. Vi kan direkte finde målet:

$$\begin{aligned} \pi_* \tau(\pi^{-1}(K_{i_1 \ldots i_p})) &= \pi_* \tau(\{i_1\} \times \ldots \times \{i_p\} \times \{1, \ldots, N\} \times \{1, \ldots, N\} \times \ldots) \\ &= \rho_1 \cdot \ldots \cdot \rho_p \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \\ &= \rho_1 \cdot \ldots \cdot \rho_p \\ &> 0 \end{aligned}$$

Dvs. $K_\epsilon(k) \cap \text{supp } \pi_* \tau \neq \emptyset$ for alle $\epsilon > 0$, hvoraf følger $k \in$ supp $\pi_* \tau$.

□

Korollar 7.30. $|(\mathcal{S}, \rho)\| \in \mathcal{M}^1$.

Bevis. Lad $\mu = \|(\mathcal{S}, \rho)\|$. Det er tilstrækkeligt at vise at μ har begrænset støtte og total masse 1. Vi har lige vist supp $\mu = |\mathcal{S}|$ der er kompakt, specielt begrænset. Vi kan ligeledes finde massen:

$$\mu(X) = \pi_* \tau(X) = \tau(\pi^{-1}(X)) = \tau(C(N)) = \tau(\prod_{i=1}^{\infty} \{1, \ldots, N\}) = \prod_{i=1}^{\infty} 1 = 1$$

Dvs. $\mu \in \mathcal{M}^1$. □

Definition 7.31. *Lad $I = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \subseteq P_N$. Da er:*

1. *$\mathcal{S}_I$ mængden af similariteter $\mathcal{S}_I = \{S_{\alpha_1}, \dots, S_{\alpha_m}\}$.*
2. *$\tilde{r}_I : I \to]0,1[$ afbildningen givet ved $\tilde{r}_I(\langle i_1, \dots, i_p\rangle) = \tilde{r}(i_1) \cdot \ldots \cdot \tilde{r}(i_p)$.*

Givet I som ovenfor har vi altså skabt os en ny (endelig) mængde af similariteter. Derudover har vi konstrueret os en multimængde $\tilde{r}_I(I) = \{\tilde{r}_I(i_1), \dots, \tilde{r}_I(i_p)\}$ af samme kardinalitet. Afbildningen $(\mathcal{S}_I, \tilde{r}_I(I))$ er således veldefineret ved pkt. (2) i sætning 7.34 dersom I er stram.

Lemma 7.32.

$$\sum_{i_1,\dots,i_p} \rho_{i_1} \cdot \ldots \cdot \rho_{i_p} (\sum_{i=1}^{N} \rho_i) = 1$$

Bevis. Bevis ved induktion efter p. For $p = 1$ er udsagnet sandt. Antag nu $\sum_{i_1,\dots,i_p} \rho_{i_1} \cdot \ldots \cdot \rho_{i_p} = 1$.

$$\sum_{i_1,\dots i_{p+1}} \rho_{i_1} \cdot \ldots \cdot \rho_{i_p}\rho_{i_{p+1}} = \sum_{i_{p+1}=1}^{N} \rho_{i_{p+1}} \left(\sum_{i_1,\dots,i_p} \rho_{i_1} \cdot \ldots \cdot \rho_{i_p} \right) = \sum_{i_{p+1}=1}^{N} \rho_{i_{p+1}} = 1$$

□

Ovenstående resultat er ækvivalent med

$$\sum_{\alpha \in P_N, l(\alpha)=p} \tilde{r}_I(\alpha) = 1$$

Lemma 7.33. *Lad $\alpha' = \langle i_1, \dots, i_p\rangle \in P_N$ og $p_0 \geq p$. Da gælder:*

$$\sum_{\substack{\alpha \in P_N, l(\alpha)=p_0 \\ \alpha' \prec \alpha}} \tilde{r}_I(\alpha) = \tilde{r}_I(\alpha')$$

Bevis. Lad $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ være mængden af tupler der har α' som initial segment og længde p_0, og lad $\{\beta_1, \dots, \beta_l\}$ være tupler opfyldende $\alpha_j = \alpha'\beta_j$. En typisk β_j er da på formen $\beta_j =< i_{p+1}, \dots, i_{p_0} >$, og alle de mulige kombinationer heraf repræsenteres!

