

Matematik for biologer

Opgavesæt til besvarelse i 4 timer. De 5 opgavers omtrentlige vægtning er angivet i parentes. Formulering og argumentation i opgavebesvarelsen vil indgå som et væsentligt element i bedømmelsen. Alle sædvanlige hjælpemidler, bortset fra computere, må benyttes. Du må gerne skrive med blyant.

Opgave 1 (25%)

Vi betragter en logistisk vækstmodel

$$P_{t+1} = P_t + rP_t(1 - P_t/K)$$

med instrinsisk vækstrate $r > 0$ og bærekapacitet $K > 0$.

1. Gøre rede for at 0 og K er ligevægte (equilibria) for denne model.
2. Er 0 en stabil ligevægt?
3. Der findes et positivt tal så at ligevægten K er stabil når r er mindre end tallet og K er ustabil når r er større end tallet. Find det tal!

Opgave 2 (25%)

En skov består af to arter af træer, A og B . Hvert år bliver $1/3$ af træerne af art A erstattet af træer af art B , og $1/5$ af træerne af art B bliver erstattet af træer af art A . Alle andre træer enten overlever eller bliver erstattet af et træ af samme art.

1. Lad A_t være antallet af træer af art A i år t og B_t være antallet af træer af art B . Find ligningerne der udtrykker A_{t+1} og B_{t+1} ved hjælp af A_t og B_t .
2. Skriv dine ligninger på formen

$$\begin{pmatrix} A_{t+1} \\ B_{t+1} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} A_t \\ B_t \end{pmatrix}$$

hvor P er en passende valgt matrix.

3. Gør rede for at egenvektorerne for P er $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Hvad er egenværdierne?
4. Hvad er forholdet mellem antallet af træer af art A og antallet af træer af art B når der er gået meget lang tid? Det vil sige, hvad er grænseværdien for $\lim_{t \rightarrow \infty} A_t/B_t$?

(SLUT MED MATEMATIK)