Fundamentalgruppen af plane mængder

Jesper Just Højgaard

1. juli 2004

Speciale for cand. scient. graden i matematik ved Københavns Universitet.

Vejleder: Jesper Michael Møller.

Indhold

1 Indledning

Dette speciale handler om fundamnetalgruppen af planemængder, dvs. mængder $X \subseteq \mathbb{R}^2$ med delrumstopologien nedarvet fra $\mathbb{R}^2$, hvor $\mathbb{R}^2$ er udstyret med den sædvanlige topologi. Nærmere bestemt vil vi i specialet forsøge at indkredse hvilke grupper der kan optræde som fundamentalgruppe for en plan mængde.

Det er velkendt at vi givet en gruppe G altid kan finde et CW-kompleks X_G der har G som fundamentalgruppe (se [13] side 52). Det er dog på ingen måde klart og det er heller ikke rigtigt at det CW-kompleks X_G man får med denne metode, er metrisk. Det kan således sagtens tænkes at X_G ikke kan indlejres i f.eks. $\mathbb{R}^n$ for noget $n \in \mathbb{Z}_+$. Det er derfor oplagt at stille spørgsmålene: Kan alle grupper optræde som fundamentalgruppe for en delmængde X af $\mathbb{R}^n$? Hvis ikke hvilke grupper kan i så fald optræde? Det er ganske givet svære spørgsmål at svare på. Kan de rationelle tal $\mathbb{Q}$ f.eks. optræde som fundamentalgruppe for noget $X \subseteq \mathbb{R}^n$? Det er et resultat af Shelah at hvis X er et peano kontinuum, da vil $\pi_1(X) \neq \mathbb{Q}$ (se [14]).

I dette speciale vil vi som sagt kun beskæftige os med tilfældet $X \subseteq \mathbb{R}^2$. Selv i dette specialtilfælde har det været meget svært at finde nogle generelle resultater. Man kender selvfølgelig fundamentalgruppen for X i en masse special tilfælde. Det er f. eks. velkendt at fundamentalgruppen af en graf er fri. Et mere eksotisk eksempel er hawaii øreringen der har en ret kompliceret fundamentalgruppe. Det eneste generelle resultat jeg kunne finde om fundamentalgruppen af planemængder, er fra et pre-print [7] fra 2003 af Hanspeter Fischer og Andreas Zastrow. Specialets hovedresultat vil være sætning 2 i dette pre-print der siger at fundamentalgruppen af en vilkårlig plan mængde indlejrer i den første čechgruppe.

I dette speciale er alle omegne åbne.

Specialet følger sprognævnets nye anbefalinger om ikke at sætte komma foran ledsætninger.

2 Resume

This paper is a Master Thesis written at the University of Copenhagen. The subject is the fundamental group of planar subsets. The main result is that the fundamental group of a planar subset injects into the first čhech group.

The first section is an introduction to the inverse systems over an abitrary category.

The second section deals with the important notion of a peano space. Here we prove that a peano space is locally and globally path connected, and that the image of the unit interval into a Hausdorff space is a peano space.

The third section is about planar sets especially planar peano space. When dealing with planar peano spaces the Sierpinski carpet turns out to be very important. We therefore finish this section with some results concerning the Sierpinski carpet and partially filled sierpinski carpets.

In the fourth section we introduce the notion of the nerve of an open cover of a topological space, and we use this to define the čhech group. We then prove the main theorem of the thesis.

The last section deals with a consequence of our main theorem. This involves a little bit of group theory. There is also an example that shows that the main theorem doesn't hold in $\mathbb{R}^3$.

3 Inverse systemer

3.1 Inv- og Pro- kategorier

I dette afsnit definerer vi hvad vi forstår ved inverse systemer over en vilkårlig kategori. Vi beskriver også basale egenskaber ved sådanne inverse systemer.

Lad $\mathcal{C}$ være en vilkårlig kategori. Ved et inverst system $\boldsymbol{X}$ over $\mathcal{C}$ forstås en tripel $\boldsymbol{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$. Her er Λ en præordnet mængde som er opad filtrerende. X_λ er et objekt i $\mathcal{C}$, og der er et objekt tilknyttet hvert $\lambda \in \Lambda$. Når $\lambda \leq \lambda'$, er $p_{\lambda\lambda'} : X_{\lambda'} \to X_\lambda$ en morfi i $\mathcal{C}$. Hvis λ og λ' ikke er sammenlignelige, vil vi ikke definere nogen morfi mellem X_λ og $X_{\lambda'}$. Når vi taler om morfien $p_{\lambda\lambda'} : X_{\lambda'} \to X_\lambda$, er det altså underforstået at $\lambda \leq \lambda'$. Ydermere vil vi forlange at $p_{\lambda\lambda} = id_{X_\lambda}$, og at sammensætning opfylder $p_{\lambda\lambda'}p_{\lambda'\lambda''} = p_{\lambda\lambda''}$.

Vi er nu hastigt på vej til at definere en ny kategori inv $-\mathcal{C}$ ud fra vores gamle kategori $\mathcal{C}$. I inv $-\mathcal{C}$ er objekterne inverse systemer med objekter og morfier i $\mathcal{C}$. Til en kategori skal man også bruge morfier. Vi vil derfor nu definere hvad en morfi mellem inverse systemer skal være. Lad $\boldsymbol{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ og $\boldsymbol{Y} = (Y_\mu, q_{\mu\mu'}, M)$ være inverse systemer over $\mathcal{C}$. Lad $\varphi : M \to \Lambda$ være en afbildning, og lad der til ethvert $\mu \in M$ være knyttet en morfi $f_\mu : X_{\varphi(\mu)} \to Y_\mu$. En morfi $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ mellem inverse systemmer er så givet ved $\boldsymbol{f} = (f_\mu, \varphi)$ når denne familie opfylder en ekstra betingelse. Den ekstra betingelse er at hvis $\mu \leq \mu'$ da skal der findes $\lambda \in \Lambda$ med $\varphi(\mu), \varphi(\mu') \leq \lambda$, så nedenstående diagram kommuterer:

$$\begin{tikzcd}
& X_\lambda \arrow[dl, "p_{\varphi(\mu')\lambda}"'] \arrow[dr, "p_{\varphi(\mu)\lambda}"] & \\
X_{\varphi(\mu')} \arrow[d, "f_{\mu'}"'] & & X_{\varphi(\mu)} \arrow[d, "f_\mu"] \\
Y'_\mu \arrow[rr, "q_{\mu\mu'}"'] & & Y_\mu
\end{tikzcd}$$

Lad $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ og $\boldsymbol{g} : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Z}$ være morfier af inverse systemer med $\boldsymbol{f} = (f_\mu, \varphi)$ og $\boldsymbol{g} = (g_\nu, \psi)$. Vi indfører en komposition af $\boldsymbol{f}$ og $\boldsymbol{g}$ ved $\boldsymbol{gf} = (g_\nu f_\mu, \varphi\psi)$.

Kompositionen ses at være veldefineret ved at betragte følgende diagram:

$$\begin{tikzcd}
 & & X_{\lambda''} \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[drr] & & \\
X_{\varphi\psi(\nu)} \arrow[d, "f_{\psi(\nu)}"] & X_\lambda \arrow[l] \arrow[r] & X_{\varphi(\mu)} \arrow[d, "f_\mu"'] & X_{\lambda'} \arrow[l] \arrow[r] & X_{\varphi\psi(\nu')} \arrow[d, "f_{\psi(\nu')}"] \\
Y_{\psi(\nu)} \arrow[d, "g_\nu"] & & Y_\mu \arrow[ll] \arrow[rr] & & Y_{\psi(\nu')} \arrow[d, "g'_\nu"'] \\
Z_\nu \arrow[rrrr] & & & & Z'_\nu
\end{tikzcd}$$

Alle morfierne og objekterne i diagrammet pånær $X_{\lambda''}$ og morfierne gående ud fra denne, opstår naturligt udfra definitionen af en morfi af inverse systemer. $X_{\lambda''}$ findes da Λ er opad filtrerende.

Sammensætningen er associativ da sammensætning af afbildninger er associativ, og sammensætning af morfier (i $\mathcal{C}$) også er associativ.

Endelig får vi ved at sætte $\boldsymbol{id_X} = (id_{X_\lambda}, id_\Lambda)$ klart en identitets morfi for et inverst system $\boldsymbol{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$.

Vi har nu en ny kategori inv $-\mathcal{C}$. Et objekt X i $\mathcal{C}$ sammen med id_X er et inverst system, så $\mathcal{C}$ kan opfattes som en delkategori af inv $-\mathcal{C}$. Vi kalder et inverst system af denne type for et rudimentært system.

Denne kategori er dog lidt for fint følende til vores senere behov. Vi vil derfor ændre lidt på den så vi får en ny kategori som vi kalder pro $-\mathcal{C}$. Til dette formål indføres en ækvivalensrelation på morfier mellem inverse systemer.

Lad $(f_\mu, \varphi) : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ og $(f'_\mu, \varphi') : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ være morfier i inv $-\mathcal{C}$. Vi siger at (f_μ, φ) og (f'_μ, φ') er ækvivalente, og vi skriver $(f_\mu, \varphi) \sim (f'_\mu, \varphi')$ hvis der til ethvert μ findes $\lambda \geq \varphi(\mu), \varphi'(\mu)$ så følgende diagram kommuterer

$$\begin{tikzcd}
X_{\varphi(\mu)} \arrow[dr, "f_\mu"'] & X_\lambda \arrow[l, "p_{\varphi(\mu)\lambda}"'] \arrow[r, "p_{\varphi'(\mu)\lambda}"] & X_{\varphi'(\mu)} \arrow[dl, "f'_\mu"] \\
 & Y_\mu &
\end{tikzcd}$$

Vi vil nu vise at vores ækvivalensrelation respekterer sammensætning. For at dette ikke skal blive fuldstændig uoverskueligt, deler vi beviset op i tre stykker.

Lemma 3.1 *Hvis* $(f_\mu, \varphi) \sim (f'_\mu, \varphi')$, *da er* $(g_\nu, \psi)(f_\mu, \varphi) \sim (g_\nu, \psi)(f'_\mu, \varphi')$

Bevis:
følgende diagram kommuterer:

$$\begin{tikzcd}
X_{\varphi\psi(\nu)} \arrow[dr, "f_{\psi(\nu)}"'] & X_\lambda \arrow[l, "p_{\varphi\psi(\nu)\lambda}"'] \arrow[r, "p_{\varphi'\psi(\nu)\lambda}"] & X_{\varphi'\psi(\nu)} \arrow[dl, "f'_{\psi(\nu)}"] \\
 & Y_{\psi(\nu)} \arrow[d, "g_\nu"] & \\
 & Z_\nu &
\end{tikzcd}$$

Her kan vi finde X_λ på grund af definitionen af morfier mellem inverse systemer.

■

Lemma 3.2 *Hvis* $(g_\nu, \psi) \sim (g'_\nu, \psi')$*, da er* $(g_\nu, \psi)(f_\mu, \varphi) \sim (g'_\nu, \psi')(f_\mu, \varphi)$

Bevis:
følgende diagram kommuterer:

$$\begin{tikzcd}
 & & X_{\lambda''} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
X_{\varphi\psi(\nu)} \arrow[d, "f_{\psi(\nu)}"] & X_\lambda \arrow[l] \arrow[r] & X_{\varphi(\mu)} \arrow[d, "f_\mu"'] & X_{\lambda'} \arrow[l] \arrow[r] & X_{\varphi\psi(\nu')} \arrow[d, "f_{\psi'(\nu)}"] \\
Y_{\psi(\nu)} \arrow[drr, "g_\nu"] & & Y_\mu \arrow[ll] \arrow[rr] & & Y_{\psi'(\nu)} \arrow[dll, "g'_\nu"'] \\
 & & Z_\nu & &
\end{tikzcd}$$

Her kan vi finde X_λ og $X_{\lambda'}$ på grund af definitionen af morfier mellem inverse systemer. $X_{\lambda''}$ eksisterer da Λ er opad filtrerende.

Lemma 3.3 *Hvis* $(g_\nu, \psi) \sim (g'_\nu, \psi')$ *og* $(f_\mu, \varphi) \sim (f'_\mu, \varphi')$*, da er* $(g_\nu, \psi)(f_\mu, \varphi) \sim (g'_\nu, \psi')(f'_\mu, \varphi')$

Bevis:
Lemma 3.1 giver $(g_\nu, \psi)(f_\mu, \varphi) \sim (g_\nu, \psi)(f'_\mu, \varphi')$. Lemma 3.2 giver $(g_\nu, \psi)(f'_\mu, \varphi') \sim (g'_\nu, \psi')(f'_\mu, \varphi')$, og transitiviteten af $\sim$ giver $(g_\nu, \psi)(f_\mu, \varphi) \sim (g'_\nu, \psi')(f'_\mu, \varphi')$ som ønsket.

■

Vi kan nu definere pro $-\mathcal{C}$. Objekterne i pro $-\mathcal{C}$ er objekter i inv $-\mathcal{C}$. Morfierne er ækvivalensklasser af morfier i inv $-\mathcal{C}$. Kompositionen i pro $-\mathcal{C}$ sættes til at være $[\boldsymbol{f}][\boldsymbol{g}] = [\boldsymbol{fg}]$. Denne komposition er veldefineret på grund af lemma 3.3. Ved at sætte $\boldsymbol{id_X} = [(id_{X_\lambda}, id_\Lambda)]$ får vi klart en identitets morfi for et inverst system $\boldsymbol{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ i pro $-\mathcal{C}$. Kompositionen er klart associativ. Dermed er pro $-\mathcal{C}$ en kategori.

Hvis vi har et inverst system $\boldsymbol{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ i pro $-\mathcal{C}$ hvor alle $p_{\lambda\lambda'}$'erne er isomorfier, og hvis $\lambda_0 \in \Lambda$, da vil morfien $\boldsymbol{i} : \boldsymbol{X} \to (X_{\lambda_0})$ induceret af $id_{X_{\lambda_0}}$ være en isomorfi. Vi kan nemlig definere en invers $\boldsymbol{j}$ til $\boldsymbol{i}$. Hvis $\lambda_1 \in \Lambda$, da findes $\lambda \in \Lambda$ sådan at $\lambda \geq \lambda_1, \lambda_0$. Vi definerer så $j_{\lambda_1} = p_{\lambda_1\lambda} p_{\lambda_0\lambda}^{-1}$. Hvis λ' også opfylder $\lambda' \geq \lambda_1, \lambda_0$, kan vi finde $\lambda'' \geq \lambda', \lambda$, og dette giver os følgende ligheder:

$$p_{\lambda_1\lambda} p_{\lambda_0\lambda}^{-1} = p_{\lambda_1\lambda''} p_{\lambda_0\lambda''}^{-1} = p_{\lambda_1\lambda'} p_{\lambda_0\lambda'}^{-1}$$

Dermed har vi set at j_{λ_1} er uafhængig af valget af λ. Det er nu klart at j_λ'erne inducerer en morfi $\boldsymbol{j} : (X_{\lambda_0}) \to \boldsymbol{X}$, og at $\boldsymbol{j}$ er invers til $\boldsymbol{i}$.

Definition 3.4 *En delmængde Λ' af en præordnet mængde Λ er kofinal hvis der til ethvert $\lambda \in \Lambda$ eksisterer et $\lambda' \in \Lambda'$ så $\lambda \leq \lambda'$.*

Hvis $\Lambda' \subseteq \Lambda$ er opad filtrerende, og $(X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ er et inverst system, da kaldes $(X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda')$ et delsystem af $(X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$. Der er en naturligt defineret morfi i inv $-\mathcal{C}$ mellem $\boldsymbol{X}$ og $\boldsymbol{X'} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda')$, nemlig

$$\boldsymbol{i} = (i_\lambda, i) : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X'}$$

hvor $i(\lambda) = \lambda$ og $i_\lambda = id_{X_\lambda} : X_\lambda \to X_\lambda$ for $\lambda \in \Lambda'$. Denne morfi kaldes restriktionsmorfien.

Sætning 3.5 *Hvis $\Lambda' \subseteq \Lambda$ er kofinal i Λ, da inducerer restriktionsmorfien $\boldsymbol{i} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X'}$ en isomorfi i* pro $-\mathcal{C}$.

Bevis:
Da Λ' er kofinal i Λ, findes en afbildning $j : \Lambda \to \Lambda'$ så $j(\lambda) \geq \lambda$ for alle $\lambda \in \Lambda$. Definer $j_\lambda : X_{j(\lambda)} \to X_\lambda$ ved $j_\lambda = p_{\lambda j(\lambda)}$. Det er klart at vi givet $\lambda_0, \lambda_1 \in \Lambda$ med $\lambda_0 \leq \lambda_1$ kan finde $\lambda' \in \Lambda'$ så nedenstående diagram kommuterer.

$$\begin{tikzcd}
& X_{\lambda'} \arrow[dl, "p_{j(\lambda_1)\lambda'}"'] \arrow[dr, "p_{j(\lambda_0)\lambda'}"] & \\
X_{j(\lambda_1)} \arrow[d, "j_{\lambda_1}"'] & & X_{j(\lambda_0)} \arrow[d, "j_{\lambda_0}"] \\
X_{\lambda_1} \arrow[rr, "p_{\lambda_0\lambda_1}"'] & & X_{\lambda_0}
\end{tikzcd}$$

Så (j_λ, j) definerer en morfi $\boldsymbol{j} : \boldsymbol{X'} \to \boldsymbol{X}$ i pro $-\mathcal{C}$. Vi har at

$$\begin{tikzcd}
X_\lambda \arrow[dr, "id_{X_\lambda}"'] & & X_{j(\lambda)} \arrow[ll, "p_{\lambda j(\lambda)}"'] \arrow[dl, "j_\lambda i_{j(\lambda)}"] \\
& X_\lambda &
\end{tikzcd}$$

kommuterer, så $\boldsymbol{ji} = id_{\boldsymbol{X}}$. Vi har også at

$$\begin{tikzcd}
X_{\lambda'} \arrow[dr, "id_{X_{\lambda'}}"'] & & X_{j(\lambda')} j_{\lambda'} \arrow[ll, "p_{\lambda' j(\lambda')}"'] \arrow[dl, "i_{\lambda'}"] \\
& X_{\lambda'} &
\end{tikzcd}$$

kommuterer, så $\boldsymbol{ij} = id_{\boldsymbol{X'}}$ hvilket viser at $\boldsymbol{i}$ er en isomorfi i pro $-\mathcal{C}$.

■

3.2 Udvidelser

I dette afsnit er $\mathcal{C}$ en kategori, og $\mathcal{P}$ er en delkategori af $\mathcal{C}$.