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\alpha\in P_N, l(\alpha)=p_0\\ \alpha'\prec\alpha}} \tilde{r}_I(\alpha) &= \sum_{i=1}^{l} \tilde{r}_I(\alpha_i)\\
&= \sum_{i=1}^{l} \tilde{r}_I(\alpha'\beta_i)\\
&= \sum_{i=1}^{l} \tilde{r}_I(\alpha')\tilde{r}_I(\beta_i)\\
&= \tilde{r}_I(\alpha')\sum_{i=1}^{l} \tilde{r}_I(\beta_i)\\
&= \tilde{r}_I(\alpha')
\end{aligned}$$

hvor $\sum_{i=1}^{l} \tilde{r}_I(\beta_i) = 1$ idet alle β_i'erne har samme længde. □

Sætning 7.34. *Lad $I \subseteq P_N$ være endelig. Da gælder*

1. $|\mathcal{S}_I| = \{k_\beta \mid b \in \hat{I}\}$
2. $\sum_{\alpha\in I} \tilde{r}_I(\alpha) = 1$ *dersom I er stram.*
3. *I er sikker* $\Rightarrow |\mathcal{S}_I| = |\mathcal{S}|$
4. *I er stram* $\Rightarrow \|(\mathcal{S}_I, \tilde{r}_I(I))\| = \|(\mathcal{S}, \rho)\|$

Bevis. Lad $I = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$.

1. Vi kan identificere $\hat{I} = \mathcal{C}(m)$ ved $\alpha_i \mapsto i$. Resten følger nu af sætning 7.24.
2. Ved det foregående lemma er

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{\alpha\in P_N, l(\alpha)=p_0} \tilde{r}_I(\alpha)\\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{\substack{\alpha\in P_N, l(\alpha)=p_0\\ \alpha_i\prec\alpha}} \tilde{r}_I(\alpha)\\
&= \sum_{i=1}^{m} \tilde{r}_I(\alpha_i)
\end{aligned}$$

   hvor andet lighedstegn følger af at I er stram, dvs. der er netop et initial segment til hvert α.

3. Der gælder oplagt $|\mathcal{S}_I| \subseteq |\mathcal{S}|$ for alle $I \subseteq P_N$. Lad nu I være sikker og tag $k = k_{i_1 \dots i_p \dots} \in |\mathcal{S}|$. Da $\mathcal{C}(N) = \hat{I}$ vil

$$i_1 \dots i_p \dots = \alpha_1 \dots \alpha_p \dots$$

for passende α'er i I, dvs. $k \in |\mathcal{S}_I|$.

4. Sætning 6.6 giver at der findes en bijektiv afbildning $g : \mathcal{C}(M) \to \mathcal{C}(N)$ givet ved $g(i_1 i_2 \dots) = \alpha_{i_1}\alpha_{i_2} \dots$. Sætning 7.29 giver at $||(\mathcal{S}, \rho)|| = \pi_* \tau$ og $||(\mathcal{S}_I, \tilde{r}_I(I))|| = \pi_{I*}\tau_I$. Det ses nu at $\pi_I = \pi g$ og $\tau_I = \tau g$. Da både g,π og π_I er bijektive fås for en mængde $A \subseteq K$ at

$$\tau_I(\pi_I^{-1}(A)) = \tau g(g^{-1}\pi^{-1}(A)) = \tau(\pi^{-1}(A))$$

hermed er det ønskede vist.

□

7.4 Selv-similaritet af mængder

Igen er $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_N\}$ similariteter med similiaritetskonstanter $\{r_1, \dots, r_N\}$ og similaritetsdimension D.

Definition 7.35. *Selv-Similær*
Lad $A \subseteq X$ have Hausdorff dimension k. A siges at være selv-similær mht. $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_N\}$ dersom

1. *A er invariant mht. $\mathcal{S}$.*

2. *$\mathcal{H}^k(A) > 0$*

3. *$\mathcal{H}^k(A_i \cap A_j)$ for alle $i, j \in \{1, \dots, N\}$ så $i \neq j$.*

Eksempel 7.36. *Vi har fundet Hausdorff dimensionen af $C(\frac{1}{3})$ til at være $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$. Da $C(\frac{1}{3})_1$ og $C(\frac{1}{3})_2$ er disjunkte, er målet specielt 0. $C(\frac{1}{3})$ er da selv-similær mht. $|\mathcal{S}| = \{S_1, S_2\}$.*

I det følgende vil vi forlade den generelle tilgang til emnet, lade $X = \mathbb{R}^n$ og kun anvende resultaterne i de foregående kapitler med $\rho = \{r_1^D, \dots, r_N^D\}$.