Definition 3.6 *Lad $X \in \mathcal{C}$ være et objekt. En $\mathcal{C}$-udvidelse m.h.t. $\mathcal{P}$ er en morfi $\boldsymbol{p} : X \to \boldsymbol{X}$. Her er $\boldsymbol{p}$ en morfi i* pro $-\mathcal{C}$*, og $\boldsymbol{X}$ er et objekt i* pro $-\mathcal{C}$*. Ydermere skal $\boldsymbol{p}$ have følgende universelle egenskab: Hvis $\boldsymbol{h} : X \to \boldsymbol{Y}$ er en morfi i* pro $-\mathcal{C}$ *og $\boldsymbol{Y}$ er et objekt i* pro $-\mathcal{P}$*, da findes en entydig morfi $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ så følgende diagram kommuterer:*

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{X} \arrow[dr, "\boldsymbol{f}"'] & X \arrow[l, "\boldsymbol{p}"'] \arrow[d, "\boldsymbol{h}"] \\
& \boldsymbol{Y}
\end{tikzcd}$$

Hvis $\boldsymbol{X}$ og $\boldsymbol{f}$ begge tilhører pro $-\mathcal{P}$, da kaldes $\boldsymbol{p}$ en $\mathcal{P}$-udvidelse. En $\mathcal{C}$-udvidelse vil vi normalt bare kalde for en udvidelse. Har vi to inverse systemer $\boldsymbol{X}$ og $\boldsymbol{X'}$ i pro $-\mathcal{C}$, en isomorfi $\boldsymbol{i} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X'}$ imellem dem og en udvidelse $\boldsymbol{p} : X \to \boldsymbol{X}$, da vil $\boldsymbol{ip}$ også være en udvidelse. For at indse dette behøver vi bare at betragte følgende diagram:

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{X'} \arrow[drr, "\boldsymbol{fi}^{-1}"'] & \boldsymbol{X} \arrow[l, "\boldsymbol{i}"'] \arrow[dr, "\boldsymbol{f}"] & X \arrow[l, "\boldsymbol{p}"'] \arrow[d, "\boldsymbol{h}"] \\
& & \boldsymbol{Y}
\end{tikzcd}$$

Her er $\boldsymbol{Y}$ et objekt i pro $-\mathcal{P}$.

Lemma 3.7 *Lad $\boldsymbol{p} : X \to \boldsymbol{X}$ og $\boldsymbol{p'} : X \to \boldsymbol{X}'$ være to $\mathcal{P}$-udvidelser af X. Der findes da en entydig isomorfi $\boldsymbol{i} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X'}$. $\boldsymbol{i}$ kaldes den naturlige isomorfi.*

Bevis:
Af den universelle egenskab for udvidelser har vi at der findes entydige morfier $\boldsymbol{i}$ og $\boldsymbol{i'}$ så følgende diagrammer kommuterer:

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{X} \arrow[dr, "\boldsymbol{i}"'] & X \arrow[l, "\boldsymbol{p}"'] \arrow[d, "\boldsymbol{p'}"] \\ & \boldsymbol{X'} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \boldsymbol{X'} \arrow[dr, "\boldsymbol{i'}"'] & X \arrow[l, "\boldsymbol{p'}"'] \arrow[d, "\boldsymbol{p}"] \\ & \boldsymbol{X} \end{tikzcd}$$

Vi har dermed at $\boldsymbol{ip} = \boldsymbol{p'}$ og $\boldsymbol{i'p'} = \boldsymbol{p}$. Heraf følger at $\boldsymbol{i'ip} = \boldsymbol{p'}$ og $\boldsymbol{ii'p'} = \boldsymbol{p}$. Entydighed giver nu at $\boldsymbol{ii'} = id_{\boldsymbol{X'}}$ og $\boldsymbol{i'i} = id_{\boldsymbol{X}}$ som ønsket.

■

Vi har følgende resultat om hvornår en morfi $\boldsymbol{p} : X \to \boldsymbol{X}$ er en udvidelse.

Sætning 3.8 *Lad $\boldsymbol{p} : X \to \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ være en morfi i $\text{pro}-\mathcal{C}$. Da er $\boldsymbol{p}$ en udvidelse hvis og kun hvis morfierne p_λ med $\lambda \in \Lambda$ opfylder:*

1*) For ethvert objekt $P \in \mathcal{P}$ og enhver morfi $h : X \to P$ i $\mathcal{C}$ findes et $\lambda \in \Lambda$ og en morfi $f : X_\lambda \to P$ så $fp_\lambda = h$.*

2*) Hvis $f, f' : X_\lambda \to P$ er morfier i $\mathcal{C}$ med $fp_\lambda = f'p_\lambda$, da findes $\lambda \leq \lambda'$ og $p_{\lambda\lambda'} : X_{\lambda'} \to X_\lambda$ så $fp_{\lambda\lambda'} = f'p_{\lambda\lambda'}$.*

Bevis:
Antag først at $\boldsymbol{p}$ er en udvidelse. Lad P være et objekt i $\mathcal{P}$ med en morfi $h : X \to P$. Da $\boldsymbol{p}$ er en udvidelse, eksisterer der en morfi $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{X} \to P$. Nu er P når man opfatter P som et inverst system, et rudimentært system, så $\boldsymbol{f}$ er givet ved en enkelt morfi i $\mathcal{C}$. Vi har altså at der findes $\lambda \in \Lambda$ og en morfi $f_\lambda : X_\lambda \to P$ så $f_\lambda \boldsymbol{p} = h$. 1) er dermed opfyldt. Lad nu $f, f' : X_\lambda \to P$ være morfier med $fp_\lambda = f'p_\lambda$. Da P er et rudimentært system, bestemmer f og f' morfier $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f'} : \boldsymbol{X} \to P$. Den universelle egenskab for udvidelser giver så at $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f'}$, dvs. at der findes $\lambda \leq \lambda'$ så

$$\begin{tikzcd} & X_{\lambda'} \arrow[dl, "p_{\lambda\lambda'}"'] \arrow[dr, "p_{\lambda\lambda'}"] & \\ X_\lambda \arrow[dr, "f"'] & & X_\lambda \arrow[dl, "f'"] \\ & P & \end{tikzcd}$$

kommuterer. Dette giver det ønskede.

Antag nu at 1) og 2) er opfyldt. Lad $\boldsymbol{h} : X \to \boldsymbol{Y}$ være en morfi i pro $-\mathcal{C}$ og $\boldsymbol{Y} = (Y_\mu, q_{\mu\mu'}, M)$ et objekt i pro $-\mathcal{P}$. Da $\boldsymbol{h}$ er en morfi i pro $-\mathcal{C}$, er $\boldsymbol{h}$ givet ved morfier $h_\mu : X \to Y_\mu$ således at $h_\mu = q_{\mu\mu'} h_{\mu'}$ når $\mu \leq \mu'$. 1) giver at vi til ethvert μ kan finde $\lambda := \varphi(\mu) \in \Lambda$ og en morfi $f_\mu : X_{\varphi(\mu)} \to Y_\mu$ så $f_\mu p_{\varphi(\mu)} = h_\mu$. Vi viser at dette giver os en morfi i inv $-\mathcal{C}$ og dermed i pro $-\mathcal{C}$. Vi bemærker at når $\mu \leq \mu'$, så kommuterer følgende diagram:

$$\begin{tikzcd}
X_{\varphi(\mu)} \arrow[dr, "f_\mu"'] & & X \arrow[ll, "p_{\varphi(\mu')}"'] \arrow[rr, "p_{\varphi(\mu)}"] \arrow[dl, "h_\mu"'] \arrow[dr, "h_{\mu'}"] & & X_{\varphi(\mu')} \arrow[dl, "f_{\mu'}"] \\
& Y_\mu & & Y_{\mu'} \arrow[ll, "q_{\mu\mu'}"] &
\end{tikzcd}$$

Trekanterne

$$\begin{tikzcd}
X_{\varphi(\mu)} \arrow[dr, "f_\mu"'] & X \arrow[l, "p_{\varphi(\mu)}"'] \arrow[d, "h_\mu"] \\
& Y_\mu
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "p_{\varphi(\mu')}"] \arrow[d, "h_{\mu'}"'] & X_{\varphi(\mu')} \arrow[dl, "f_{\mu'}"] \\
Y_{\mu'} &
\end{tikzcd}$$

kommuterer per konstruktion, og trekanten

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "h_\mu"'] \arrow[dr, "h_{\mu'}"] & \\
Y_\mu & & Y_{\mu'} \arrow[ll, "q_{\mu\mu'}"]
\end{tikzcd}$$

kommuterer da $\boldsymbol{h}$ er en morfi i pro $-\mathcal{C}$. Vi får heraf at $q_{\mu\mu'} f_{\mu'} p_{\varphi(\mu')} = f_\mu p_{\varphi(\mu)}$. Vælg $\lambda \in \Lambda$ med $\lambda \geq \varphi(\mu), \varphi(\mu')$, da er $p_{\varphi(\mu')\lambda} p_\lambda = p_{\varphi(\mu')}$ og $p_{\varphi(\mu)\lambda} p_\lambda = p_{\varphi(\mu)}$. Vi får derfor

$$q_{\mu\mu'} f_{\mu'} p_{\varphi(\mu')\lambda} p_\lambda = f_\mu p_{\varphi(\mu)\lambda} p_\lambda$$

2) giver nu at der findes $\lambda' \in \Lambda$ så

$$q_{\mu\mu'} f_{\mu'} p_{\varphi(\mu')\lambda'} = q_{\mu\mu'} f_{\mu'} p_{\varphi(\mu')\lambda} p_{\lambda\lambda'} = f_\mu p_{\varphi(\mu)\lambda} p_{\lambda\lambda'} = f_\mu p_{\varphi(\mu)\lambda'}$$

hvilket viser at $\boldsymbol{f}$ er en morfi. Vi har per konstruktion at $\boldsymbol{f}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{h}$.

Vi mangler så blot at vise at $\boldsymbol{f}$ er entydig. Antag derfor at $\boldsymbol{f'} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ var en anden morfi med $\boldsymbol{f'}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{h}$. Lad $\boldsymbol{f'}$ være givet ved (f'_μ, φ'). Da er $f'_\mu p_{\varphi'(\mu)} = h_\mu = f_\mu p_{\varphi(\mu)}$. Da Λ er opad filtrerende, findes $\lambda \in \Lambda$ med $\lambda \geq \varphi'(\mu), \varphi(\mu)$. Da $\boldsymbol{p}$ er en morfi i pro $-\mathcal{C}$, har vi at $f'_\mu p_{\varphi'(\mu)\lambda} p_\lambda = f_\mu p_{\varphi(\mu)\lambda} p_\lambda$. 2) giver så at der findes λ' så

$$f'_\mu p_{\varphi'(\mu)\lambda'} = f'_\mu p_{\varphi'(\mu)\lambda} p_{\lambda\lambda'} = f_\mu p_{\varphi(\mu)\lambda} p_{\lambda\lambda'} = f_\mu p_{\varphi(\mu)\lambda'}$$

Vi har altså at $(f'_\mu, \varphi') \sim (f_\mu, \varphi)$, og dermed at $\boldsymbol{f'} = \boldsymbol{f}$ som ønsket.

$\blacksquare$

3.3 Grænser

Lad $\mathcal{C}$ være en kategori, og lad $\boldsymbol{X} \in \text{pro}-\mathcal{C}$. Ved en invers grænse for $\boldsymbol{X}$ forstås et objekt $X \in \mathcal{C}$ og en morfi $\boldsymbol{p} : X \to \boldsymbol{X}$ med følgende egenskab: Hvis $\boldsymbol{g} : Y \to \boldsymbol{X}$ er en morfi og $Y \in \mathcal{C}$, da findes en entydig morfi $g : Y \to X$ så følgende diagram kommuterer:

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[dl, "\boldsymbol{g}"'] \arrow[d, "g"] \\
\boldsymbol{X} & X \arrow[l, "\boldsymbol{p}"]
\end{tikzcd}$$

Hvis nu $(X', \boldsymbol{p'})$ var en anden invers grænse for $\boldsymbol{X}$, da findes entydige morfier $i' : X' \to X$ og $i : X \to X'$ så $\boldsymbol{p'} = \boldsymbol{p}i'$ og $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p'}i$. Dermed er $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p'}i'i$ og $\boldsymbol{p'} = \boldsymbol{p'}ii'$. Af entydigheden følger nu at $i'i = id_X$ og $ii' = id_{X'}$, så X og X' er isomorfe. Inverse grænser for et givet inverst system $\boldsymbol{X} \in \text{pro}-\mathcal{C}$ er altså entydige op til isomorfi. Objektet X kaldes i sig selv ofte for en invers grænse for $\boldsymbol{X}$ (d.v.s. morfien $\boldsymbol{p}$ er underforstået), og man skriver

$$X = \lim \boldsymbol{X}$$

.

Definition 3.9 *Lad $\mathcal{C}$ være en kategori og lad $f_\alpha, g_\alpha : X \to Y$ med $\alpha \in A$ være to familier af morfier over en indeksmængde A. Ved den multiple udligner for de to familier af morfier forstås et objekt $MEq_A(f_\alpha, g_\alpha) \in \mathcal{C}$ og en morfi $\mu : MEq_A(f_\alpha, g_\alpha) \to X$ så følgende er opfyldt:*

1*): $f_\alpha \mu = g_\alpha \mu$ for alle $\alpha \in A$*

2*): Hvis (Z, μ') hvor Z er et objekt i $\mathcal{C}$, og μ' er en morfi i $\mathcal{C}$, opfylder punkt* 1*), da vil μ' faktoriserer igennem $MEq_A(f_\alpha, g_\alpha)$, d.v.s der findes en morfi $\nu : Z \to MEq_A(f_\alpha, g_\alpha)$ så $\mu' = \mu\nu$.*

I tilfældet hvor vi kun har to morfier $f, g : X \to Y$, skriver vi $Eq(f, g) = MEq(f, g)$ og, $Eq(f, g)$ kaldes blot for udligneren for f og g.

Det er ikke altid at et inverst system over en given kategori har en invers grænse. Vi vil i det følgende se på nogle tilstrækkelige betingelser for at en kategori har den egenskab at samtlige inverse systemer over denne kategori har en invers grænse. Betingelserne er:

P): For enhver familie af objekter Y_α i $\mathcal{C}$ vil også produktet $\Pi_\alpha Y_\alpha$ være et objekt i $\mathcal{C}$.

Eq): For ethvert par af morfier $f, g : X \to Y$ findes $(Eq(f,g), \mu)$.

Vi viser først følgende lemma:

Lemma 3.10 *Lad $\mathcal{C}$ være en kategori der opfylder P) og Eq). Da vil enhver familie af par af morfier $f_\alpha, g_\alpha : X \to Y_\alpha$ have en multipel udligner.*

Bevis:
Vi betragter morfierne $f = (f_\alpha) : X \to \Pi_\alpha Y_\alpha$ og $g = (g_\alpha) : X \to \Pi_\alpha Y_\alpha$. Vi ved at udligneren $(Eq(f,g), \mu)$ eksisterer per antagelse. Vi påstår nu at $(Eq(f,g), \mu)$ er den multiple udligner for f_α'erne og g_α'erne. Der gælder nemlig $f\mu = g\mu$, så $f_\alpha \mu = \pi_\alpha(f\mu) = \pi_\alpha(g\mu) = g_\alpha \mu$ for alle α. Her er $\pi_\alpha : \Pi_\alpha Y_\alpha \to Y_\alpha$ projektionen ned på Y_α. Lad nu (Z, ν) være et andet par med $\nu : Z \to X$ så $f_\alpha \nu = g_\alpha \nu$ for alle α. Da vil også $f\nu = g\nu$, og dermed må ν faktorisere igennem Eq(f,g) som ønsket.

$\blacksquare$

Sætning 3.11 *Lad $\mathcal{C}$ være en kategori der opfylder P) og Eq). Da har ethvert inverst system over $\mathcal{C}$ en invers grænse.*

Bevis:
Lad $\boldsymbol{X} \in$ pro $-\mathcal{C}$ med $\boldsymbol{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$. Når $\lambda \leq \lambda'$, betragter vi morfierne $\pi_\lambda, p_{\lambda\lambda'}\pi_{\lambda'} : \Pi_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to X_\lambda$. Lemma 3.10 giver at der findes en multipel udligner $(MEq_{(\lambda,\lambda'\in\Lambda,\lambda\leq\lambda')}(\pi_\lambda, p_{\lambda\lambda'}\pi_{\lambda'}), \mu)$. Sætter vi
$p_\lambda = \pi_\lambda \mu : MEq_{(\lambda,\lambda'\in\Lambda,\lambda\leq\lambda')}(\pi_\lambda, p_{\lambda\lambda'}\pi_{\lambda'}) \to X_\lambda$, får vi at $p_{\lambda\lambda'} p_{\lambda'} = p_{\lambda\lambda'}\pi_{\lambda'}\mu = \pi_\lambda \mu = p_\lambda$. Vi har altså en morfi $\boldsymbol{p} : X \to \boldsymbol{X}$ i pro $-\mathcal{C}$ givet ved $\boldsymbol{p} = [(p_\lambda)]$.

Vi påstår at $(MEq_{(\lambda,\lambda'\in\Lambda,\lambda\leq\lambda')}(\pi_\lambda, p_{\lambda\lambda'}\pi_{\lambda'}), \boldsymbol{p})$ er en invers grænse for $\boldsymbol{X}$. Lad derfor Y være et objekt i $\mathcal{C}$, og lad $\boldsymbol{g} : Y \to \boldsymbol{X}$ være en morfi i pro $-\mathcal{C}$. Lad $\boldsymbol{g}$ være givet ved $g_\lambda : Y \to X_\lambda$ hvor $\lambda \in \Lambda$ og $p_{\lambda\lambda'} g_{\lambda'} = g_\lambda$ når $\lambda \leq \lambda'$. Sæt nu $\nu = (g_\lambda) : Y \to \Pi_\lambda X_\lambda$, da er $\pi_\lambda \nu = g_\lambda$. Heraf får vi $\pi_\lambda \nu = g_\lambda = p_{\lambda\lambda'} g_{\lambda'} = p_{\lambda\lambda'}\pi_{\lambda'}\nu$. Men så må ν faktorisere gennem $MEq_{(\lambda,\lambda'\in\Lambda,\lambda\leq\lambda')}(\pi_\lambda, p_{\lambda\lambda'}\pi_{\lambda'})$. Vi har altså at der findes en morfi $\mu' : Y \to MEq_{(\lambda,\lambda'\in\Lambda,\lambda\leq\lambda')}(\pi_\lambda, p_{\lambda\lambda'}\pi_{\lambda'})$ så $\nu = \mu\mu'$. Heraf følger det ønskede.

$\blacksquare$

Korollar 3.12 *Inverse systemer over kategorierne Ab, Grp, Top og Cpt har en invers grænse. Ab er kategorien med abelske grupper som objekter og homomorfier som morfier, Grp er kategorien med grupper som objekter og homomorfier som morfier, Top er kategorien med topologiske rum som objekter og kontinuerte afbildninger som morfier, og Cpt er kategorien med kompakte hausdorff rum som objekter og kontinuerte afbildninger som morfier.*

Bevis:
For enhver familie af objekter i en af disse kategorier vil produktet igen være et objekt i kategorien. Hvis $f, g : X \to Y$ er to morfier i en af disse kategorier, da er $\{x \in X : f(x) = g(x)\} = Eq(f, g)$. $(\{x \in X : f(x) = g(x)\}, i)$ hvor i er indlejringen $i : \{x \in X : f(x) = g(x)\} \hookrightarrow X$, er så udligneren for f og g.

■

Hvis $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ er en morfi af inverse systemer i pro $-\mathcal{C}$, da findes en entydig morfi $\lim f : \lim \boldsymbol{X} \to \lim \boldsymbol{Y}$ såfremt $\lim \boldsymbol{X}$ og $\lim \boldsymbol{Y}$ eksisterer så

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{X} \arrow[r, "\boldsymbol{f}"] & \boldsymbol{Y} \\
\lim \boldsymbol{X} \arrow[u, "\boldsymbol{p}"] \arrow[r, "\lim f"'] & \lim \boldsymbol{Y} \arrow[u, "\boldsymbol{q}"']
\end{tikzcd}$$

kommuterer. Dette følger umiddelbart af definitionen af en invers grænse. På grund af entydigheden er det klart at $\lim id_{\boldsymbol{X}} = id_{\lim \boldsymbol{X}}$ og $\lim \boldsymbol{fg} = \lim \boldsymbol{f} \lim \boldsymbol{g}$. Vi har altså at lim er en funktor fra pro $-\mathcal{C}$ til $\mathcal{C}$ når $\mathcal{C}$ er en kategori hvor alle inverse systemer har en invers grænse. Heraf følger umiddelbart at en isomorfi mellem to inverse systemer i pro $-\mathcal{C}$ inducerer en isomorfi mellem de to systemers grænser.

4 Peanokontinua

4.1 Separationsordenen

Definition 4.1 *Lad X være et sammenhængende rum, $x \in X$ kaldes et skæringspunkt for X hvis $X - x$ er usammenhængende.*

Vi minder om at et rum X er usammenhængende hvis der findes en separation af X, dvs. $X = U \cup V$ hvor U og V er ikke-tomme, disjunkte og åbne mængder.

Definition 4.2 *Lad X være et sammenhængende T_1 rum og lad $p, q \in X$ med $p \neq q$. Med $E(p, q)$ betegner vi mængden af skæringspunkter $x \in X$ for X sådan at der findes en separation af $X - x = U_x \cup V_x$ med $p \in U_x$ og $q \in V_x$. Ydermere skal punkterne p og q tilhøre $E(p, q)$.*

$E(p, q)$ er altså mængden bestående af p og q samt de $x \in X$ der adskiller dem. Vi indfører følgende relation på $E(p, q)$:

Definition 4.3 *Lad X være et sammenhængende T_1 rum, og lad $p, q \in X$ med $p \neq q$. Vælg for hvert $x \in E(p, q) - \{p, q\}$ en separation af $X - x = U_x \cup V_x$. Når $x, y \in E(p, q)$ og $x \neq y$, siger vi at $x < y$ såfremt $p \in U_x$ og $y \in V_x$ eller $x = p$. Relationen $<$ kaldes en separationsorden på $E(p, q)$*

Det er klart at $p < x$ for $x \in E(p, q) - p$, og det er også klart at $x < q$ for $x \in E(p, q) - q$.

Sætning 4.4 *Lad X være et sammenhængende T_1 rum, og lad $p, q \in X$ med $p \neq q$. En separationsorden på $E(p, q)$ er en totalordning.*

Bevis:
Vi starter med et par bemærkninger. Hvis $x \in E(p, q) - \{p, q\}$, da vil $U_x \cup x$ være sammenhængende thi afbildningen $f_x : X \to U_x \cup x$ givet ved $f(z) = z$ hvis $z \in U_x \cup x$ og $f(z) = x$ ellers er kontinuert. For at se dette bemærker vi at rummet X hvori $E(p, q)$ er defineret, er sammenhængende og T_1, specielt er $X - x$ et åbent delrum af X. Nu var U_x og V_x åbne delmængder af $X - x$ per antagelse, så vi konkluderer at U_x og V_x er åbne i X. Dermed er $U_x \cup x = X - V_x$ og $V_x \cup x = X - U_x$ afsluttede i X. Afbildningen f er tydeligvis kontinuert på både $U_x \cup x$ og $V_x \cup x$, og f stemmer overens på deres fællesmængde, så f er kontinuert på $X = (U_x \cup x) \cup (V_x \cup x)$. Nu var X sammenhængende, så $f(X) = U_x \cup x$ er sammenhængende. På samme måde ses at $V_x \cup x$ er sammenhængende.

Lad nu $x, y \in E(p,q) - \{p,q\}$. Hvis $y \in V_x$, da vil $U_x \cup x \subseteq U_y$ og $V_y \cup y \subseteq V_x$ thi $U_x \cup x$ er en sammenhængende delmængde af $X - y = U_y \cup V_y$. Dermed må $U_x \cup x$ ligge i enten U_y eller V_y, men $p \in U_y \cap U_x$, så $U_x \cup x \subseteq U_y$. Heraf følger at $(U_x \cup x) \cap (V_y \cup y) = \emptyset$, så $V_y \cup y \subseteq V_x$. På samme måde ses at hvis $y \in U_x$, da vil $U_y \cup y \subseteq U_x$ og $V_x \cup x \subseteq V_y$.

Vi viser nu at $<$ er en totalordning:

(Ikke-refleksivitet): Dette opfylder relationen trivielt.

(Sammenlignelighed): Vi har allerede bemærket at p og q kan sammenlignes med alle andre elementer. Lad derfor $x \neq y$ og $x, y \in E(p,q) - \{p,q\}$. Da gælder der enten $y \in U_x$ eller $y \in V_x$. Hvis $y \in U_x$, da vil $V_x \cup x \subseteq V_y$, dvs. y adskiller p og x, så $y < x$. Hvis $y \in V_y$ fås omvendt at $x < y$.

(Transitivitet): Antag at $x < y$ og $y < z$, og antag at $x \neq p$ og $z \neq q$, dvs. at $V_y \cup y \subseteq V_x$ og $V_z \cup z \subseteq V_y$. Heraf følger at $z \in V_x$, så x adskiller p og z, og dermed fås $x < z$. Tilfældene hvor $x = p$ eller $z = q$ er trivielle.

■

Sætning 4.5 *Lad X være et sammenhængende T_1 rum, og lad $p, q \in X$ så $E(p,q) - \{p,q\} \neq \emptyset$. Da er delrumstopologien på $E(p,q)$ finere end separations-ordenstopologien på $E(p,q)$.*

Bevis:
Lad B være et basiselement for ordenstopologien på $E(p,q)$. Vi viser at B er åben i delrumstopologien. Der er tre tilfælde 1): $B = [p,x)$, 2): $B = (x,q]$ og 3): $B = (x,y)$ hvor $x, y \in E(p,q)$.

Tilfælde 1): Hvis $x = q$, da er $[p,x) = X - q \cap E(p,q)$, og $X - q$ er åben i X, da X er T_1. Hvis $x \neq q$, kan vi betragte separationen $X - x = U_x \cup V_x$. Da $X - x$ er åben i X, og U_x er åben i $X - x$, er U_x åben i X. Det ønskede følger nu af at $[p,x) = U_x \cap E(p,q)$.

Tilfælde 2): Klares tilsvarende.

Tilfælde 3): Hvis $x \neq p$ og $y \neq q$, da er $(x,y) = U_y \cap V_x \cap E(p,q)$, og hvis $x = p$ og $y = q$, da er $(x,y) = X - \{p,q\} \cap E(p,q)$.

■

Definition 4.6 *Lad der være givet to punkter x og y i et topologisk rum X. En endelig samling af åbne mængder $U_1, \ldots, U_n$ siges at være en enkel kæde fra x til y hvis:*

1): $x \in U_1$ og $y \in U_n$.

2): $x \notin U_i$ for $i > 1$ og $y \notin U_i$ for $i < n$.

3): $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ hvis og kun hvis $|i - j| \leq 1$.

Sætning 4.7 *Lad X være et sammenhængende rum, og lad $\mathcal{U}$ være en åben overdækning af X. Givet to punkter $x, y \in X$, da findes en enkel kæde fra x til y bestående af elementer fra $\mathcal{U}$.*

Bevis:
Lad $\mathcal{U}$ være en åben overdækning af X. Givet et $a \in X$ sætter vi
$Y = \{x \mid$ der findes en enkel kæde fra a til x med elementer fra $\mathcal{U}\}$. Bemærk at $a \in Y$, så $Y \neq \emptyset$. Vi viser at Y er åben og afsluttet.

Y er åben: Lad $x \in Y$, og lad $U_1, \ldots, U_n$ være en enkel kæde fra a til x med elementer fra $\mathcal{U}$, og lad $y \in U_n$. Hvis $y \in U_{n-1} \cap U_n$, da vil $U_1, \ldots, U_{n-1}$ være en enkel kæde fra a til y. Hvis $y \notin U_{n-1} \cap U_n$, da vil $U_1, \ldots, U_n$ være en enkel kæde fra a til y. Vi har altså at $x \in U_n \subseteq Y$, så Y er åben.

Y er afsluttet: Lad $x \in \overline{Y} - Y$, og lad $U \in \mathcal{U}$ være en omegn af x. Da vil $U \cap Y \neq \emptyset$. Vælg $y \in U \cap Y$, og vælg en enkel kæde $U_1, \ldots, U_n$ fra a til y med elementer fra $\mathcal{U}$. Hvis $a \in U$, da er U en enkel kæde fra a til x. Hvis dette ikke er tilfældet, findes et $i \in \{1, \ldots, n\}$, så $U_i \cap U \neq \emptyset$ og $U_j \cap U = \emptyset$ for $j < i$. Nu vil $U_1, \ldots, U_i, U$ være en enkel kæde fra a til x. Heraf følger at $Y = \overline{Y}$.

Da X er sammenhængende, har vi at $X = Y$.

■

Vi vender tilbage til enkle kæder senere, men først skal vi se nogle resultater om kontinua.

4.2 Kontinua

Definition 4.8 *Et topologisk rum X kaldes et kontinuum hvis X er et kompakt, sammenhængende rum.*

Sætning 4.9 *Lad $\{K_i\}$ være en samling af kontinua der er totalt ordnet ved inklusion med $K_i \subseteq X$ hvor X er et kompakt, hausdorff rum, da er også $\bigcap_i K_i$ et kontinuum.*

Bevis:
Det er velkendt at $\bigcap_i K_i$ er kompakt. Vi skal så blot vise at $\bigcap_i K_i$ er sammenhængende. Sæt $K = \bigcap_i K_i$, og antag at der findes en separation af $K = A \cup B$. X er hausdorff, så K_i'erne er afsluttede i X, dermed er K også afsluttet i X. Da A og B er afsluttede i K, er A og B afsluttede i X. Da X er normal, findes disjunkte åbne mængder U og V i X så $A \subseteq U$ og $B \subseteq V$. Sæt $H_i = K_i \cap (X - (U \cup V))$, disse er ikke tomme da K_i'erne er sammenhængende. H_i'erne er afsluttede da de er fællesmængden af to afsluttede mængder. Da X er kompakt, er H_i'erne kompakte. Da K_i'erne er totalt ordnet ved inklusion, er H_i'erne det også. H_i'erne har dermed endeligt snit egenskaben, så $H = \bigcap_i H_i \neq \emptyset$, men $H \subseteq K$ og $H \subseteq X - (U \cup V)$, så $K \cap X - (U \cup V) \neq \emptyset$, i modstrid med at $K = A \cup B \subseteq U \cup V$. Vi konkluderer at K er sammenhængende.

■

Sætning 4.10 *Lad X være et T_1 kontinuum med card$X > 1$. Da har X mindst to punkter der ikke er skæringspunkter for X.*

Bevis:
Sæt $A = \{x \in X \mid x \text{ er ikke skæringspunkt for } X\}$, og antag for modstrid at $cardA < 2$. Vælg $x_0 \in X - A$, og lad $U \cup V$ være en separation af $X - x_0$. Da $cardA < 2$, må A ligge i enten U eller V, antag at det er V. Dermed må U jo bestå af lutter skæringspunkter for X. Til ethvert $x \in U$ findes altså en separation $X - x = U_x \cup V_x$. Vi kan gerne antage ved eventuelt at bytte om på U_x og V_x at $x_0 \in V_x$ for alle $x \in U$. Vi har at V_x er åben i $X - x$. Da X er T_1, er $X - x$ åben i X. Dermed er V_x åben i X, så $U_x \cup x = X - V_x$ er afsluttet i X. Dermed er $U_x \cup x$ kompakt. Ydermere vil $U_x \cup x$ være sammenhængende (se beviset for 4.4). Da $U_x \cup x \subseteq X - x_0 = U \cup V$ og $x \in U$, har vi at $U_x \cup x \subseteq U$, specielt kan $U_x \cup x$'erne ikke indeholde A. Hvis U_x'erne ordnes ved streng inklusion, giver maksimalitetsprincippet (se [1] side 69) at vi kan finde en maksimal total ordnet delmængde $\{U_{x_i}\}_{i \in I}$ af U_x'erne. Vi påstår nu at $\bigcap_{i \in I} U_{x_i} = \bigcap_{i \in I}(U_{x_i} \cup x_i)$. Antag nemlig at $x_j \in U_{x_i}$, da vil $V_{x_i} \cup x_i \subseteq X - x_j = U_{x_j} \cup V_{x_j}$. Da $x_0 \in V_{x_j} \cap V_{x_i}$ og $V_{x_i} \cup x_i$ er sammenhængende, må $V_{x_i} \cup x_i \subseteq V_{x_j}$. Heraf følger at $U_{x_j} \cup x_j \subseteq U_{x_i}$, og dette giver den ønskede lighed. $U_{x_i} \cup x_i$'erne er kompakte, og de har endeligt snit egenskaben, så $\bigcap_{i \in I} U_{x_i} \neq \emptyset$. Lad $p \in \bigcap_{i \in I} U_{x_i}$ og betragt U_p. $U_p \neq \emptyset$, da $p \in U$ og $U_p \cup V_p$ er derfor en separation af $X - p$. Ydermere må som ovenfor gælde at $U_p \subseteq \bigcap_{i \in I} U_{x_i}$. Lad nu $q \in U_p$, da vil $p \notin U_q$ og $U_q \subset \bigcap_{i \in I} U_{x_i}$, men dette strider mod maksimaliteten. Vi slutter at $cardA \geq 2$.

■

Sætning 4.11 *Lad X være et T_1 kontinuum, og lad A være mængden af ikke skæringspunkter for X. Da findes intet kontinuum $Y \subset X$ der indeholder A.*

Bevis:
Antag at Y er et sådant kontinuum, og lad $x \in X - Y$. Da er x et skæringspunkt for X, så der findes en separation af $X - x = U \cup V$. Da $Y \subseteq X - x$ og Y er sammenhængende, må Y være indeholdt i enten U eller V, antag at $Y \subseteq U$. $V \cup x$ er et kontinuum med $cardV > 1$, så $V \cup x$ indeholder mindst to ikke skæringspunkter for $V \cup x$ hvoraf et så må være forskelligt fra x. Lad z være et sådant ikke skæringspunkt for $V \cup x$, dvs. $V \cup x - z$ er sammenhængende. Da $x \in (V \cup x) \cap (U \cup x)$, er $X - z = (U \cup x) \cup (V \cup x - z)$ sammenhængende, z var altså ikke et skæringspunkt for X, men dette strider mod at $A \subseteq U$.

■

Som umiddelbart korollar fås:

Korollar 4.12 *Lad X være et T_1 kontinuum, og lad x være et skæringspunkt for X, dvs. der findes en separation $X - x = U \cup V$. Da vil både U og V indeholde punkter der ikke er skæringspunkter for X.*

Bevis:
I lyset af de to ovenstående sætninger samt beviser er dette trivielt.

■

Sætning 4.13 *Lad $(X, \mathcal{T})$være et T_1 kontinuum med netop to ikke skæringspunkter p og q. Da er $(E(p,q), \mathcal{T}_<) = (X, \mathcal{T})$. Her er $\mathcal{T}_<$ ordenstopologien på $E(p,q)$.*

Bevis:
Vi viser først $E(p,q) = X$. Givet $x \in X$ med $x \neq p, q$, da vil x være et skæringspunkt for X, dvs. der findes en separation af $X - x = U_x \cup V_x$. Antag at $x \notin E(p,q)$, da gælder enten $\{p,q\} \subseteq U_x$ eller $\{p,q\} \subseteq V_x$. Antag at $\{p,q\} \subseteq U_x$, ifølge korollar 4.12 må V_x indeholde et ikke skæringspunkt r for X med $r \neq p, q$, men dette er en modstrid. Vi konkluderer at $E(p,q) = X$.

Sætning 4.5 giver at $\mathcal{T}_< \subseteq \mathcal{T}$. Vi viser at $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_<$. Lad $U \in \mathcal{T}$, og lad $x \in U$ være givet med $x \neq p, q$, og antag at der ikke findes noget interval (r, s) med $x \in (r,s) \subseteq U$. Lad $\{(r_i, s_i)\}_i$ være familien af intervaller med $x \in (r_i, s_i)$ for alle i.

Maksimalitetsprincippet, se [3] side 25, giver at vi kan finde en maksimal delfamilie $\{(r_j, s_j)\}_j$ der er totalt ordnet ved inklusion sådan at $\bigcap_j (r_j, s_j) = \{x\}$. x har ikke nogen umiddelbar forgænger eller efterfølger thi hvis y var en sådan, ville enten $[p, x) \cup (y, q]$ eller $[p, y) \cup (x, q]$ være en separation af X. Vi har derfor at $\bigcap_j [r_j, s_j]$. Vi har nu at $[r_j, s_j] \cap (X - U) \neq \emptyset$ for alle j, og at familen $\{[r_j, s_j] \cap (X - U)\}_j$ har endeligt snitegenskaben. Vi har altså at $\bigcap_j [r_j, s_j] \cap (X - U) \neq \emptyset$. På den anden side er var $\bigcap_j [r_j, s_j] = \{x\}$ hvilket strider mod $\bigcap_j [r_j, s_j] \cap (X - U) \neq \emptyset$. Tilfældene hvor $x = p$ henholdsvis $x = q$ klares tilsvarende, men her ses på intervaller på formen $[p, s)$ henholdsvis $(r, q]$. Vi konkluderer at $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_<$, og endelig at $(X, \mathcal{T}) = (E(p, q), \mathcal{T}_<)$.