Sætning 7.37. *Lad $K = |\mathcal{S}|$ og $\dim_H K = d$. Da gælder:*

1. *$\mathcal{H}^D(K) < \infty$, specielt er $d \leq D$.*

2. *Dersom $0 < \mathcal{H}^d < \infty$ gælder*

$$K \text{ er selv-similær } \Leftrightarrow d = D$$

Bevis.

1. Vi har fra 7.24 at $K = \bigcup_{i_1,\dots,i_p} K_{i_1\dots i_p}$ og

$$\sum_{i_1,\dots,i_p} \operatorname{diam}(K_{i_1\dots i_p})^D \sum_{i_1,\dots,i_p} r_{i_1}^D \cdot \ldots \cdot r_{i_p}^D \cdot \operatorname{diam}(K) = \operatorname{diam}(K)$$

   Antag nu at $r_N = \max\{r_1, \dots, r_N\}$. Da er $\operatorname{diam}(K_{i_1\dots i_p}) \leq r_N^p \operatorname{diam}(K)$ og $r_N^p \operatorname{diam}(K) \to 0$ når $p \to \infty$, dvs. $K_{i_1\dots i_p}$'erne udgør en overdækning, hvis diametre kan gøres vilkårlige små ved at vælge p stor nok, og hvis sum netop er $\operatorname{diam}(K)$, specielt endelig, dvs. $d \leq D$.

2. Nu er $0 < \mathcal{H}^d(K) < \infty$.

"$\Rightarrow$" Vi har

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^d(K) &= \mathcal{H}^d(\cup_{i=1}^N K_i) \\
&= \sum_{i=1}^N \mathcal{H}^d(K_i) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \mathcal{H}^d(K_i \cap K_j) \\
&= \sum_{i=1}^N \mathcal{H}^d(K_i) \\
&= \sum_{i=1}^N r_i^d \mathcal{H}^d(K)
\end{aligned}$$

Heraf sluttes at $\sum_{i=1}^N r_i^d = 1$, dvs. $d = D$.

"$\Leftarrow$" Vi har

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^D(K) &= \mathcal{H}^D(\cup_{i=1}^N K_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^N \mathcal{H}^D(K_i) \\
&= \sum_{i=1}^N r_i^D \mathcal{H}^D(K_i) \\
&= \sum_{i=1}^N \mathcal{H}^D(K_i)
\end{aligned}$$

Heraf sluttes $\mathcal{H}^D(K_i \cap K_j) = 0$ for alle $i \neq j$.

□

Eksempel 7.38. *Vi kender dimensionen af* $C(\frac{1}{3})$*. Da den er sammenfaldende med similaritetsdimensionen giver 7.37 at* $C(\frac{1}{3})$ *er Selv-similær. Omvendt, ved vi at* $C(\frac{1}{3})$ *er selvsimilær, så Hausdorff dimensionen må være lig Similaritetsdimensionen.*

7.5 Hausdorff dimensionen af Selv-Similærer mængder

Definition 7.39. *ÅMB*
$\mathcal{S}$ *siges at opfylde* Åben mængde betingelsen *dersom der eksisterer en ikke-tom åben mængde* O *så*

1. $\bigcup_{i=1}^{N} S_i(O) \subseteq O$.
2. $S_i(O) \cap S_j(O) = \emptyset$ *for* $i \neq j$.

Alt hvad vi gør i det følgende er baseret på at $\mathcal{S}$ opfylder ÅMB. Det er værd at gøre sig den overvejelse, om der overhovedet eksisterer sådanne $\mathcal{S}$:

Eksempel 7.40. $\mathcal{S} = \{S_1, S_2\}$ *opfylder klart ÅMB med* $O =]0,1[$*. Hvert trin i iterationen giver os samme interval som afbildet under "Cantor Mængden"i det tidligere kapitel, blot med endepunkterne fjernet.*

Bemærkning 7.41. *Det ses nemt at for* $S_1, \ldots, S_N$ *similariteter, vil* $S_{i_1 \ldots i_p}$ *respekterer operatorene*$^{-}$,$^{\circ}$, δ *og* $\complement$*. Således kan vi i det følgende frit skrive* $\bar{O}_{i_1 \ldots i_p}$ *for* $\overline{O_{i_1 \ldots i_q}}$.