■

Sætning 4.14 *Lad A være en tællelig totalt ordnet mængde uden mindste eller største element således at hvis $a < b$, da findes c så $a < c < b$. Da er A ordensisomorf med de dyadiske rationelle tal, dvs. tal på formen $k/2^n$ med $0 < k < 2^n$.*

Bevis:
Numerer elementerne i $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$, og sæt $f(a_1) = 1/2$. Lad n_1 og n_2 være de første to tal hvor $a_{n_1} < a < a_{n_2}$. Sæt $f(a_{n_1}) = 1/2^2$ og $f(a_{n_2}) = 3/2^2$. Lad nu n_3, n_4, n_5 og n_6 være de første fire tal så $a_{n_3} < a_{n_1} < a_{n_4} < a_1 < a_{n_5} < a_{n_2} < a_{n_6}$. Sæt $f(a_{n_3}) = 1/2^3$, $f(a_{n_4}) = 3/2^2$,$f(a_{n_5}) = 5/2^2$ og $f(a_{n_6}) = 7/2^2$. Fortsættes på denne måde, får vi en afbildning f fra A ind i de dyadisk rationelle tal, og f er den ønskede ordensisomorfi.

■

Vi bemærker specielt at $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$ er ordensisomorf med de dyadisk rationelle tal.

4.3 Peanokontinua

Definition 4.15 *Et kontinuum X kaldes et peanokontinuum hvis X er metrisk og lokalt sammenhængende.*

Sætning 4.16 *Lad X være et metrisk kontinuum. Hvis X har netop to ikke skæringspunkter, da er X homeomorf med I.*

Bevis:
Vi bemærker først at ifølge sætning 4.13 er $E(p, q) = X$, og ordenstopologien på $E(p, q)$ stemmer overens med X's topologi. Da X er kompakt og metrisk, findes en tællelig tæt delmængde $A \subset X$. Vi kan gerne antage $p, q \notin A$.

Vi viser at A opfylder kravene i sætning 4.14.

Antag for modstrid at $a \in A$ er et mindste element. Da $a \in E(p,q) - \{p,q\}$, findes der en separation af $X - a = U_a \cup V_a$ med $p \in U_a$ og $q \in V_a$. U_a er åben i X, og X er sammenhængende og T_1, så $\{p\} \neq U_a$. Vælg derfor $x \in U_a - p$, da vil $[p,x) \cap A = \emptyset$ i modstrid med at A var tæt i X.

På samme måde ses det at A ikke har noget største element.

Vi viser nu at for alle $a, b \in A$ eksisterer der et $c \in A$ så $a < c < b$ thi antag dette ikke var tilfældet for $a, b \in A$. Da har vi at $(a,b) \cap A = \emptyset$, men $(a,b) \neq \emptyset$, thi så var $[p,a) \cup (b,q] = X$ en separation. Der findes altså et $x \in (a,b)$. Af samme grund findes y og z så $a < x < z < y < b$, men så er $(x,y) \neq \emptyset$ og $(x,y) \cap A = \emptyset$ i strid med at A var tæt i X.

Sætning 4.14 giver nu at der findes en ordensisomorfi $f : A \to (0,1) \cap \mathbb{Q}$. Vi viser at ordenstopologien på A stemmer overens med delrumstopologien. Lad derfor (a,b) være et åbent interval i A, da er $(a,b) = (a,b) \cap A$ hvor (a,b) på højresiden er intervallet (a,b) i X. Lad nu $x, y \in X$, og betragt $(x,y) \cap A$. Det er klart at $\bigcup(a_i, b_i) \subseteq (x,y) \cap A$ hvor $a_i, b_i \in A$, $x < a_i < b_i < y$ og (a_i, b_i)'erne er åbne intervaller i A. Antag nu at $c \in (x,y) \cap A$, da findes $a \in (x,c)$ og $b \in (c,y)$ med $a, b \in A$ da A er tæt i X så $c \in (a,b) \cap A$. Vi konkluderer at $\bigcup(a_i, b_i) = (x,y) \cap A$, så delrumstopologien på A er den samme som ordenstopologien. Ordensisomorfien f er altså en homeomorfi.

Givet $x \in X - \{p,q\}$, sætter vi nu $S_x = \{a \in A \mid x < a\}$ og definerer $h : X \to I$ ved $h(x) = \inf\{f(S_x)\}$ for $x \in X - q$ og $h(q) = 1$. Det ses let at h er en bijektiv og kontinuert afbildning. Da X er kompakt og I er hausdorff, er h en homeomorfi.

$\blacksquare$

Definition 4.17 *Lad X være et topologisk rum, og lad $C_1 = \{U_1, \dots, U_n\}$ og $C_2 = \{V_1, \dots, V_m\}$ være enkle kæder fra x til y med $x, y \in X$. Da siges C_2 at gå lige igennem C_1 hvis følgende er opfyldt:*

1*): For ethvert $V_i \in C_2$ findes et $U_j \in C_1$ så $V_i \subseteq U_j$*

2*): Hvis $V_l, V_k \subseteq U_j$, da vil $V_i \subseteq U_j$ for alle $l < i < k$.*

Sætning 4.18 *Lad X være et sammenhængende, lokalt sammenhængende hausdorff rum, og lad $C = \{U_1, \dots, U_n\}$ være en enkel kæde af sammenhængende mængder fra x til y med $x, y \in X$. Antag at $\mathcal{V}$ er en samling af åbne mængder således at U_i er en forening af elementer fra $\mathcal{V}$ for alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Da findes en enkel kæde af elementer fra $\mathcal{V}$ fra x til y der går lige igennem C.*

Bevis:
Sæt $x = x_0$ og $y = x_n$, og vælg for hvert $i = 1, \dots, n-1$ et $x_i \in U_i \cap U_{i+1}$. Da

hvert U_i er sammenhængende, giver sætning 4.7 at der findes en enkel kæde $C_i = \{V_{i1}, \dots, V_{in_i}\}$ med elementer fra $\mathcal{V}$ fra x_{i-1} til x_i der er helt indeholdt i U_i for $i = 1, \dots, n$. Der findes et første element V_{1k} i C_1 der møder et element fra C_2, og der findes et sidste element V_{2l} fra C_2 der møder V_{1k}. $C_1' = \{V_{11}, \dots, V_{1k}, V_{2l}, \dots, V_{2n_2}\}$ er en enkel kæde fra x_0 til x_2. Det generelle skridt klares fuldstændig tilsvarende. På denne måde kan vi altså konstruere en enkel kæde fra x_0 til x_n med elementer fra $\mathcal{V}$ som klart vil gå lige igennem C.

■

Sætning 4.19 *Lad X være et lokalt kompakt, metrisk, sammenhængende og lokalt sammenhængende rum, da er X stisammenhængende. Vi kan endda finde en sti imellem vilkårlige to punkter i X der er et homeomorft billede af I.*

Bevis:
Lad $x, y \in X$, og overdæk X med sammenhængende åbne mængder med diameter < 1. Da findes ifølge sætning 4.7 en enkel kæde $C_1 = \{U_{11}, \dots, U_{1n_1}\}$ fra x til y med elementer fra overdækningen. For hvert $i = 1, \dots, n_1$, og for hvert $z \in U_{1i}$ vælges en sammenhængende åben omegn U_z af diameter $< 1/2$ så $\overline{U}_z \subseteq U_{1i}$ og $\overline{U}_z$ er kompakt. Sætning 4.18 giver at vi kan finde en enkel kæde $C_2 = \{U_{21}, \dots, U_{2n_2}\}$ fra x til y der består af disse nye elementer sådan at denne kæde går lige igennem C_2. På tilsvarende måde kan vi konstruere $C_3, C_4, \dots$. Sæt $K_i = \overline{U}_{i1} \cup \dots \cup \overline{U}_{in_i}$ for $i \in \mathbb{Z}_+$. Da er alle K_i'erne kontinua, og de er totalt ordnet under $\subseteq$, så sætning 4.9 giver at $K = \bigcap_i^\infty K_i$ er et kontinuum. Bemærk at $x, y \in K_i$ for alle i, så $x, y \in K$. Betragt nu $z \in K - \{x, y\}$, sæt E_i lig med foreningen af alle de U_{ij} der kommer efter de et eller to elementer i C_i, der indeholder z. Sæt på samme måde F_i lig med foreningen af de U_{ik} der kommer før de et eller to elementer i C_i der indeholder z. Sæt $E = \bigcup_i E_i \cap K$ og $F = \bigcup_i F_i \cap K$. Bemærk at E og F ikke er tomme da afstanden fra z til både x og y er større en nul, så der findes et trin j så $z \notin U_{j1}, U_{jn_j}$. Vi har nu at $K - z = E \cup F$, $E \cap F = \emptyset$ og E og F er åbne i K, så z er et skæringspunkt for K. Da alle $z \in K - \{x, y\}$ er skæringspunkter, må x og y ifølge sætning 4.10 så være ikke skæringspunkter for K. K er altså et metrisk kontinuum med netop to ikke skæringspunkter, men så er $K \cong I$ ifølge sætning 4.16.

■

som umiddelbart korollar fås:

Korollar 4.20 *Ethvert peanokontinuum er stisammenhængende og lokalt stisammenhængende.*

Bevis:

■

Lemma 4.21 *Lad X være et hausdorff rum, og lad $f : I \to X$ være en surjektiv kontinuert afbildning. Da er X et peanokontinuum.*

Bevis:
Vi bemærker først at I er et peanokontinuum. Det er derfor klart at $f(I) = X$ er kompakt og sammenhængende. Hvis $A \subseteq I$ er en afsluttet mængde, er A også kompakt da I er det. Dermed er $f(A)$ kompakt. Da X er hausdorff, er $f(A)$ afsluttet i X. Vi har altså at f er en afsluttet afbildning. Da f også er surjektiv, er f en kvotient afbildning. Det følger nu at X er lokalt sammenhængende da I er lokalt sammenhængende. Da X er hausdorff, er enhver etpunktsmængde afsluttet. Lad $x \in X$, da er $f^{-1}(x)$ afsluttet i I da f er kontinuert, og da I er kompakt, er $f^{-1}(x)$ kompakt. Vi har altså at f er en perfekt afbildning. Heraf følger at X er anden tællelig da I er det. Urysohns metrisationssætning giver så at X er metrisk. Vi konkluderer at X er et peanokontinuum.

■

Det omvendte resultat der siger at hvis X er et peanokontinuum, da er X billedet af I under en kontinuert afbildning, gælder også. Resultatet er kendt som Hahn-Mazurkiewicz's sætning. Vi skal dog ikke bruge dette resultat, og vi vil derfor ikke vise det.

5 Planemængder

5.1 Peanokontinua i planen

Vi skal bruge følgende resultat fra kompleks funktionsteori om konforme afbildninger på randen af områder.

Sætning 5.1 *Lad G være et område, dvs. G er åben og stisammenhængende, og lad $f : \operatorname{int} D^2 \to G$ være en konform afbildning. Da er følgende udsagn ækvivalente:*

1)*: f har en kontinuert udvidelse til D^2.*

2)*: Der findes en kontinuert surjektiv afbildning $\varphi : S^1 \to \partial G$.*

3)*: ∂G er lokalt sammenhængende.*

4)*: $\mathbb{C} - G$ er lokalt sammenhængende.*

Bevis:
Vi vil ikke bevise sætningen her, men blot henvise til [2].

■

Vi skal også bruge begrebet svagt lokalt sammenhængende og et tilhørende lemma om dette.

Definition 5.2 *Lad X være et topologisk rum, og lad $x \in X$. Da siges X at være svagt lokalt sammenhængende i x såfremt følgende gælder: Hvis U er en omegn af x, da findes en sammenhængende mængde A og en omegn V af x således at $x \in V \subseteq A \subseteq U$.*

Lemma 5.3 *Lad X være svagt lokalt sammenhængende i alle sine punkter. Da er X lokalt sammenhængende.*

Bevis:
Lad U være en åben delmængde af X, og lad C være en sammenhængskomponent for U, og lad $x \in C$. Da findes $x \in V \subseteq A \subseteq U$ med A sammenhængende og V åben. Da A er sammenhængende har vi at $x \in V \subseteq A \subseteq C$. Da V er en omegn af x i C, slutter vi at x er et indre punkt i C. C er altså åben, så sætning 25.3 i [1] giver nu at X er lokalt sammenhængende.

$\blacksquare$

Lad $\alpha : S^1 \to \mathbb{R}^2$ være en kontinuert afbildning. Med O noteres den ubegrænsede stikomponent af $\mathbb{R}^2 - \alpha(S^1)$. Vi kalder $I(\alpha) = \mathbb{R}^2 - O$ for det til α hørende indre område.

Lemma 5.4 *Lad Y og X være peanokontinua med $Y \subseteq X$, og lad $\mathcal{C}$ være samlingen af stikomponenter af $X - Y$, lad ydermere $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$. Da gælder at $Z = Y \cup \bigcup_{C \in \mathcal{C}'} C$ er et peanokontinuum.*

Bevis:
Vi skal vise at Z er kompakt, metrisk, sammenhængende og lokalt sammenhængende. Da Z er en delmængde af et metrisk rum, er Z født metrisk.

Vi viser at Z er kompakt: Vi bemærker først at X er lokalt stisammenhængende, og $X - Y$ er en åben delmængde af X. Dette gælder da Y er kompakt, og X er hausdorff. Sætning 25.4 i [1] giver at alle $C \in \mathcal{C}$ er åbne. Dermed er $X - \bigcup_{C \in \mathcal{C} - \mathcal{C}'} C = Z$ afsluttet i X. Da X er kompakt, er Z kompakt.

Vi viser nu at Z er stisammenhængende og dermed sammenhængende. Da Y er et peanokontinuum og dermed stisammenhængende, er det nok at vise at for ethvert $x \in C$ hvor $C \in \mathcal{C}'$, findes et $y \in Y$ så y er forbundet med x relativt til Z. Lad derfor $C \in \mathcal{C}'$ og $x \in C$ være givet, og vælg $y_0 \in Y$. Da X er stisammenhængende, findes en sti $\alpha : I \to X$ fra y_0 til x. Da C er åben i X, er $\alpha^{-1}(X - C)$ afsluttet i I og dermed kompakt. Da $\alpha^{-1}(X - C)$ er kompakt, findes $t = \min\{\alpha^{-1}(X - C)\}$. Hvis $\alpha(t) \notin X - Y$, ville der findes $C_0 \in \mathcal{C}$ med $C_0 \neq C$ og $\alpha(t) \in C_0$. Men dette strider mod at C var en stikomponent af $X - Y$. Vi kan derfor bruge $y = \alpha(t) \in Y$ da $\alpha : [0, t] \to Z$ er en sti der forbinder x med y.

Det at vise at Z er lokalt sammenhængende, er lidt sværere. Vi viser at Z er svagt lokalt sammenhængende i alle sine punkter. Alle stikomponenterne i $X - Y$ er åbne delmængder af X. De er derfor også lokalt stisammenhængende da X er det. Heraf følger at hvis $x \in Z - Y$, da er Z lokalt sammenhængende i x. Vi kan derfor nøjes med at betragte $x \in Y$.

Antag altså at $x \in Y$, og lad $\varepsilon > 0$ være givet. Da er $B(x, \varepsilon) \cap Y$ en åben omegn af x i Y. Y er lokalt stisammenhængende. Vi kan derfor finde $\varepsilon > \eta > 0$ så $Y \cap B(x, \eta)$ er stisammenhængende. Da X også er lokalt stisammenhængende, kan vi finde $\eta > \delta > 0$ så $B(x, \delta)$ er stisammenhængende.

Lad nu $y \in Z \cap B(x, \delta)$. Vi kan gerne antage at $y \notin Y$. Vi har altså et $C \in \mathcal{C}'$ med $y \in C$. Vælg en sti $\alpha : I \to B(x, \delta)$ fra y til x. Sæt $t = min\{\alpha^{-1}(X - C)\}$. Da er $\alpha\mid_{[0,t]}$ en sti fra y til $\alpha(t) \in Y \cap B(x, \delta)$. Da $Y \cap B(x, \eta)$ er stisammenhængende, findes en sti $\beta : I \to Y \cap B(x, \eta)$ fra $\alpha(t)$ til x. Dermed er $\alpha\mid_{[0,t]} \cdot \beta$ en sti fra y

til x i $Y \cap B(x,\eta)$. Vi har dermed vist at ethvert $y \in Z \cap B(x,\delta)$ kan forbindes til x med en sti der løber i $Z \cap B(x,\eta)$.

For hvert $y \in Z \cap B(x,\delta)$ vælges en sti α_y fra y til x med $\alpha_y(I) \subseteq Z \cap B(x,\eta)$. Da er $\bigcup_{y \in Z \cap B(x,\delta)} \alpha_y(I)$ en sammenhængende mængde. Der gælder $Z \cap B(x,\delta) \subseteq \bigcup_{y \in Z \cap B(x,\delta)} \alpha_y(I) \subseteq Z \cap B(x,\eta)$. Vi har altså at Z er svagt lokalt sammenhængende i x. Lemma 5.3 giver nu at Z er lokalt sammenhængende som ønsket.

■

Heraf følger umiddelbart at $I(\alpha)$ er et peanokontinuum når vi har en sti $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$.

Definition 5.5 *En delmængde $X \subseteq \mathbb{R}^n$ kaldes stjerneformet hvis der findes et $x_0 \in X$ således at for ethvert $x \in X$ vil også liniestykket $[x_0, x]$ ligge i X.*

$X \subseteq \mathbb{R}^n$ kaldes lokalt stjerneformet hvis ethvert punkt i X har en stjerneformet omegn.

Vi bemærker at hvis $U \subseteq \mathbb{R}^n$ er en åben delmængde, da er U lokalt stjerneformet da åbne kugler i $\mathbb{R}^n$ er stjerneformede (endda konvekse).

Lemma 5.6 *Lad X være et lokalt stjerneformet rum, da vil enhver sti i X være homotop med en stykkevis lineær sti i X. Vi kan ydermere finde en homotopi relativt til endepunkterne.*

Bevis:
Lad X være lokalt stjerneformet, og lad $\alpha : I \to X$ være en sti. Til hvert $t \in I$ vælger vi en stjerneformet omegn U_t af $\alpha(t)$. Dermed er $\mathcal{U} = \{U_t : t \in I\}$ en åben overdækning af $\alpha(I)$, så $\{\alpha^{-1}(U_t) : t \in I\}$ er en åben overdækning af I. Da I er kompakt og metrisk, har overdækningen et lebesguetal. Vælg $N \in \mathbb{Z}_+$ så $1/N$ er et lebesguetal for overdækningen. Sæt $\alpha_k = \alpha \mid_{[k-1/N,k/N]}$ for $1 \leq k \leq N$. Der findes et $t \in I$ så $[k-1/N, k/N] \subseteq \alpha^{-1}(U_t)$, og dermed vil billedet af α_k ligge i U_t. Resultatet følger nu umiddelbart når vi bemærker at der klart gælder $\pi_1(Y) = 1$ når Y er stjerneformet, og at vilkårlige to punkter i et stjerneformet rum er forbundet med en stykkevis lineær sti. At vi endda kan finde en homotopi relativt til endepunkterne, følger også umiddelbart af dette.