Sætning 7.42. *Lad* $\mathcal{S}$ *opfylde ÅMB og lad* O *være den åbne mængde herfra. Da gælder:*

1. $O \supseteq O_{i_1} \supseteq O_{i_1 i_2} \supseteq \ldots \supseteq O_{i_1 i_2 \ldots i_p} \supseteq \ldots$.
2. $K_{i_1 \ldots i_p} \subseteq \bar{O}_{i_1 \ldots i_p}$
3. $K_{j_1 \ldots j_p} \cap O_{i_1 \ldots i_p} = \emptyset$ *dersom* $(j_1, \ldots, j_p) \neq (i_1, \ldots, i_p)$
4. *Dersom* $I \subseteq P_N$ *er stram, er* O_α*'erne,* $\alpha \in I$*, parvist disjunkte.*

Bevis.

1. Oplagt idet, pr. antagelse, $S_i(O) \subseteq O$ for alle i.
2. $\bar{O}$ er afsluttet og ikke-tom. Tag $a \in \bar{O}$. Ved 7.26 vil for enhver følge $i_1, \ldots, i_p, \ldots \in \mathcal{C}(N)$ gælde

$$d(\{a\}_{i_1 \ldots i_p}, k_{i_1 \ldots i_p}) \underset{p \to \infty}{\to} 0$$

Da $\bar{O}$ er afsluttet vil altså

$$\lim_{p\to\infty} S_{i_1\dots i_p}(a) = k_{i_1\dots i_p\dots} \in \bar{O}$$

Ydermere vil ethvert punkt i K opstå på denne måde, dvs. $K \subseteq \bar{O}$. udsagnet følger nu let.

3. Antag $(j_1,\dots,j_p) \neq (i_1,\dots,i_p)$. Vi ved at $O_{j_1\dots j_p} \cap O_{i_1\dots i_p} = \emptyset$ (ÅMB egenskaben). Derfor må specielt $\bar{O}_{j_1\dots j_p} \cap O_{i_1\dots i_p} = \emptyset$ og det ønskede følger idet pkt.(2) giver at $K_{i_1\dots i_p} \subseteq \bar{O}_{i_1\dots i_p}$.

4. Lad I være stram og lad $\alpha,\beta \in I$ så $\alpha \neq \beta$. Lad $p \geq 0$ være det største heltal således at der er en p-tuppel $\langle i_1,\dots,i_p\rangle \prec \alpha,\beta$. Da i er stram eksisterer $i_{p+1} \neq j_{p+1}$ så

   $$\langle i_1,\dots,i_p,i_{p+1}\rangle \prec \alpha, \langle i_1,\dots,i_p,j_{p+1}\rangle \prec \beta$$

   Men da er

   $$O_\alpha \subseteq O_{i_1\dots i_p,i_{p+1}}, O_\beta \subseteq O_{i_1\dots i_p,j_{p+1}}$$

   ved pkt.(1) ovenfor, specielt er

   $$O_\alpha \cap O_\beta \subseteq S_{i_1\dots i_p}(O_{i_{p+1}} \cap O_{j_{p+1}}) = \emptyset$$

□

Lemma 7.43. *Lad $c_1, c_2, \rho \in]0,\infty[$ så $c_1 < c_2$. Lad $(U_j)_{j\in J}$ være en familie af åbne mængder. Antag at hver U_j indeholder en kugle med radius ρc_1 og er indeholdt i en kugle med radius ρc_2. Da er $\bar{U}_j \cap K_\rho(0) \neq \emptyset$ for højest $(\frac{1+2c_2}{c_1})^n$ af U_j'erne, hvor n er dimensionen af $\mathbb{R}^n$.*

Bevis. Antag $\bar{U}_1,\dots,\bar{U}_k$ snitter ikke-tomt med $K_\rho(0)$. Da er hver af disse $\bar{U}_j$'er indeholdt i kuglen $K_{(1+2c_2)\rho}(0)$. Nu må summen af volumen af de små kugler i $U_1,\dots,U_k$ være mindre end volumen af $K_{(1+2c_2)\rho}(0)$, dvs

$$k\alpha_n\rho^n c_1^n \leq \alpha_n(1+2c_2)^n\rho^n$$

hvilket giver

$$k \leq (\frac{1+2c_2}{c_1})^n$$

□

Lad nu $\mu = \|\mathcal{S}\|$. Vi er nu tæt på vores hovedsætning for Hausdorff dimensionen. Det sidste vi behøver er nedenstående ikke-trivielle sætning.