■

Lemma 5.7 *Lad $X \subseteq \mathbb{R}^2$ være lokalt stjerneformet. Hvis $\pi_1(X) \neq 1$, da findes en polygonal, essentiel, enkelt lukket kurve i X.*

Bevis:
Lad $\alpha : I \to X$ være en løkke med $[\alpha] \neq 1$. Ifølge lemma 5.6 er α homotop med en stykkevis lineær sti γ med $\gamma(0) = \gamma(1)$. Specielt har vi $[\gamma] = [\alpha] \neq 1$. Vi kan opfatte $\gamma(I)$ som en endelig graf i planen. Vi sammentrækker nu alle de kanter i $\gamma(I)$ hvor sammentrækningen kan forløbe helt indenfor $\gamma(I)$. Det lyder måske lidt kryptisk. Ideen er at $\gamma(I)$ kan have "udvækster"i form af træer. Disse kan vi trække sammen til et punkt i $\gamma(I)$, og sammentrækningen foregår helt indenfor $\gamma(I)$. Det er klart at dette ikke har nogen indflydelse på γ's homotopi klasse. Basispunktet kunne selvfølgelig tænkes at ligge på en af disse "udvækster". Vi kan derfor blive nødsaget til at flytte basispunktet. Det er dog uden betydning da den nye $\pi_1(X)$ kun afviger med en isomorfi. En endelig graf hvor vi har fjernet alle sådanne udvækster, består af en endelig samling af enkelt lukkede kurver samt kanter der forbinder disse. Der må da findes en inderste enkelt lukket kurve γ_1, dvs. at alle de andre kurver snitter tomt med $I(\gamma_1)$ - der kan godt være mange inderste kurver. Der er nu to muligheder, enten er $[\gamma_1] = 1$, eller også er $[\gamma_1] \neq 1$. Hvis $[\gamma_1] \neq 1$ er vi færdige. Hvis ikke kan vi sammentrække γ_1 til et punkt indenfor X. Vi kan så vælge en ny inderste kurve. Fortsætter vi på denne måde, må vi på et eller andet tidspunkt finde en enkelt lukket kurve γ_n med $[\gamma_n] \neq 1$, thi ellers ville $[\gamma] = 1$.

■

Dette lemma giver anledning til vores første mindre resultat om fundamentalgruppen af plane mængder.

Korollar 5.8 *Lad $X \subseteq \mathbb{R}^2$ være lokalt stjerneformet. Hvis $\pi_1(X) \neq 1$, da vil der findes en injektiv homomorfi $i : \mathbb{Z} \to \pi_1(X)$.*

Bevis:
Ifølge lemma 5.7 findes en essentiel enkelt lukket kurve γ i X. Da γ er essentiel, må $I(\gamma) - (I(\gamma) \cap X) \neq \emptyset$. Lad $x \in I(\gamma) - (I(\gamma) \cap X)$, da findes en retraktion $r : \mathbb{R}^2 - x \to \gamma(I)$ og da $x \notin X$, vil $r|_X : X \to \gamma(I)$ være en retraktion. Heraf følger at $\mathbb{Z} \cong \pi_1(\gamma(I)) \hookrightarrow \pi_1(X)$.

■

Specielt kan fundamentalgruppen af en plan, lokalt stjerneformet mængde, herunder alle åbne mængder i planen, ikke være endelig.

Jeg ved ikke om ovenstående resultat er kendt. Jeg er i hvertfald ikke stødt på det før.

Definition 5.9 *Lad $X \subseteq \mathbb{R}^2$. Ved et hul i X forstås en stikomponent af $\mathbb{R}^2 - X$.*

Sætning 5.10 *Lad $X \subseteq \mathbb{R}^2$ være et peanokontinuum med $\text{card}X > 2$. Ethvert hul i X pånær et er homeomorf med* int D^2. *Det sidste hul som er den ubegrænsede stikomponent af $\mathbb{R}^2 - X$, er homeomorf med den udprikkede, åbne cirkelskive.*

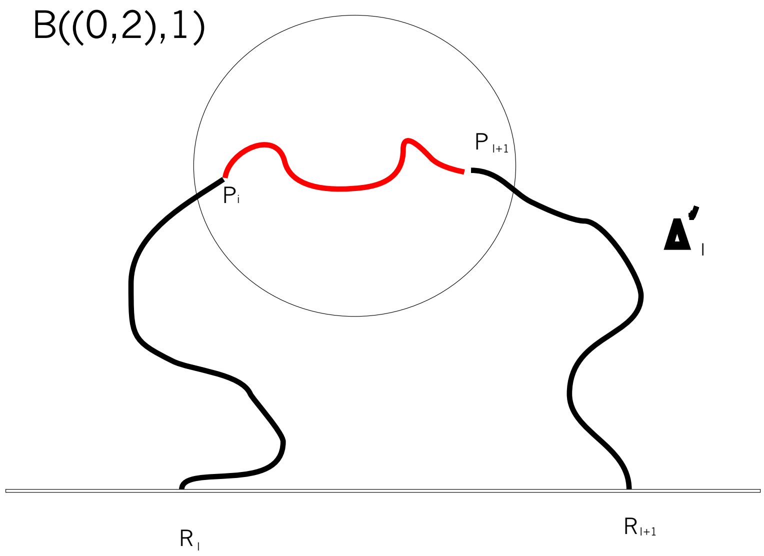
Bevis:
Lad H være et hul i X. Bemærk at $\mathbb{R}^2 - X$ er en åben delmængde af det lokalt stisammenhængende rum $\mathbb{R}^2$ så sætning 25.4 i [1] giver at H er åben i $\mathbb{R}^2$. Vi indlejrer $\mathbb{R}^2$ i S^2. For ikke at skulle behandle det ubegrænsede hul for sig, vil vi i det tilfælde betragte $H \cup \{\infty\} \subseteq S^2$ istedet. Vi viser at $\pi_1(H) = 1$, thi da giver Riemanns afbildningssætning det ønskede resultat. Antag derfor at $\pi_1(H) \neq 1$. Lemma 5.7 giver at der findes en essentiel, polygonal, enkelt lukket kurve γ i H. Schöenflies sætning giver at γ deler S^2 i to åbne cirkelskiver U_1 og U_2, begge med rand γ. Både U_1 og U_2 må indeholde punkter fra $S^2 - H$ thi hvis en af dem ikke gjorde, kunne vi sammentrække γ til et punkt henover denne i modstrid med at γ var essentiel i H. Dermed må både U_1 og U_2 indeholde punkter fra X, antag nemlig at f.eks. $U_1 \cap X = \emptyset$. Da vil $U_1 \cup \gamma = \overline{U}_1 \subseteq S^2 - X$. Da $\overline{U}_1$ er stisammenhængende, og $\overline{U}_1 \cap H \neq \emptyset$, vil $U_1 \subset \overline{U}_1 \subseteq H$ i modstrid med at U_1 indeholder punkter fra $S^2 - H$. At både U_1 og U_2 indeholder punkter fra X, er i modstrid med at X er stisammenhængende.

$\blacksquare$

Sætning 5.11 *Lad $X \subseteq \mathbb{R}^2$ være et peanokontinuum. Hvis X har uendeligt mange huller, da vil diametrene af disse huller udgøre en nulfølge.*

Bevis:
Antag at det ikke gælder. Lad $(H_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ være familien af huller i X hvor $H_i \neq H_j$ for $i \neq j$, og vælg følger $(P_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ og $(Q_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ således at $P_i, Q_i \in H_i$, og $d(P_i, Q_i) > \varepsilon$ for alle $i \in \mathbb{Z}_+$. Da alle hullerne pånær et ligger i en stor kompakt cirkelskive, vil både (P_n) og (Q_n) kunne udtyndes til delfølger der konvergerer.

Udtynd først (P_n) så vi får en konvergent delfølge (P'_n). Konstruer en delfølge (Q'_n) af (Q_n) ved hver gang P_i er med i delfølgen (P'_n) at tage Q_i med i (Q'_n). Vi har så to nye følger (P'_n) og (Q'_n). På samme måde som før udtynder vi nu (Q'_n) og (P'_n), til (Q''_n) og (P''_n) så (Q''_n) er konvergent. Både (P''_n) og (Q''_n) er så konvergente, og vi noterer deres grænser med P henholdsvis Q. Vi dropper nu ”$''$“erne på (P''_n) og (Q''_n), så notationen ikke bliver for tung da vi ikke skal bruge de oprindelige følger mere. Efter en eventuel homeomorfi af planen kan vi gerne antage at $P = (0, 2)$ og $Q = (0, -2)$. Vi kan også smide starten af følgerne (P_n) og (Q_n) væk så $P_i \in B((0, 2), 1)$ og $Q_i \in B((0, -2), 1)$ for alle i. Vælg nu for hvert P_i en polygonal sti $\alpha_i : I \to H_i$ fra P_i til Q_i der ikke skærer sig selv.



Figur 1: Δ_i'

Vi kan uden tab af generalitet antage at hver kurve α_i kun skærer randen af $B((0,2),1)$ en gang og ligeledes med $B((0,-2),1)$. Dette kan opnås ved kun at betragte en del af den oprindelige kurve α_i såfremt denne ikke opfylder betingelserne selv. Vi vil så være nødt til passende at omdefinere vores P_i og Q_i. Det er klart at vi så ikke længere kan håbe på at vores to følger konvergerer, men det betyder ikke så meget da vi ikke skal bruge konvergensen mere i beviset. Bemærk at dette afviger fra det oprindelige bevis der uden denne mindre tilføjelse er forkert.

Sæt R_i til at være det første skæringspunkt med x-aksen for α_i. Dette giver en begrænset følge (R_n) på x-aksen. Vi kan nu udtynde $((P_n),(Q_n),(\alpha_n),(R_n))$ således at (R_n) konvergerer monotont - Vi betegner delfølgerne med samme symboler som de oprindelige følger da de oprindelige alligevel ikke bruges mere i beviset. Vi sætter $R = \lim R_n$.

Vi konstruerer nu nogle enkelt lukkede kurver som følger:
Forbind P_i med P_{i+1} ved hjælp af en kurve γ_i der ikke skærer sig selv, og som forløber helt indenfor $B((0,2),1)$.
Forbind P_i med R_i, og P_{i+1} med R_{i+1} ved hjælp af α_i henholdsvis α_{i+1}.
Forbind R_i med R_{i+1} ved hjælp af liniestykket $[R_i, R_{i+1}]$ på x-aksen.

Disse kurver danner tilsammen en enkelt lukket kurve. Enkle lukkede kurver i planen omkrandser enkeltsammenhængende områder. Vi benævner disse områder Δ_i'.

Vi skal for senere brug undersøge hvordan α_j'erne løber i forhold til hvert Δ'_i. En α_j kurve kan befinde sig i Δ'_i på to måder. For det første kan den starte sit forløb i Δ'_i, for så på et tidspunkt at forlade Δ'_i ved at krydse γ_i. Disse forløb er ikke interessante for os. Den anden måde hvorpå α_j kan befinde sig i Δ'_i, er ved at krydse liniestykket $[R_i, R_{i+1}]$. Ved at antage generel position må vi have at α_j forlader Δ'_i ved igen at krydse $[R_i, R_{i+1}]$. De stykker af α_j der på denne måde befinder sig i Δ'_i, danner altså en slags halvcirkler.

Vi konstruerer nu nye enkelt lukket kurver som følger:
Forbind P_i med P_{i+1} ved hjælp af γ_i.
Forbind P_i med Q_i, og P_{i+1} med Q_{i+1} ved hjælp af α_i henholdsvis α_{i+1}.
Forbind Q_i med Q_{i+1} ved hjælp af en kurve η_i der ikke skærer sig selv, γ_i ,α_i eller α_{i+1} pånær i Q_i og Q_{i+1}, og som forløber helt indenfor $B((0,-2),1)$.

Disse kurver danner tilsammen en enkelt lukket kurve for hvert $i \in \mathbb{Z}_+$. Områderne i planen der omkrandses af disse enkelt lukkede kurver, benævnes Δ_i.

Vi konstruerer nu en sti ω_i fra R_i til R_{i+1} for hvert $i \in \mathbb{Z}_+$ der forløber helt indenfor Δ_i. ω_i konstrueres som følger: Start i R_i og fortsæt ud af x-aksen mod R_{i+1}. Lige inden den første halvcirkel stopper vi op. Sådanne halvcirkler ligger i et hul i X, og et hul er åbent. Vi kan derfor vælge en sti der løber parallelt med halvcirklen så:

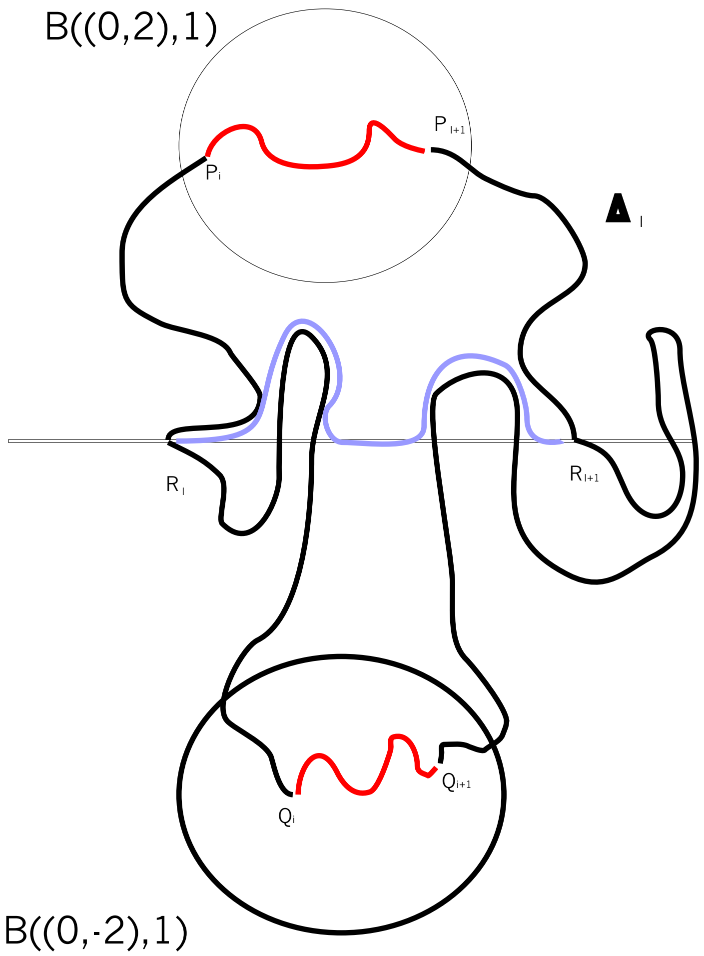
1) Stien er helt indeholdt i det givne hul.

2) Stien er pånær i start- og ende-punkterne helt indeholdt i Δ_i.

Fortsættes på denne måde med at rejse langs x-aksen og stier parallelle til de yderste halvcirkler, får vi en sti ω_i. Da R_i og R_{i+1} tilhører hver sit hul, må ω_i skærer X. Per konstruktion af ω_i vil alle disse skæringspunkter ligge på x-aksen. Vælg for hvert $i \in \mathbb{Z}_+$ et punkt $S_i \in \Delta_i \cap X \cap [R_i, R_{i+1}]$. Følgen (S_n) konvergerer klart mod R. Da X er afsluttet, vil $R \in X$.

Vi påstår nu at X ikke er lokalt stisammenhængede i R. Betragt $B(R,\delta) \cap X$ for givet $\delta > 0$. Da $\lim S_n = R$, findes et $i \in \mathbb{Z}_+$ så $S_i \in B(R,\delta) \cap X$. En sti fra R til S_i må krydse randen af Δ_i. Hvis stien skal ligge i $B(R,\delta) \cap X$, kan den ikke krydse α_i eller α_{i+1} da disse er indeholdt i $\mathbb{R}^2 - X$. Stien må så krydse enten γ_i eller η_i. Nu var $\gamma_i \subseteq B((0,2),1)$ og $\eta_i \subseteq B((0,-2),1)$, og R lå på x-aksen. Hvis $\delta < 1$, er det derfor ikke muligt at finde en sti fra R til S_i i $B(R,\delta) \cap X$. X er altså ikke lokalt stisammenhængende i R i strid med at X er et peanokontinuum. Vi konkluderer at $\operatorname{diam} H_n \to 0$.

$\blacksquare$



Figur 2: Δ_i

Sætning 5.12 *Lad $X \subseteq \mathbb{R}^2$ være et delrum, og lad $\alpha : S^1 \to X$. Hvis $\alpha : S^1 \to X$ er nulhomotop, da er $\alpha : S^1 \to X \cap I(\alpha)$ nulhomotop.*

Bevis:
Vi betragter $\mathbb{R}^2 \subseteq S^2$. Vi sætter $O = S^2 - I(\alpha)$, dvs. O er stikomponenten af $S^2 - \alpha(I)$ indeholdende ∞. Sætning 5.10 giver at der findes en homeomorfi $f : \operatorname{int} D^2 \to O$. Ved nærmere gennemgang af beviset for sætning 5.10 ser vi at vi ydermere kan vælge homeomorfien f således at f er en konform afbildning. Sætning 5.1 giver at der findes en kontinuert udvidelse $\hat{f} : D^2 \to \overline{O}$ med $\hat{f}(\partial D^2) = \partial(O)$. Da D^2 er kompakt, og $\overline{O}$ er hausdorff, er $\hat{f}$ en afsluttet afbildning. For at se det lader vi $A \subseteq D^2$ være en afsluttet delmængde. Da D^2 er kompakt, er A kompakt. Dermed er $\hat{f}(A)$ kompakt. Da $\overline{O}$ er hausdorff, er $\hat{f}(A)$ afsluttet. Da $\hat{f}$ også er surjektiv, er $\hat{f}$ specielt en kvotientafbildning. Sæt $d = f^{-1}(\infty)$, og lad $r : D^2 - d \to \partial D^2$ være en retraktion . Da $\hat{f}$ er en kvotient afbildning, inducerer r en retraktion $R : \overline{O} - \infty \to \partial\overline{O}$. Vi kan udvide denne retraktion til en retraktion $\hat{R} : \mathbb{R}^2 \to I(\alpha)$. Dette gøres ved at sætte $\hat{R}(x) = x$ for $x \in I(\alpha)$. Kontinuiteten følger umiddelbart af tuborg lemmaet, og afbildningen $\hat{R}$ er så klart en retraktion. Lad nu $H : S^1 \times I \to X$ være en homotopi der trækker α sammen til et punkt $x_0 \in X$ indenfor X. Da er $\hat{R} \circ H : S^1 \times I \to X \cap I(\alpha)$ en homotopi. Denne homotopi har den egenskab at $\hat{R} \circ H(s, 0) = \alpha(s)$ og $\hat{R} \circ H(s, 0) = \hat{R}(x_0)$. Med andre ord er $\hat{R} \circ H$ en homotopi der trækker α sammen til et punkt $\hat{R}(x_0) \in X \cap I(\alpha)$ indenfor $X \cap I(\alpha)$ som ønsket.