Sætning 7.44. *Antag $\mathcal{S}$ opfylder ÅMB med en begrænset åben mængde. Da gælder:*

$$\forall k \in K \exists \lambda_1,\lambda_2 : 0 < \lambda_1 \leq \theta_D(\mu,k) \leq \theta^D(\mu,k) \leq \lambda_2 < \infty$$

Bevis. Vi bestemmer først λ_1:
Bemærk at

$$\begin{aligned}\mu(K_{i_1\ldots i_p}) &\geq \mu_{i_1\ldots i_p}(K_{i_1\ldots i_p})\\ &= r_{i_1}^D\cdot\ldots\cdot r_{i_p}^D\mu(S_{i_1\ldots i_p}^{-1}(K_{i_1\ldots i_P}))\\ &= r_{i_1}^D\cdot\ldots\cdot r_{i_p}^D\mu(K)\\ &= r_{i_1}^D\cdot\ldots\cdot r_{i_p}^D\end{aligned}$$

hvor $\mu(K)=\mu(X)=1$ idet supp $(\mu)=K$.

Lad $k=k_{i_1,\ldots,i_p,\ldots}\in K$ og betragt $K_\rho(k)$ for et $\rho>0$. Da $k\in K_\rho(k)$ og $\lim_{p\to\infty}K_{i_1\ldots i_p}=k$, vil der eksisterer et mindste p således at

$$K_{i_1\ldots i_p}\subseteq K_\rho(k)$$

Herved slutter vi

$$\mathrm{diam}(K_{i_1\ldots i_{p-1}})\geq 2\rho$$

og med konventionen $r_1\leq\ldots\leq r_N$ fås

$$\begin{aligned}r_{i_1}\cdot\ldots\cdot r_{i_{p-1}}\cdot r_p\cdot\mathrm{diam}(K) &\geq r_{i_1}\cdot\ldots\cdot r_{i_{p-1}}\cdot r_1\cdot\mathrm{diam}(K)\\ &\geq 2r_1\rho\\ &\geq r_1\rho\end{aligned}$$

Alt i alt har vi

$$\begin{aligned}\frac{\mu(K_\rho(k))}{\alpha_D\rho^D} &\geq \frac{\mu(K_{i_1\ldots i_p})}{\alpha_D\rho^D}\\ &\geq \frac{r_{i_1}^D\cdot\ldots\cdot r_{i_p}^D}{\alpha_D\rho^D}\\ &\geq \frac{r_1^D}{\alpha_D\cdot\mathrm{diam}(K)^D}\end{aligned}$$

hvor sidste ulighed følger af:

$$r_{i_1}\cdot\ldots\cdot r_{i_p}\cdot\mathrm{diam}(K)\geq r_1\rho$$
$$\Downarrow$$
$$r_{i_1}^D\cdot\ldots\cdot r_{i_p}^D\geq\frac{r_1^D\rho^D}{\mathrm{diam}(K)^D}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{r_{i_1}^D\cdot\ldots\cdot r_{i_p}^D}{\rho^D}\geq\frac{r_1^D}{\mathrm{diam}(K)^D}$$

Da $\rho>0$ var vilkårlig, vil specielt

$$\theta^D(\mu,k)=\limsup_{\rho\to 0}\frac{\mu(K_\rho(k))}{\alpha_D\rho^D}\geq\frac{r_1^D}{\mathrm{diam}(K)^D}>0$$

Nu går vi den anden vej. Denne er noget mere kompliceret!

Lad O være den åbne mængde der eksisterer pr. antagelse af ÅMB. O indeholder en kugle af radius c_1. Lad O være indeholdt i en kugle af radius c_2.

Lad $j_1 \dots j_q \dots \in \mathcal{C}(N)$ og $\rho > 0$ være givet. Vælg det mindste q således at

$$r_1\rho \leq r_{j_1} \cdot \ldots \cdot r_{i_q} \leq \rho$$

Herved defineres en q-tuppel $\langle j_1, \dots, j_q \rangle$. Lad I_ρ være mængden af disse tupler, når vi lader $j_1 \dots j_q \dots$ gennemløbe $\mathcal{C}(N)$.