■

Sætning 5.13 *Lad $X \subseteq \mathbb{R}^2$ være et peanokontinuum. Da er X en deformationsretrakt af et rum X' hvor X' fås ved at fjerne det indre af kvadrater i et større kvadrat i $\mathbb{R}^2$. Hvis der er uendelig mange huller i X, da vil diametrene på disse kvadrater danne en nulfølge.*

Bevis:
Da X er kompakt, findes et stort kvadrat K_0 der indeholder X.
Lad $H_0, H_1, \ldots, H_n, \ldots$ være en nummerering af hullerne i X sådan at H_0 er det ubegrænsede hul. Da hullerne er åbne, kan vi til hvert H_i med $i > 0$ finde et lille åbent kvadrat K_i indeholdt i H_i. Sæt $X' = K_0 - \bigcup_{i>0} K_i$. Ifølge sætning 5.10 findes homeomorfier $f_i : \operatorname{int} D^2 \to H_i$, og disse inducerer kvotient afbildninger $\hat{f}_i : D^2 \to \overline{H}_i$ der er udvidelser af f_i'erne. Vi kan nu finde deformationsretrakter $F_i : D^2 - f^{-1}(K_i) \times I \to D^2$ med $F_i(D^2 - f^{-1}(K_i), 1) = \partial D^2$. Betragt nu $\hat{f}_i \times id : D^2 - f^{-1}(K_i) \times I \to \overline{H}_i - K_i \times I$. $\hat{f}_i \times id$ er klart kontinuert og surjektiv, og da $D^2 - f^{-1}(K_i) \times I$ er kompakt, og $\overline{H}_i - K_i \times I$ er hausdorff, er $\hat{f}_i \times id$ også afsluttet. Vi har specielt at $\hat{f}_i \times id$ er en kvotient afbildning. Det følger nu at deformationsretrakterne F_i på $D^2 - f^{-1}(K_i) \times I$'erne inducerer deformationsretrakter $\hat{F}_i$ på $\overline{H}_i - K_i \times I$ med $\hat{F}_i(\overline{H}_i - K_i \times I, 1) = \partial\overline{H}_i$. Vi kan let udvide

$\hat{F}_i$'erne til hele X' ved blot at sætte $\hat{F}_i(x,t) = x$ når $x \in X' - \overline{H}_i$. Ifølge sætning 5.11 vil diametrene på hullerne danne en nulfølge. Til ethvert $n \in \mathbb{Z}_+$ findes derfor kun endelig mange huller $H_{n_1}, \ldots, H_{n_{m_n}}$ med $1/(n-1) \geq \operatorname{diam} H_j > 1/n$ ($\operatorname{diam} H_j > 1$ for $n = 1$). Sæt $T_n = \bigcup_{i=1}^{n-1} H_{i_1} \cup \ldots \cup H_{i_{m_i}}$. Vi definerer først $G_n : X' \times I \to X'$ ved:

$$G_n(x,t) = \begin{cases} \hat{F}_{n_1}|_{X'-T_n}(x, m_n t) & \text{for } t \in [0, 1/m_n] \\ \hat{F}_{n_2}|_{X'-(T_n \cup H_{n_1})}(x, m_n t - 1) & \text{for } t \in [1/m_n, 2/m_n] \\ \vdots & \\ \hat{F}_{n_{m_n}}|_{X'-(T_n \cup H_{n_1} \cup \ldots \cup H_{n_{m_n - 1}})}(x, m_n t - (m_n - 1)) & \text{for } t \in [(m_n - 1)/m_n, 1] \end{cases}$$

Også definerer vi $R_n : X' \times I \to X'$ ved:

$$R_n(x,t) = \begin{cases} G_1(x, 2t) & \text{for } t \in [0, 1/2] \\ G_2(x, 6t - 3) & \text{for } t \in [1/2, 2/3] \\ \vdots & \\ G_n(x, (n^2+n)t - (n^2 - 1)) & \text{for } t \in [(n-1)/n, n/(n+1)] \\ x & \text{ellers} \end{cases}$$

Følgen (R_n) vil da klart konvergerer uniformt mod:

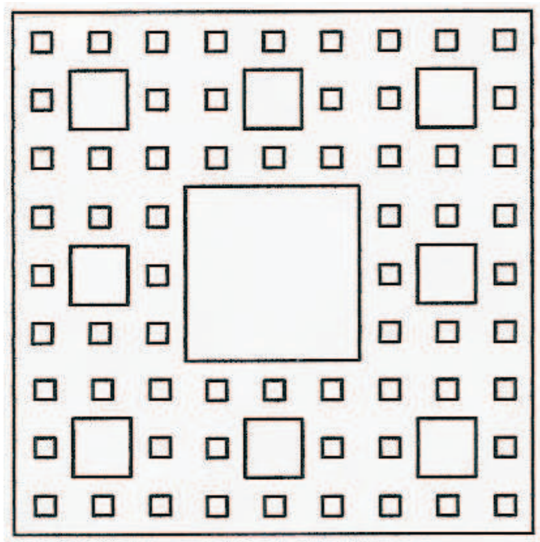
$$R(x,t) = \begin{cases} G_1(x, 2t) & \text{for } t \in [0, 1/2] \\ G_2(x, 6t - 3) & \text{for } t \in [1/2, 2/3] \\ \vdots & \\ G_n(x, (n^2+n)t - (n^2 - 1)) & \text{for } t \in [(n-1)/n, n/(n+1)] \\ \vdots & \end{cases}$$

Da $d(R_n(x,t), R(x,t)) = 0$ for $t \in [0, n/(n+1)]$, og $d(R_n(x,t), R(x,t)) \leq 1/n$ ellers (der flyttes kun på punkter i huller med diameter $\leq 1/n$). Vi har derfor at R er kontinuert. R er så den ønskede deformationsretrakt.

■

5.2 Sierpinskitæppet

Den plane delmængde der går under navnet sierpinskitæppet, og det relaterede begreb delvist udfyldt sierpinskitæppe, spiller en væsentlig rolle i beviset for specialets hovedsætning. Vi vil i dette afsnit kort præsentere nogle begreber og resultater der relaterer sig til sierpinskitæppet og delvist udfyldte sierpinskitæpper.



Figur 3: Sierpinskitæppet

Sierpinskitæppet kan beskrives som følger: Start med et kvadrat S_0, del det i ni ligestore kvadrater, fjern det indre af det midterste kvadrat, og kald den resulterende mængde for S_1. Del derefter de 8 overlevende kvadrater i S_1 i ni lige store kvadrater, fjern det indre af de midterste kvadrater, og kald resultatet S_2. Fortsæt på denne måde. Sierpinskitæppet S er så givet ved $S = \bigcap_{i=0}^{\infty} S_i$.

Et delvist udfyldt sierpinskitæppe S' fås udfra samme iteration med den forskel at man eventuelt undlader at fjerne det indre af nogle af kvadraterne. Man får så en anden følge (S'_n) af delmængder af planen sådan at $S' = \bigcap_{i=0}^{\infty} S'_i$. Følgen (S'_n) kaldes en definerende følge for S'. Det er klart at sierpinskitæppet selv er et delvist udfyldt sierpinskitæppe med definerende følge (S_n).

Bemærkning 5.14 *Det er et resultat fra [6] at man kan styre processen i sætning 5.13 sådan at mængden X' bliver homeomorf med et delvist udfyldt sierpinskitæppe. Beviset er dog meget besværligt, og vi vil ikke gennemgå beviset.*

Sætning 5.15 *Lad S være et delvist udfyldt sierpinskitæppe med definerende følge (S_n). Da gælder der for en løkke $\alpha : I \to S$ at α er nulhomotop i S netop hvis α er nulhomtop i alle S_n'erne.*

Dette er sætning 16 i [7]. Vi vil ikke vise denne sætning da den kræver et ret omfangsrigt set-up.
Vi vil derfor blot henvise til [7] og [6].

■

6 Simpliciale komplekser m.m.

6.1 Simpliciale komplekser

Definition 6.1 *Ved et simplicialt kompleks K forstås en mængde af knudepunkter $\{v\}$ samt visse ikke-tomme endelige delmængder $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ af knudepunkter kaldet simplexer sådan at:*

S1): $\{v\}$ er et simplex for alle $v \in K$.

S2): Hvis $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ er et simplex i K, da er enhver ikke-tom delmængde $S' \subseteq S$ også et simplex.

Hvis $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ er et simplex, siger vi at S er et $n-1$-dimensionalt simplex udspændt af $v_1 \ldots, v_n$. Vi vil ofte skrive $S = [v_1, \ldots, v_n]$ for simplexet udspændt af $v_1 \ldots, v_n$.

En delmængde $L \subseteq K$ af et simplicialt kompleks kaldes et delkompleks hvis L selv er et simplicialt kompleks.

En afbildning $f : K_1 \to K_2$ mellem simpliciale komplekser kaldes simplicial hvis den sender knudepunkter i knudepunkter.

Vi kan udfra et simplicialt kompleks bygge et topologisk rum. Lad K være et simpicialt kompleks. Ved realiseringen $|K|$ af K forstås mængden af afbildninger α fra K's knudepunkter ind i I sådan at:

1): $\{v \in K \mid \alpha(v) \neq 0\}$ er et simplex i K.

2): $\sum_{v \in K} \alpha(v) = 1$ for alle α.

Givet et simplex $S \in K$ definerer vi det afsluttede simplex $|S| \in |K|$ ved $|S| = \{\alpha \in |K| \mid \alpha(v) \neq 0 \Rightarrow v \in S\}$.

Til hvert knudepunkt $v \in K$ definerer vi en afbildning $\varphi_v : |K| \to I$ kaldet det v'te barycentriske koordinat ved $\varphi_v(\alpha) = \alpha(v)$. Givet et n-simplex $S = [v_1, \ldots, v_{n+1}]$ har vi en bijektiv korrespondance mellem $|S|$ og Δ^n hvor $\Delta^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \in I \text{ og } \sum x_i = 1\}$ givet ved $\alpha \mapsto (\varphi_{v_1}(\alpha), \ldots, \varphi_{v_{n+1}}(\alpha))$. Injektiviteten følger af definitionen af $|S|$, og det er klart at vi givet $x \in \Delta^n$ kan finde et α med $\alpha \in |S|$ der opfylder 1), 2) samt $\alpha \mapsto x$. Vi giver $|S|$ en topologi ved at erklærer denne bijektive afbildning for en homeomorfi. Vi udstyrer så $|K|$ med finaltopologien for alle inklusionsafbildningerne $|S| \hookrightarrow |K|$ hvor S er et simplex i K. Et topologisk rum X der er homeomorft med et rum $|K|$ hvor K er et simplicialt kompleks, kaldes et polyeder.

Til hvert knudepunkt v i K vil vi knytte afbildningen $v \in |K|$ givet ved

$$v(v') = \begin{cases} 0 & \text{for } v \neq v' \\ 1 & \text{for } v = v' \end{cases}$$

Vi kan så skrive et vilkårligt $\alpha \in |K|$ på følgende måde $\alpha = \sum_i \varphi_{v_i}(\alpha) v_i$.

Givet et simplex S i K kaldes $< S >= \{\alpha \in |K| \mid \alpha(v) \neq 0 \iff v \in S\}$ for det åbne simplex. Det åbne simplex $< S >$ er åbent i $|S|$, men ikke nødvendigvis i $|K|$. Vi har følgende vigtige egenskab for polyeder $|K|$: Givet et $\alpha \in |K|$ findes et entydigt simplex $S \in K$ så $\alpha \in < S >$. Hvis $\alpha \in < S >$, da kaldes S for bæreren af α.

Til hvert knudepunkt $v \in K$ definerer vi stjernen af v til at være mængden $\mathrm{St}(v) = \{\alpha \in |K| \mid \alpha(v) \neq 0\}$.

Definition 6.2 *Lad X være et topologisk rum, og lad K være et simplicialt kompleks. To afbildninger $f, g : X \to |K|$ siges at være tilstødende hvis vi for alle $x \in X$ har at $f(x)$ og $g(x)$ tilhører samme simplex.*

Lemma 6.3 *Lad X være et topologisk rum, lad K være et simplicialt kompleks, og lad $f, g : X \to |K|$ være kontinuerte afbildninger. Da gælder hvis f og g er tilstødende, da er de homotope.*

Bevis:
For bevis se [5] App. 1, §1.3.

6.2 Nerven

Inden vi definerer nerven af en åben overdækning af et topologisk rum, minder vi lige om definitionen af nogle generelle topologiske begreber.

Definition 6.4 *Lad $\mathcal{A}$ og $\mathcal{B}$ være to overdækninger af et topologisk rum X. Hvis $\mathcal{B}$ har den egenskab at når $B \in \mathcal{B}$, så findes $A \in \mathcal{A}$ så $B \subseteq A$, da siges $\mathcal{B}$ at forfine $\mathcal{A}$, og vi skriver $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$.*

Definition 6.5 *En overdækning af et topologisk rum X kaldes lokalt endelig hvis ethvert punkt i X har en omegn der snitter tomt med alle pånær endelig mange elementer fra overdækningen.*

Definition 6.6 *Lad* $\mathcal{U}$ *være en åben overdækning af et topologisk rum* X*. Ved en deling af enheden af* X *associeret til* $\mathcal{U}$ *forstås kontinuerte afbildninger* $\psi_U : X \to I$ *for hvert* $U \in \mathcal{U}$ *sådan at:*

1*):* $\sum_{U \in U'} \psi_U(x) = 1$ *for alle* $x \in X$*.*

2*):* $\operatorname{supp} \psi_U \subseteq U$*.*

En åben overdækning af et topologisk rum der giver anledning til en deling af enheden, kaldes en normal overdækning.

En deling af enheden kaldes lokalt endelig hvis familien $\{\operatorname{supp} \psi_U\}_{U \in \mathcal{U}}$ *er en lokalt endelig overdækning.*

Vi får brug for følgende sætning:

Sætning 6.7 *Enhver normal overdækning* $\mathcal{U}$ *af et topologisk rum* X *giver anledning til en lokalt endelig deling af enheden af* X *associeret til* $\mathcal{U}$*.*

Bevis:
For bevis se [5] App.1 §3.1 sætning 3.

■

Vi vil i det følgende definere nerven af en åben overdækning, og se på hvordan nerverne af forskellige overdækninger relaterer til hinanden. Lad X være et topologisk rum, og lad $\mathcal{U}$ være en åben overdækning af X. Vi associerer til $\mathcal{U}$ et simplicialt kompleks $N(\mathcal{U})$ på følgende måde: Elementerne $U \in \mathcal{U}$ er knudepunkterne i $N(\mathcal{U})$. En endelig samling af elementer $U_0, \dots, U_n$ fra $\mathcal{U}$ udspænder et simplex netop hvis $U_0 \cap \dots \cap U_n \neq \emptyset$. Vi kalder $|N(\mathcal{U})|$ for nerven af $\mathcal{U}$.

Lad nu $\mathcal{V}$ og $\mathcal{U}$ være to åbne overdækninger af X med $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$. Da kan vi definere simpliciale afbildninger $p_{\mathcal{U}\mathcal{V}} : N(\mathcal{V}) \to N(\mathcal{U})$ ved at $V \in \mathcal{V}$ sendes over i et $U \in \mathcal{U}$ hvor $V \subseteq U$. Disse afbildninger inducerer kontinuerte afbildninger $|N(\mathcal{V})| \to |N(\mathcal{U})|$ - disse afbildninger benævner vi også med $p_{\mathcal{U}\mathcal{V}}$. Vi kalder disse afbildninger for projektioner. Da der normalt vil være mange muligheder for at vælge et U med disse egenskaber, vil der også være mange afbildninger, men vi skal lige straks se at $p_{\mathcal{U}\mathcal{V}}$ er entydig op til homotopi.

Sætning 6.8 *Lad* X *være et topologisk rum, og lad* $\mathcal{U}$ *og* $\mathcal{V}$ *være åbne overdækninger af* X *med* $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$*. Lad* $p, p' : |N(\mathcal{V})| \to |N(\mathcal{U})|$ *være projektioner. Da er* p *og* p' *tilstødende og dermed homotope.*

Bevis:
Lad $x \in |N(\mathcal{V})|$ da $|N(\mathcal{V})|$ er et simplicialt kompleks, kan vi finde et simplex $[V_0, \ldots, V_n] \in N(\mathcal{V})$ med $x \in < [V_0, \ldots, V_n] >$. Sæt $p(V_i) = U_i$ og $p'(V_i) = U_i'$ for $i = 0, \ldots, n$. Da $[V_0, \ldots, V_n]$ er et simplex i $N(\mathcal{V})$, er $V_0 \cap \ldots \cap V_n \neq \emptyset$. Heraf følger at $(U_0 \cap \ldots \cap U_n) \cap (U_0' \cap \ldots \cap U_n') \supseteq V_0 \cap \ldots \cap V_n \neq \emptyset$, så $U_0, \ldots, U_n, U_0', \ldots, U_n'$ udspænder et simplex i $N(\mathcal{U})$. Vi har at:

$$p(x) \in [U_0, \ldots, U_n] \subseteq [U_0, \ldots, U_n, U_0', \ldots, U_n']$$

og

$$p'(x) \in [U_0', \ldots, U_n'] \subseteq [U_0, \ldots, U_n, U_0', \ldots, U_n']$$

hvilket viser at p og p' er tilstødende. Lemma 6.3 giver så at p og p' er homotope.

■

Vi bemærker at hvis $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ og $\mathcal{V} \leq \mathcal{W}$ og hvis $p_{\mathcal{U}\mathcal{V}} : |N(\mathcal{V})| \to |N(\mathcal{U})|$, og $p_{\mathcal{V}\mathcal{W}} : |N(\mathcal{W})| \to |N(\mathcal{V})|$ er projektioner, da er også $p_{\mathcal{U}\mathcal{V}} p_{\mathcal{V}\mathcal{W}} : |N(\mathcal{W})| \to |N(\mathcal{U})|$ en projektion.

En kontinuert afbildning $p_{\mathcal{U}} : X \to |N(\mathcal{U})|$ kaldes en kanonisk afbildning hvis der for alle $U \in \mathcal{U}$ gælder $p^{-1}(\mathrm{St}(U)) \subseteq U$. Vi har følgende lemma om eksistensen af kanoniske afbildninger.

Lemma 6.9 *Lad X være et topologisk rum, lad $\mathcal{U} = \{U_i\}$ være en normal overdækning af X, og lad $\{\psi_{U_i}\}$ være en lokalt endelig deling af enheden af X associeret til $\mathcal{U}$. Da findes der en kanonisk afbildning $p_{\mathcal{U}} : X \to |N(\mathcal{U})|$.*

Bevis:
Definer $p_{\mathcal{U}} : X \to |N(\mathcal{U})|$ ved fastsættelsen $p_{\mathcal{U}}(x) = \sum_i \psi_{U_i}(x) U_i$. Bemærk at ved denne fastsættelse er $p_{\mathcal{U}}(x)(U_i) = \psi_{U_i}(x)$ for alle $U_i \in \mathcal{U}$. Til hvert $x \in X$ vælger vi nu en omegn der snitter tomt med alle pånær endelig mange af $\mathrm{supp}\, \psi_{U_i}$'erne. Hvert x har så en omegn der afbildes ind i et endeligt delkompleks af $|N(\mathcal{U})|$. Dette delkompleks kan indlejres i et endeligt dimensionalt reelt vektorrum ved en homeomorfi der respekterer summen. Heraf følger at $p_{\mathcal{U}}$ er kontinuert på alle omegnene og dermed at $p_{\mathcal{U}}$ er kontinuert på hele X. Lad nu $x \in p_{\mathcal{U}}^{-1}(\mathrm{St}(U_i)) = p_{\mathcal{U}}^{-1}(\{\alpha \in |N(\mathcal{U})| \mid \alpha(U_i) \neq 0\})$, dvs. $\psi_{U_i}(x) = p_{\mathcal{U}}(x)(U_i) \neq 0$, dvs $x \in \mathrm{supp}\, \psi_{U_i} \subseteq U$ som ønsket.

■

Sætning 6.10 *Lad $p_{\mathcal{U}\mathcal{V}} : |N(\mathcal{V})| \to |N(\mathcal{U})|$ være en projektion, og lad $p_{\mathcal{V}} : X \to |N(\mathcal{V})|$ være en kanonisk afbildning. Da er $p_{\mathcal{U}\mathcal{V}} p_{\mathcal{V}} : X \to |N(\mathcal{U})|$ en kanonisk afbildning.*

Bevis:
Lad $y \in |N(\mathcal{V})|$, og $p_{\mathcal{U}\mathcal{V}}(y) \in \mathrm{St}(U)$. Vi finder et simplex $[V_0, \ldots, V_n]$ med $y \in < [V_0, \ldots, V_n] >$. Da vil $p_{\mathcal{U}\mathcal{V}}(y)$ ligge i det indre af et simplex udspændt af en delmængde af $\{p_{\mathcal{U}\mathcal{V}}(V_0), \ldots, p_{\mathcal{U}\mathcal{V}}(V_n)\}$. Da $p_{\mathcal{U}\mathcal{V}}(y) \in \mathrm{St}(U)$, må der findes $i \in \{0, \ldots, n\}$ så $p_{\mathcal{U}\mathcal{V}}(V_i) = U$. Vi får derfor:

$$p_{\mathcal{U}\mathcal{V}}^{-1}(\mathrm{St}(U)) \subseteq \bigcup_{V \in \mathcal{V}, p_{\mathcal{U}\mathcal{V}}(V) = U} \mathrm{St}(V)$$

For alle sådanne V har vi at $V \subseteq U$, og da $p_{\mathcal{V}}$ er en kanonisk afbildning, får vi:

$$p_{\mathcal{V}}^{-1}(\mathrm{St}(V)) \subseteq V \subseteq U$$

Vi får:

$$\begin{aligned}
(p_{\mathcal{U}\mathcal{V}} p_{\mathcal{V}})^{-1}(\mathrm{St}(U)) &= p_{\mathcal{V}}^{-1} p_{\mathcal{U}\mathcal{V}}^{-1}(\mathrm{St}(U)) \\
&\subseteq p_{\mathcal{V}}^{-1} \bigcup_{V \in \mathcal{V}, p_{\mathcal{U}\mathcal{V}}(V) = U} (\mathrm{St}(V)) \\
&= \bigcup_{V \in \mathcal{V} p_{\mathcal{U}\mathcal{V}}(V) = U} p_{\mathcal{V}}^{-1}(\mathrm{St}(V)) \\
&\subseteq U
\end{aligned}$$

som ønsket.

■

Sætning 6.11 *Lad $\mathcal{U}$ være en åben overdækning af X. Hvis $p, p' : X \to |N(\mathcal{U})|$ er to kanoniske afbildninger, da er de tilstødende og dermed homotope.*

Bevis:
Lad $x \in X$. Find simplexer $[U_0, \ldots, U_n]$ og $[U'_0, \ldots, U'_m]$ med $p(x) \in < [U_0, \ldots, U_n] >$ og $p'(x) \in < [U'_0, \ldots, U'_m] >$. Da vil:

$$p(x) \in \mathrm{St}(U_0) \cap \ldots \cap \mathrm{St}(U_n)$$

og

$$p'(x) \in \mathrm{St}(U'_0) \cap \ldots \cap \mathrm{St}(U'_m)$$

(se [12] side 114). Men dette giver os jo at:

$$\begin{aligned}
x \in p^{-1}(\mathrm{St}(U_0)) \cap \ldots \cap p^{-1}(\mathrm{St}(U_n)) \cap p'^{-1}(\mathrm{St}(U'_0)) \cap \ldots \cap p'^{-1}(\mathrm{St}(U'_m)) \\
\subseteq U_0 \cap \ldots U_n \cap U'_0 \cap \ldots \cap U'_m
\end{aligned}$$

D.v.s. at $U_0, \dots, U_n, U'_0, \dots, U'_m$ udspænder et simplex. Vi får:

$$p(x) \in [U_0, \dots, U_n] \subseteq [U_0, \dots, U_n, U'_0, \dots U'_m]$$

og

$$p'(x) \in [U'_0, \dots, U'_m] \subseteq [U_0, \dots, U_n, U'_0, \dots U'_m]$$

som ønsket.

■

Sætning 6.12 *Lad $\mathcal{U}'$ og $\mathcal{U}''$ være to normale overdækninger af et topologisk rum X. Da findes en normal overdækning $\mathcal{U}$ af X der forfiner både $\mathcal{U}'$ og $\mathcal{U}''$.*

Bevis:
For bevis se [5] App. 1, §3.1.

■

Dette viser at mængden af normale overdækninger af et topologisk rum er opad filtrende under præordningen forfining. Vi kan derfor til ethvert topologisk rum X knytte et inverst system over HPol, nemlig $\check{C}(X) = (|N(\mathcal{U})|, [p_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}], \Lambda)$, hvor Λ er mængden af normale overdækninger af X og $[-]$ indikerer homotopiklasse. Vi minder om at HPol er kategorien med polyeder som objekter og homotopiklasser af afbildninger som morfier. Betragter vi nu den entydige homotopiklasse af kanoniske afbildninger $[p_{\mathcal{U}}] : X \to |N(\mathcal{U})|$, får vi af sætning 6.8 at $\boldsymbol{p} = ([p_{\mathcal{U}}]) : X \to C(X)$ er en morfi i $\mathrm{inv} - \mathrm{HTop}$. Dermed bestemmer $\boldsymbol{p}$ også en morfi i $\mathrm{pro} - \mathrm{HTop}$. Vi har følgende resultat:

Sætning 6.13 *Lad X være et topologisk rum, og lad $\boldsymbol{p} : X \to \check{C}(X)$ være morfien i* $\mathrm{pro} - \mathrm{HTop}$ *givet ved de kanoniske afbildninger. Da er $\boldsymbol{p}$ en HPol-udvidelse.*

Bevis:
For bevis se [5] App. 1, §3.2.

■

Beviset er en verificering af at betingelserne i sætning 3.8 er opfyldt i dette tilfælde.

På grund af ovenstående sætning vil vi kalde $\check{C}(X)$ for čech-udvidelsen af X.

Ovenstående resultater gælder uændrede for topologiske rum med basispunkt. Man betragter så kun projektioner og kanoniske afbildninger der sender basispunkt i basispunkt. Man konstruerer nerven med basispunkt af en overdækning af et rum med basispunkt ved at vælge en af de åbne mængder i overdækningen der indeholder basispunktet til at være basispunkt for nerven.

Lad nu (X, x_0) være et rum med basispunktet x_0, og lad $\check{C}((X, x_0)) = (|(N(\mathcal{U})|, *), [p_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}], \Lambda)$ være čech udvidelsen af (X, x_0). Vi kan så anvende fundamentalgruppefunktoren på $|(N(\mathcal{U})|, *)$ og $p_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$. Vi får så et system $(\pi_1(|(N(\mathcal{U})|, *)), p_{\mathcal{U}\mathcal{U}'*}, \Lambda)$. Dette ses umiddelbart at være et inverst system over kategorien Grp så korollar 3.12 giver at det har en invers grænse. Vi kalder grænsen:

$$\check{\pi}_1(X) = \lim_{\leftarrow}(\pi_1(|(N(\mathcal{U})|, *)), p_{\mathcal{U}\mathcal{U}'*}, \Lambda)$$

for čechgruppen af X.

6.3 Fundamentalgruppen af plane mængder

Vi vil nu konstruere en homomorfi $\varphi : \pi_1(X, x_0) \to \check{\pi}_1(X, x_0)$. De kanoniske afbildninger $p_{\mathcal{U}} : (X, x_0) \to (|N(\mathcal{U})|, *)$ inducerer homomorfier $p_{\mathcal{U}*} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(|N(\mathcal{U})|, *)$. De inducerede homomorfier opfylder $p_{\mathcal{U}*} = p_{\mathcal{U}\mathcal{V}*}p_{\mathcal{V}*}$ når $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$. Givet $\alpha : (S^1, (1, 0)) \to (X, x_0)$ sætter vi $\alpha_{\mathcal{U}} = p_{\mathcal{U}} \circ \alpha$. Vi kan så definere $\varphi : \pi_1(X, x_0) \to \check{\pi}_1(X, x_0)$ ved:

$$\varphi([\alpha]) = ([\alpha_{\mathcal{U}}])_{\mathcal{U}\in\Lambda}$$

Da $p_{\mathcal{U}*} = p_{\mathcal{U}\mathcal{V}*}p_{\mathcal{V}*}$ når $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$, vil $([\alpha_{\mathcal{U}}])_{\mathcal{U}\in\Lambda} \in \check{\pi}_1(X, x_0)$. φ er klart veldefineret. Vi skal altså blot kontrollere at φ er en homomorfi, det følger af følgende udregning:

$$\begin{aligned}
\varphi([\alpha][\beta]) &= \varphi([\alpha\beta]) \\
&= ([(\alpha\beta)_{\mathcal{U}}])_{\mathcal{U}\in\Lambda} \\
&= ([p_{\mathcal{U}}(\alpha\beta)])_{\mathcal{U}\in\Lambda} \\
&= ([(p_{\mathcal{U}} \circ \alpha)(p_{\mathcal{U}} \circ \beta)])_{\mathcal{U}\in\Lambda} \\
&= ([p_{\mathcal{U}} \circ \alpha][p_{\mathcal{U}} \circ \beta])_{\mathcal{U}\in\Lambda} \\
&= ([\alpha_{\mathcal{U}}][\beta_{\mathcal{U}}])_{\mathcal{U}\in\Lambda} \\
&= ([\alpha_{\mathcal{U}}])_{\mathcal{U}\in\Lambda}([\beta_{\mathcal{U}}])_{\mathcal{U}\in\Lambda}
\end{aligned}$$

Vi kalder φ for den naturlige homomorfi.

Sætning 6.14 HOVEDSÆTNING *Lad* $X \subseteq \mathbb{R}^2$ *med* $x_0 \in X$. *Da er den naturlige homomorfi* $\varphi : \pi_1(X, x_0) \to \check{\pi}_1(X, x_0)$ *injektiv.*

Bevis:
Lad $\alpha : I \to X$ være kontinuert med $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ så $[\alpha] \neq 1 \in \pi_1(X, x_0)$, og antag $\varphi([\alpha]) = 1$. Sæt:

$$Y = \alpha(I) \cup \bigcup \{U \mid U \text{ er en begrænset stikomponent af } \mathbb{R}^2 - \alpha(I) \text{ med } U \subseteq X\}$$

Ifølge lemma 5.4 er Y et peanokontinuum. Da $x_0 \in Y \subseteq X$, vil $[\alpha] \neq 1 \in \pi_1(Y, x_0)$. Lad nu L_0 være et afsluttet kvadrat der indeholder Y. Vælg en muligvis endelig følge af mængder (L_n) sådan at:

1): L_{i+1} konstrueres udfra L_i ved at fjerne et åbent kvadrat K_i fra L_i, og disse åbne kvadraters diametre danner en nulfølge.

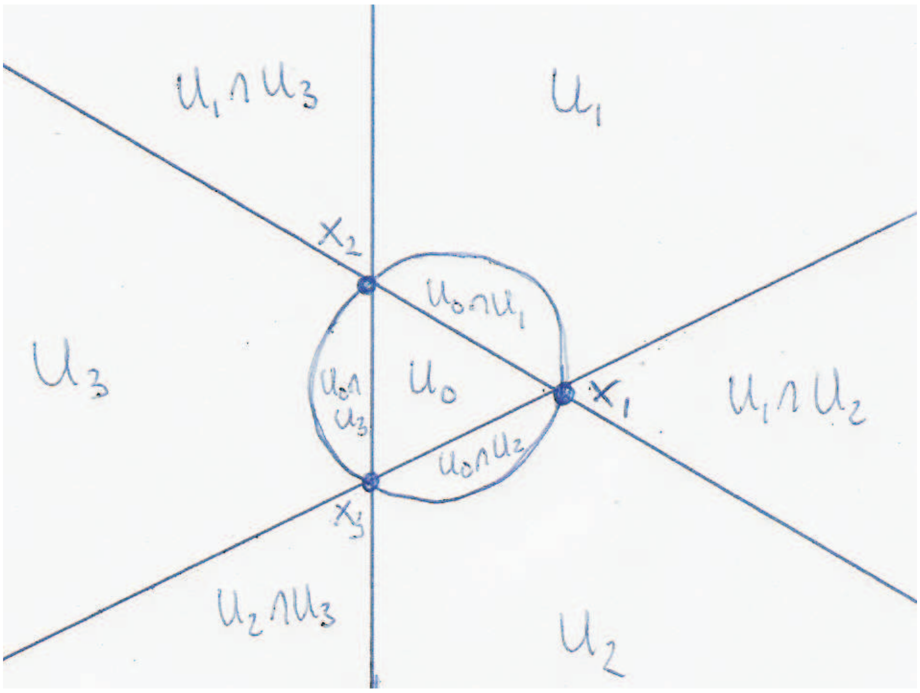
2): $Y \subseteq L_i$ for alle i, og inklusionen $i : (Y, x_0) \to (L, x_0)$ hvor $L = \bigcap_i L_i$, er en "pointed"homotopiækvivalens.

3): L er homeomorft med et delvist udfyldt sierpinskitæppe.

Dette er bare en anvendelse af sætning 5.13 samt bemærkning 5.14. Vi kan ydermere for hver begrænset stikomponent af $\mathbb{R}^2 - Y$ vælge et $z_i \in K_i$, sådan at $z_i \notin X$. Konstruktionen af Y giver umiddelbart at vi kan gøre dette. Da inklusionen $i : (Y, x_0) \to (L, x_0)$ er en homotopi ækvivalens, har vi at $[\alpha] \neq 1 \in \pi_1(L, x_0)$. Sætning 5.15 giver så at der findes et $n \in \mathbb{Z}_+$ så $[\alpha] \neq 1 \in \pi_1(L_n, x_0)$. Men L_n er homotopi ækvivalent med $\mathbb{R}^2 - \{z_1, \ldots, z_n\} \cap I(\alpha)$, så $[\alpha] \neq 1 \in \pi_1(\mathbb{R}^2 - \{z_1, \ldots, z_n\} \cap I(\alpha), x_0)$. Lemma 5.12 giver så at $[\alpha] \neq 1 \in \pi_1(\mathbb{R}^2 - \{z_1, \ldots, z_n\}, x_0)$. Vi vælger nu en endelig åben overdækning $\mathcal{V}$ af $\mathbb{R}^2 - \{z_1, \ldots, z_n\}$, således at $p_{\mathcal{V}*} : \pi_1(\mathbb{R}^2 - \{z_1, \ldots, z_n\}, x_0) \to \pi_1(|N(\mathcal{V})|, *)$ er en isomorfi. I figur 4 har jeg skitseret hvordan dette kan gøres i tilfældet $n = 3$, for en mere generel metode se [12] side 152 opgave G5.

Betragt nu den åbne overdækning $\mathcal{U}$ af X hvor $\mathcal{U} = \{V \cap X \mid V \in \mathcal{V}\}$. Vi kan da betragte $|N(\mathcal{U})|$ som et delkompleks af $|N(\mathcal{V})|$. Dette gøres ved at indlejre $|N(\mathcal{U})|$ i $|N(\mathcal{V})|$ efter opskriften $V \cap X \mapsto V$ når $V \cap X \neq \emptyset$. Det kan godt ske at $V \cap X = V' \cap X$ selvom $V \neq V'$, så ovenstående opskrift giver os derfor ikke nogen entydig afbildning, vi er nødt til at træffe nogle valg.

Vi skal nu se at to indlejringer konstrueret udfra ovenstående opskrift er homotope. Lad $i : |N(\mathcal{U})| \to |N(\mathcal{V})|$ og $i' : |N(\mathcal{U})| \to |N(\mathcal{V})|$ være sådanne indlejringer, og lad $x \in |N(\mathcal{U})|$. Der findes nu entydige simplexer $[V_1, \ldots, V_n]$ og $[W_1, \ldots, W_m]$ sådan at $i(x) \in < [V_1, \ldots, V_n] >$ og $i'(x) \in < [W_1, \ldots, W_m] >$. På den anden side findes også et entydig simplex $[V_1' \cap X, \ldots, V_l' \cap X]$ så $x \in < [V_1' \cap X, \ldots, V_l' \cap X] >$. Da i og i' er indlejringer, får vi $i(x) \in < [i(V_1' \cap X), \ldots, i(V_l' \cap X)] >$ og $i'(x) \in <$



Figur 4: Åben overdækning af $\mathbb{R}^2 - \{z_1, z_2, z_3\}$

$[i'(V_1' \cap X), \ldots, i'(V_l' \cap X)] >$. Af entydigheden følger at $[i(V_1' \cap X), \ldots, i(V_l' \cap X)] = [V_1, \ldots, V_n]$ og $[i'(V_1' \cap X), \ldots, i'(V_l' \cap X)] = [W_1, \ldots, W_m]$. Heraf følger at $V_1 \cap \ldots \cap V_n \cap X = V_1' \cap X \cap \ldots \cap V_l' \cap X = W_1 \cap \ldots \cap W_m \cap X$. Specielt er $V_1 \cap \ldots \cap V_n \cap W_1 \cap \ldots \cap W_m \neq \emptyset$. Dette viser at i og i' er tilstødende og dermed homotope.