Mængden I_ρ er endelig, thi under antagelsen $r_1 \leq \ldots \leq r_N$ vil for fast $\rho > 0$ gælde $\prod_{i=1}^{M} r_N < \rho$ for et passende $M \in \mathbb{N}$. Dvs. tupplerne i I_ρ er begrænset i længde, specielt er der kun endelig mange af dem.

Yderligere vil I_ρ være stram: I_ρ indeholder pr. konstruktion et initialsegment for ethvert $\beta \in \mathcal{C}(N)$. Antag at $\alpha, \gamma \in I_\rho$ og opfylder $\alpha, \gamma \prec \beta$ for et $\beta \in \mathcal{C}(N)$. Der må da gælde at $\alpha = \gamma$ thi ellers kan vi uden tab af generalitet antage

$$\alpha = \langle j_1, \dots, j_q \rangle \prec \gamma = \langle j_1, \dots, j_q, j_{q+1}, \dots, j_{q+p} \rangle$$

Da specielt $\alpha \in I_\rho$ er

$$r_1\rho \leq r_{j_1} \cdot \ldots \cdot r_q \leq \rho$$

Dette er i modsrid med at $p + q$ var mindste tal så

$$r_1\rho \leq r_{j_1} \cdot \ldots r_q \cdot r_{q+1} \cdot \ldots \cdot r_{j_{q+p}} \leq \rho$$

Fra 7.42 følger det nu at $\{O_{j_1 \dots j_q} \mid \langle j_1, \dots, j_q \rangle \in I_\rho\}$ er disjunkte åbne mængder. Pr. ovenstående antagelse om kuglerne, vil hver $O_{j_1 \dots j_q}$ indeholde en kugle af radius $r_{j_1} \cdot \ldots \cdot r_{j_q} c_1$ og være indeholdt i en kugle af radius $r_{j_1} \cdot \ldots \cdot r_{j_q} c_2$

Ved lemma 7.43 vil da højest $(\frac{(1+2c_2)}{r_1 c_1})^n$ af $\bar{O}_{i_1 \dots i_q}$'erne snitte ikke-tomt med $K_\rho(k)$. Ved 7.42 er $K_{j_1 \dots j_q} \subseteq \bar{O}_{j_1 \dots j_q}$, så denne øvre grænse vil specielt holde for snit med $K_{i_1 \dots i_q}$

Betragt nu målene $\mu_{i_1 \dots i_q}$ for $\langle i_1, \dots, i_q \rangle \in I_\rho$. Ved 7.29 er supp $(\mu) = K$. Pr. definition er

$$\mu_{i_1 \dots i_q}(A) = r_{i_1}^D \cdot \ldots \cdot r_{i_q}^D \mu(S_{i_1 \dots i_q}^{-1}(A))$$

Vi har altså

$$\begin{aligned} \mu_{i_1 \dots i_q}(A) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \mu(S_{i_1 \dots i_q}^{-1}(A)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad S_{i_1 \dots i_q}^{-1}(A) \subseteq \complement K \\ &\Leftrightarrow \quad A \subseteq S_{i_1 \dots i_q}(\complement K) \\ &\Leftrightarrow \quad A \subseteq \complement K_{i_1 \dots i_q} \end{aligned}$$

dvs. supp $(\mu_{i_1\dots i_q}) = K_{i_1\dots i_q}$. Da er

$$\begin{aligned}
\mu_{i_1\dots i_q}(K) &= \mu_{i_1\dots i_q}(K_{i_1\dots i_q}) \\
&= r_{i_1}^D \cdot \ldots \cdot r_{i_q}^D \cdot \mu(S_{i_1\dots i_q}^{-1}(K_{i_1\dots i_q}) \\
&= r_{i_1}^D \cdot \ldots \cdot r_{i_q}^D \cdot \mu(K) \\
&= r_{i_1}^D \cdot \ldots \cdot r_{i_q}^D \\
&\leq \rho^D
\end{aligned}$$

Yderligere er

$$\mu = \sum_{\langle i_1,\dots,i_q\rangle \in I_\rho} \mu_{i_1\dots i_q}$$

idet $\|\mathcal{S}, r\| = \|\mathcal{S}_I, \tilde{r}_I(r)\|$.