Betragt nu $p_{\mathcal{V}}|_X : X \to |N(\mathcal{V})|$ og $p_{\mathcal{U}} : X \to |N(\mathcal{U})| \subseteq |N(\mathcal{V})|$. Vi påstår at de er homotope som afbildninger ind i $|N(\mathcal{V})|$. For at indse dette lader vi $x \in X$. Der findes da et entydig simplex $[V_1 \cap X, \ldots, V_n \cap X]$ så $p_{\mathcal{U}}(x) \in< [V_1 \cap X, \ldots, V_n \cap X] >$. Vælg indlejring $i : |N(\mathcal{U})| \to |N(\mathcal{V})|$ sådan at $V_i \cap X \mapsto V_i$. Vi får dermed at $i \circ p_{\mathcal{U}}(x) \in< [V_1, \ldots, V_n] >$. Heraf følger at:

$$\begin{aligned} i(\mathrm{St}(V_1 \cap X) \cap \ldots \cap \mathrm{St}(V_n \cap X)) &= \\ i(< [V_1 \cap X, \ldots, V_n \cap X] >) &= \\ < [V_1, \ldots, V_n] > &= \\ \mathrm{St}(V_1) \cap \ldots \cap \mathrm{St}(V_n) & \end{aligned}$$

Resten af beviset kører så på samme måde som sætning 6.11 hvilket viser at $p_{\mathcal{V}}|_X$ og $p_{\mathcal{U}}$ er tilstødende for dette valg af indlejring. Da alle de mulige indlejringer er homotope, følger det ønskede.

Da $\varphi([\alpha]) = 1$ har vi specielt at $p_{\mathcal{U}*}([\alpha]) = [\alpha_{\mathcal{U}}] = 1 \in \pi_1(|N(\mathcal{U})|)$. Dette medfører at $p_{\mathcal{V}*}([\alpha]) = 1 \in \pi_1(|N(\mathcal{V})|)$ i modstrid med at:

$$p_{\mathcal{V}*} : \pi_1(\mathbb{R}^2 - \{z_1, \ldots, z_n\}, x_0) \to \pi_1(|N(\mathcal{V})|, *)$$

er en isomorfi.

$\blacksquare$

7 Konsekvenser af hovedsætningen

Definition 7.1 *En gruppe G kaldes hopfiansk hvis enhver surjektiv homomorfi $\varphi : G \to G$ er en isomorfi.*

Sætning 7.2 *Enhver endelig frembragt fri gruppe F er hopfiansk.*

Bevis:
Lad F være en endelig frembragt fri gruppe med basis X, og lad $\varphi : F \to F$ være en surjektiv homomorfi. Det er klart at $card\varphi(X) \leq cardX$. På den anden side var φ surjektiv, så $\varphi(X)$ frembringer F. Da F er endelig frembragt fri, må $card\varphi(X) \geq cardX$. Vi har altså at $|\varphi(X)| = |X|$. Dermed er $\varphi|_X X \to \varphi(X)$ en bijektion. Heraf følger at φ er en isomorfi som ønsket.

■

Definition 7.3 *En gruppe G kaldes lokalt fri hvis enhver endelig frembragt undergruppe er fri.*

En gruppe G kaldes residualt endelig hvis der til ethvert $g \in G - \{1\}$ eksisterer en homomorfi $\varphi : G \to H$ hvor H er en endelig gruppe således at $\varphi(g) \neq 1$.

En gruppe kaldes fuldt residualt fri hvis der til enhver endelig delmængde $\{g_1, \ldots, g_n\} \subseteq G - \{1\}$ eksisterer en homomorfi $\varphi : G \to F$ hvor F er en fri gruppe således at $\varphi(g_i) \neq 1$ for alle $i \in \{g_1, \ldots, g_n\}$.

Sætning 7.4 *Enhver fri fruppe F er residualt endelig.*

Bevis:
Lad $\omega = x_1 x_2 \ldots x_n$ være et ord i F sådan at hver af x_i'erne er en frembringer for F eller invers af en frembringer. Ydermere skal gælde at x_i og x_{i+1} ikke er en frembringer og dennes inverse. Vi konstruerer en homomorfi $\varphi : F \to S_{n+1}$. Hvis en frembringer ikke optræder i ω, sender vi den over i identitetspermutationen. Vi sender x_i over i en permutaion der sender i over i $i+1$. Da x_i og x_{i+1} aldrig er hinandens inverse, kan vi altid vælge permutationer sådan at dette definerer en veldefineret afbildning. Da F er fri, definerer dette en homomorfi $\varphi : F \to S_{n+1}$. Vi har at $\varphi(\omega) \neq 1$ da $\varphi(\omega)(1) = n + 1$.

■

Sætning 7.5 *Lad F være en invers grænse af et inverst system $(F_\alpha, \varphi_{\alpha\beta}, A)$ af frie grupper F_α. Da er F, og dermed enhver undergruppe af F, lokalt fri.*

Bevis:
Lad $H < F$ være en endelig frembragt undergruppe. Da F er en invers grænse af et inverst system $(F_\alpha, \varphi_{\alpha\beta}, A)$ af endelig frembragte fri grupper F_α, findes til hvert $\alpha \in A$ en homomorfi $\varphi_\alpha : F \to F_\alpha$. Disse homomorfier har egenskaben $\varphi_{\alpha\beta} \circ \varphi_\beta = \varphi_\alpha$ når $\alpha \leq \beta$. Vi definerer $H_\alpha = \varphi_\alpha(H)$. Da $H_\alpha < F_\alpha$, er H_α fri. Vi har også at $\operatorname{rank} H_\alpha \leq \mu_{\mathbb{Z}}(H)$ hvor $\mu_{\mathbb{Z}}(H)$ er det mindste antal frembringere for H. Dermed må der findes et $n \in \mathbb{Z}_+$ så $\max_\alpha \operatorname{rank} H_\alpha = n$. Sæt $H' = \lim H_\alpha$. Da diagrammet:

$$\begin{tikzcd} H_\beta \arrow[r, "\varphi_{\alpha\beta}"] & H_\alpha \\ H \arrow[u, "\varphi_\beta"] \arrow[ur, "\varphi_\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

er kommutativt når $\alpha \leq \beta$, og φ_α og φ_β er surjektive, har vi at $\varphi_{\alpha\beta} : H_\beta \to H_\alpha$ er surjektiv når $\alpha \leq \beta$. Heraf følger at $\operatorname{rank} H_\alpha \leq \operatorname{rank} H_\beta$, dette følger af sætning 2.12 i [9]. Da A er opad filtrerende, findes et $\gamma \in A$ så $\operatorname{rank} H_\alpha = n$, for alle $\alpha \geq \gamma$. Betragt nu α og β med $\gamma \leq \alpha \leq \beta$. Homomorfien $\varphi_{\alpha\beta} : H_\beta \to H_\alpha$ er surjektiv, og da endelig frembragte fri grupper er hopfianske, er $\varphi_{\alpha\beta}$ endda en isomorfi. Af dette, og da de $\alpha \in A$ hvorom det gælder at $\gamma \leq \alpha$ udgør et kofinalt system, følger det af sætning 3.5 at vi kan nøjes med at betragte dette delsystem når vi skal beregne H'. Da alle morfierne $\varphi_{\alpha\beta}$ i dette system er isomorfier, følger det at $H' \cong H_\gamma$. Heraf følger at H' er fri. Betragt nu det kommutative diagram:

$$\begin{tikzcd} (H) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\boldsymbol{\varphi}"'] & (F) \arrow[d, "\boldsymbol{\varphi}"] \\ (H_\alpha, \varphi_{\alpha\beta}, A) \arrow[r, "\boldsymbol{i}"'] & (F_\alpha, \varphi_{\alpha\beta}, A) \end{tikzcd}$$

i pro-Grp. Her er i indlejringen af H i F, og $\boldsymbol{i}$ er morfien induceret af inklusionsafbildningerne $i_\alpha : H_\alpha \hookrightarrow F_\alpha$. Anvender vi funktoren lim på dette, får vi et kommutativt diagram:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\lim \boldsymbol{\varphi}"'] & F \arrow[d, "\varphi"] \\ H' \arrow[r, "i"'] & F \end{tikzcd}$$

Her er begge i'er indlejringer. Da φ er injektiv, følger det at $\lim \boldsymbol{\varphi}$ er injektiv. Heraf følger at H er fri som ønsket.

■

Det inverse system med nerverne som objekter er et eksempel på en HPol$_*$-udvidelse af et topologisk rum X. Dette vil ofte blot være en ud af mange mulige

HPol$_*$-udvidelser. Vi skal nu se en lille smule nærmere på relationen mellem forskellige HPol$_*$-udvidelser af et givet topologisk rum X.

Vi bemærker at $\pi_1 : \text{pro} - \text{HTop}_* \to \text{pro} - \text{Grp}$ er en funktor ved fastsættelserne $\pi_1(((X_\lambda, *), p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)) = ((\pi_1(X_\lambda, *)), p_{\lambda\lambda'*}, \Lambda)$, og $\pi_1((f_\mu, \varphi)) = (\pi_1(f_\mu), \varphi)$. Det ses let at π_1 respekterer sammensætning, identitet samt ækvivalensrelationen $\sim$ mellem morfier af inverse systemer.

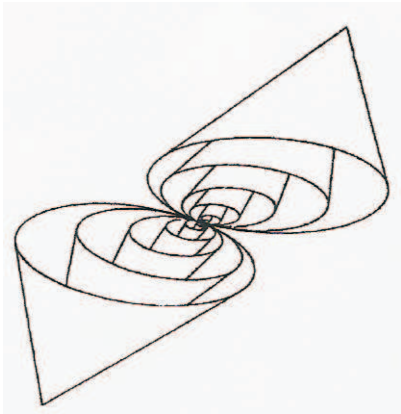
Hvis $\boldsymbol{X}$ og $\boldsymbol{X'}$ er to HPol$_*$-udvidelser af et topologisk rum X, da har vi fra lemma 3.7 at der findes en isomorfi $i : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X'}$. Dermed er også $\pi_1(i) : \pi_1(\boldsymbol{X}) \to \pi_1(\boldsymbol{X'})$ en isomorfi. Nu var lim en funktor fra pro $-\mathcal{C}$ ind i $\mathcal{C}$, så $\lim \pi_1(\boldsymbol{X}) \cong \lim \pi_1(\boldsymbol{X'})$.

For generelle HPol$_*$-udvidelser $\boldsymbol{X}$ af et toplogisk rum X kaldes $\lim \pi_1(\boldsymbol{X})$, af grunde vi ikke kan komme ind på her, for formgruppen for X. Formgruppen for X benævnes, ligesom čechgruppen for X med $\check{\pi}_1(X)$. Ovenstående betragtninger viser da også at formgruppen og čechgruppen er ens op til isomorfi. Da man sædvanligvis kan vælge mange forskellige HPol$_*$-udvidelser af et givet topologisk rum, skal man kontrollerer at forskellige udvidelser giver samme formgruppe op til isomorfi. Ovenstående betragtninger siger præcis dette.

Det at man selv kan bestemme hvilken HPol$_*$-udvidelse man vil arbejde med når man skal bestemme formgruppen, er yderst belejligt. Sammen med resultater som for eksempel sætning 3.5 kan dette ofte simplicificere ens problemer betragteligt. Vi vil straks benytte ovenstående til at vise en sætning.

Sætning 7.6 *Lad $X \subseteq \mathbb{R}^2$ være kompakt, da er $\pi_1(X)$ lokalt fri, residualt endelig og fuldstændig residualt fri.*

Bevis:
Lad $X \subseteq \mathbb{R}^2$ være kompakt. Vi konstruerer en følge (X_n) af kompakte, stykkevis lineære, mangfoldigheder i $\mathbb{R}^2$ sådan at $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$. Vi gør som følger: I det n'te skridt dækker vi $\mathbb{R}^2$ med kvadrater på formen $[k/n, k + 1/n] \times [l/n, l + 1/n]$ hvor $k, l \in \mathbb{Z}$. Vi sætter så X_n til at være foreningen af de kvadrater der rører X. Det er så klart at X_n er en kompakt, stykkevis lineær mangfoldighed. Det er også klart at $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$. Vi ordner X_n'erne ved omvendt inklusion. Vi har så en invers følge $\boldsymbol{X} = (X_n, p_{nn+1}, \mathbb{Z}_+)$ hvor $p_{nn+1} : X_{n+1} \to X_n$ bare er inklusionsafbildningen. Vi kan også definerer en morfi $\boldsymbol{p} : x \to \boldsymbol{X}$ i $\text{pro} - \text{HTop}$ ved $\boldsymbol{p} = (p_n)$ hvor $p_n : X \to X_n$ er inklusionsafbildningen. Denne morfi gør $\boldsymbol{X}$ til en HPol$_*$-udvidelse af X, vi vil ikke vise dette - se [7] side 3. Vi har nu at $\check{\pi}_1(X, *) = \lim \boldsymbol{X}$. Vi bemærker at $\pi_1(X_n)$ er fri for alle $n \in \mathbb{Z}_+$, da X_n'erne er komapkte mangfoldigheder med endeligt mange, og mindst en, randkomponenter. Af sætning 6.14 følger at $\pi_1(X, *)$ ved den naturlige homomorfi φ indlejre i $\check{\pi}_1(X, *)$. Sætning 7.5 giver så at $\pi_1(X, *)$ er lokalt fri.



Figur 5: $CE_1 \vee CE_2$

For at vise at $\pi_1(X,*)$ er fuldt residualt fri, betragter vi følgende sekvens af homomorfier:

$$\pi_1(X,*) \xrightarrow{\varphi} \check{\pi}_1(X,*) \xrightarrow{i} \Pi\pi_1(X_i) \xrightarrow{\pi_n} \pi_1(X_n)$$

her er i inklusions homomorfien, og π_n er projektions homomorfien ned på den n'te koordinat. Hvis nu $g_1, \ldots, g_n \in \pi_1(X,*) - \{1\}$, da findes $X_1, \ldots, X_n$ så $p_{i*}(g_i) \neq 1$ for $i = 1, \ldots, n$. Vælg et et $X_N \geq X_1, \ldots, X_n$. Det følger nu umiddelbart at $p_{X_N *}(g_i) \neq 1$ for alle $i = 1, \ldots, n$. Sammensætter vi med projektionen ned på $\pi_1(X_N)$ får vi den ønskede homomorfi.

Vi viser tilsidst at $\pi_1(X,*)$ er residualt endelig. Lad $g \in \pi_1(X,*) - \{1\}$, da $\pi_1(X,*)$ er fuldt residualt fri findes en homomorfi $\varphi : \pi_1(X,*) \to F$ hvor F er fri sådan at $\varphi(g) \neq 1$. Ifølge sætning 7.4 er frie grupper residualt endelige, så der findes en homomorfi $\psi : F \to H$ hvor H er en endelig gruppe sådan at $\psi(\varphi(g)) \neq 1$. Vi har altså at homomofien $\psi \circ \varphi : \pi_1(X,*) \to H$ har den ønskede egenskab.

■

Vi kan også bruge ovenstående principper til at indse at det ikke generelt gælder at den naturlige homomorfi φ er injektiv. Et modeksempel er følgende: Lad E_1 og E_2 være to hawaiiøreringe, og betragt keglerne CE_1 og CE_2 på E_1 og E_2. Vi betragter kilesummen $CE_1 \vee CE_2$ med basispunkt $(0,0,0)$. Kald cirklerne i E_1 for $a_1, a_2, \ldots$, og cirklerne i E_2 for $b_1, b_2, \ldots$.

Stien $\alpha : I \to CE_1 \vee CE_2$ der først gennemløber a_1, derefter b_1, så a_2, derefter b_2 o.s.v., er ikke nulhomotop i $CE_1 \vee CE_2$, se f.eks. [8] side 236-237. Lad nu $A_{n,m}$

være kilesummen af keglen over $a_1 \cup a_2 \cup \ldots \cup a_n$ og keglen over $b_1 \cup b_2 \cup \ldots \cup b_m$ for $n, m \in \mathbb{Z}_+$. Sæt $p_{(n,m)(l,k)} : A_{l,k} \to A_{n,m}$ til identiteten på $C(a_1 \cup a_2 \cup \ldots a_n) \vee C(b_1 \cup a_2 \cup \ldots b_m)$, og $p_{(n,m)(l,k)}(x) = (0, 0, 0)$ ellers når $n \leq l$ og $m \leq k$. Med disse fastsættelser er $(A_{n,m}, p_{(n,m)(l,k)}, \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+)$ et inverst system over HPol$_*$. Sæt $p_{n,m} : CE_1 \vee CE_2 \to A_{n,m}$ til identiteten på $C(a_1 \cup a_2 \cup \ldots \cup a_n) \vee C(b_1 \cup a_2 \cup \ldots \cup b_m)$, og $p_{n,m}(x) = (0, 0, 0)$ ellers. Det er klart at $p_{(n,m)(l,k)} \circ p_{l,k} = p_{n,m}$. Ydermere er hver af $p_{n,m}$'erne surjektive, og givet $x, x' \in CE_1 \vee CE_2$ med $x \neq x'$ findes et $p_{n,m}$ så $p_{n,m}(x) \neq p_{n,m}(x')$. Korollar 3 i §5.2 og korollar 6 i §5.3 i [5] giver så at det inverse system $(A_{n,m}, p_{(n,m)(l,k)}, \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+)$ er en HPol$_*$-udvidelse af $CE_1 \vee CE_2$ ($A_{n,m}$'erne er ANR'er da de er endelige CW-komplekser se [5] side 40). Men alle $A_{n,m}$'erne er kontraktible, specielt vil $\varphi([\alpha]) = 1$.

Litteratur

[1] James R. Munkres. Topology second edition. Prentice Hall Inc. 2000, 1975.

[2] Christian Pommerenke. Boundary Behaviour of Conformal Maps. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1992.

[3] John G. Hocking og Gail S. Young. Topology. Addison-Wesley Publishing Company Inc., Reading Mass., 1961.

[4] Stephen Willard. General topology. Addison-Wesley Publishing Company Inc., Reading Mass., 1970.

[5] S. Mardesic og J. Segal. Shape theory: the inverse system approach. Amsterdam, North-Holland, 1982.

[6] Andreas Zastrow. Planar sets are aspherical. Habilitationsschrift. Ruhr-Universitet, Bochum, 1997-98. (Kan findes på http://math.univ.gda.pl/ zastrow/).

[7] Hanspeter Fischer og Andreas Zastrow. The fundamental groups of subsets of closed surfaces inject into their first shape groups. 2003. (Kan findes på http://www.cs.bsu.edu/homepages/fischer/resume/publications.html).

[8] J. W. Cannon og G. R. Conner. The combinatorial structure of the Hawaiian earring group. Topology and its Applications 106 (2000) 225-271.

[9] Roger C. Lyndon og Paul E. Schupp. Combinatorial Group Theory. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1977.

[10] M. L. Curtis og M. K. Fort Jr.. Singular homology of one-dimensional spaces. Annals of Mathematics 69, 309-313, 1959.

[11] Bruce Chandler og Wilhelm Magnus. The history of combinatorial group theory: a case study in the history of ideas. Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences 9, Springer-Verlag New York Inc., 1982.

[12] Edwin H. Spanier. Algebraic Topology. McGraw-Hill Inc., 1966.

[13] Allen Hatcher. Algebraic Topology. Cambridge University Press 2002.

[14] Saharon Shelah. Can the fundamental group of a space be the rationals?. Proc. A.M.S. 103, 627-632,1988.

[15] James Dugundji. Topology. Allyn and Bacon Inc., Boston Mass., 1966.