Alt i alt er

$$\frac{\mu(K_\rho(k))}{\alpha_D \rho^D} = \frac{\sum_{\langle i_1,\dots,i_q\rangle \in I_\rho} \mu_{i_1\dots i_q}(K_\rho(k))}{\alpha_D \rho^D}$$

Højest $(\frac{(1+2c_2)}{r_1 c_1})^n$ af $K_{i_1\dots i_q}$ snitter ikke-tomt med kuglen $K_\rho(k)$, dvs. højest et tilsvarende antal af målene i summen har $\mu_{i_1\dots i_q}(K_\rho(k)) \neq 0$, og de af dem der har positivt mål, er begrænset af ρ^D. Dvs:

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{\langle i_1,\dots,i_q\rangle \in I_\rho} \mu_{i_1\dots i_q}(K_\rho(k))}{\alpha_D \rho^D} &\leq \frac{(\frac{(1+2c_2)}{r_1 c_1})^n \rho^D}{\alpha_D \rho^D} \\
&= \frac{(1+2c_2)^n}{r_1^n c_1^n \alpha_D}
\end{aligned}$$

Da $\rho > 0$ var vilkårlig, er

$$\theta^D(\mu, k) = \limsup_{\rho \to 0} \frac{\mu(K_\rho(k))}{\alpha_D \rho^D} \leq \frac{(1+2c_2)^n}{r_1^n c_1^n \alpha_D} < \infty$$

□

Hovedsætningen giver os nu en simpel måde at bestemme Hausdorff-dimensioner på.

Sætning 7.45. *Antag at $\mathcal{S}$ opfylder ÅMB med en begænset mængde, og lad $K = |\mathcal{S}|$ og D similaritetsdimensionen af $|\mathcal{S}|$.*
Da gælder:

$$\dim_H K = D$$

Bevis. Fra 7.44 ved vi at for alle $k \in K$ er

$$0 < \lambda_1 \leq \theta^D(\mu, k) \leq \lambda_2 < \infty$$

for passende λ_1, λ_2. Da yderligere $\mu(K) = 1$ giver 4.6 at

$$0 < 2^{-D}\lambda_2^{-1} \leq \mathcal{H}^D(K) \leq \lambda_1^{-1} < \infty$$

Dvs. $\dim_H K = D$ som ønsket. $\square$

Eksempel 7.46. *Da* $\mathcal{S} = \{S_1, S_2\}$ *opfylder ÅMB med den begrænsede åbne mængde* $]0,1[$ *er* $\dim_H C(\frac{1}{3}) = D = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$.

8 Kendte Selv-similære mængder

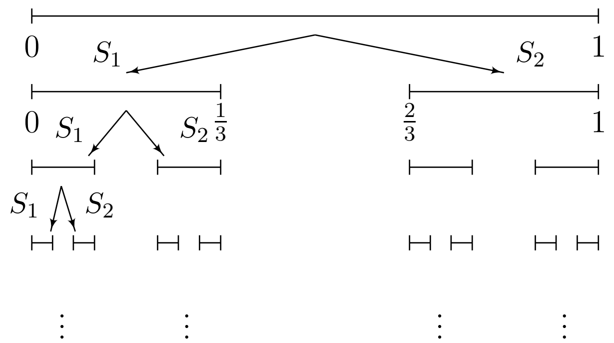
Vi så tidligere på Cantor mængden, som vi viste en fraktal, og Koch kurven, hvor vi udsatte beviset for at den var en fraktal. Vi kan nu høste frugten af vores arbejde og med lethed finde Hausdorff dimensionerne.

8.1 Cantor mængden

$C(\lambda)$ er en relativt overskuelig mængde, idet den "kun"er en delmængde af $\mathbb{R}$. Det er derfor ikke svært at indse at afbildningerne $S_1, S_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$S_1(x) = \lambda x, \;\; S_2(x) = \lambda(x-1) + 1$$

er similariteter der frembringer Cantormængden, hver med similaritetskonstant λ. For $\lambda = \frac{1}{3}$ har vi illustrationen:



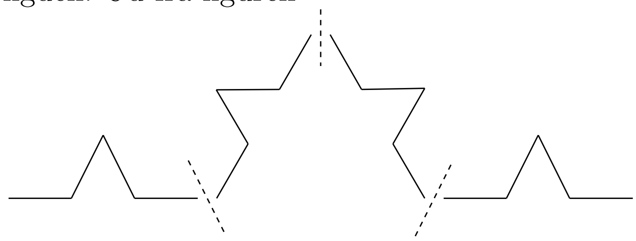
$\mathcal{S} = \{S_1, S_2\}$ har similaritetsdimension $D = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$. Da $\mathcal{S}$ opfylder ÅMB med den åbne og begrænsede mængde $]0,1[$, giver 7.45 at

$$\dim_H C(\lambda) = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$$

hvilket stemmer overens med den tidligere fundne dimension.

8.2 Koch kurven

At finde selvsimilariteter for Koch kurven går noget nemmere med en anden opfattelse af mængden. Ud fra figuren



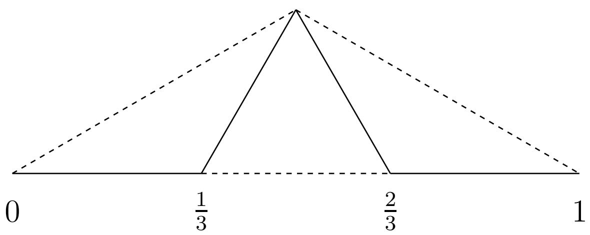
ses det at kurven, på ethvert niveu i iterationen, er sammensat af 4 kopier af sig selv. Vi starter i trin 0 med en linie af længde 1(Se kapitel om fraktaler). Denne skaleres i trin 1, hvor vi får en linie af længde $\frac{1}{3}$, sammensat 4 gange med sig, og evt. drejet i en vinkel på $\frac{\pi}{3}$ i positiv eller negativ retning. Denne process bliver så ved. Dvs. de similariteter vi skal bruge skal netop kunne skalere og dreje samt tanslatere. Man kan hurtigt overbevise sig selv om at Koch kurven er frembragt af similariteterne $S_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, der for $i = 1, 2, 3, 4$ og $x \in \mathbb{R}^2$ er givet ved:

$$\begin{aligned}
S_1(x) &= \frac{1}{3}x \\
S_2(x) &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{6}) & -\sin(\frac{\pi}{6}) \\ \sin(\frac{\pi}{6}) & \cos(\frac{\pi}{6}) \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \\
S_3(x) &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{6}) & \sin(\frac{\pi}{6}) \\ -\sin(\frac{\pi}{6}) & \cos(\frac{\pi}{6}) \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \\
S_4(x) &= \frac{1}{3}x + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

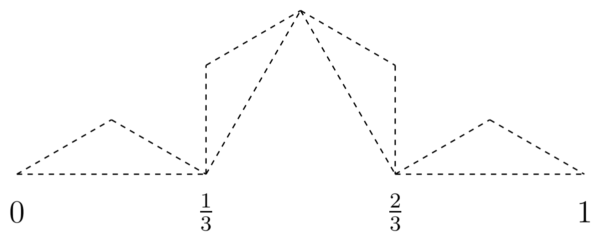
De er alle en skalering, S_4 er yderligere en tanslatering mens S_2 og S_3 tillige er drejninger i positiv hhv. negativ omløbsretning, med en vinkel på $\frac{\pi}{3}$.

De er alle oplagt similariteter med similaritetskonstant $\frac{1}{3}$. Mængden $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ har da similiaritetsdimension $D = \frac{\ln(4)}{\ln(3)} \approx 1.261$.

Betragt den åbne mængde O givet ved det indre af det konvekse hylster om den 1. iteration:



Anvendes similariteterne på O fås følgende:



Man kan nu overbevise sig om at $\mathcal{S}$ opfylder ÅMB med O. Ved sætning 7.45 er

$$\dim_H |\mathcal{S}| = \frac{\ln(4)}{\ln(3)}$$

Specielt er Koch kurven en fraktal.

Litteratur

[1] C. Berg, T.G Madsen, *Mål- og integralteori*, Forelæsningsnoter, HCØ

[2] P. Mattila, *Geometry of sets and measures in euclidean spaces*, Cambridge, 1995

[3] John E. Hutchinson, *Fractals and Self Similarity*, Indiana Univ. Math. J 30 (1981), 713-738

[4] M.E.Munroe, *Measure and Integration*, Addison-Weslet Publishing Company, 1971.

[5] H.Feder, *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag, New York, 1969

[6] C.Berg, *Metriske rum*, Forelæsningnoter, HCØ

[7] J.R.Munkre, *Topology*, Prentice Hall, 2000

[8] J. Czyz, *Paradoxes in measures and dimensions originating in Felix Hausdorffs ideas*, World Scientific, 1994

[9] B.B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, W.H.Freeman, 1982