

Besvarelse af opgave 7, lektion 11.

9. december 2002

Et aktivt stof modvirker hovedpine, og efter indtagelse nedbrydes det i patienten efter følgende differentialligning:

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{\ln 2}{12}Q, \quad (*)$$

hvor $Q(t)$ er mængden af stoffet målt i mg , til tiden t timer.

a. Hvad er stoffets halveringstid?

At $Q(t)$ opfylder (*), betyder at stofmængden til tiden t følger en eksponentiel vækst. Ifølge lektion 9, side 3 finder vi halveringstiden på følgende måde:

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln \frac{1}{2}}{-\frac{\ln 2}{12}} = \frac{-\ln 2}{-\frac{\ln 2}{12}} = \frac{-12 \ln 2}{-\ln 2} = 12.$$

Altså er halveringstiden 12 timer.

b. En hovedpinepille indeholder 6 mg af det aktive stof. En patient tager en pille kl. 6, kl. 12, kl. 18 og kl. 24. Hvor meget af stoffet har patienten i kroppen næste morgen kl. 6?

Fra den første pille er taget, er der gået et døgn, så mængden af stof der er tilbage fra den første pille er $Q(24)$ mg . Af næste pille, taget kl. 12, er der $Q(18)$ mg tilbage, da der fra kl. 12 til kl. 6 næste morgen er 18 timer. Fra pillen taget kl. 18 er der $Q(12)$ mg tilbage, og af pillen taget kl. 24, er der $Q(6)$ mg tilbage. Mængden af aktivt stof tilbage i patienten næste morgen kl. 6, er altså:

$$Q(24) + Q(18) + Q(12) + Q(6).$$

Vi finder nu $Q(t)$. Igen fra side 3, lektion 9 har vi følgende formel for $Q(t)$:

$$Q(t) = Q(0) \exp\left(-\frac{\ln 2}{12}t\right) = Q(0) \exp(\ln 2)^{\frac{-t}{12}} = Q(0)2^{\frac{-t}{12}},$$

hvor $Q(0)$ er mængden af stof til tiden $t = 0$, kl. 6 den første morgen. Da patienten indtager den første pille kl. 6, antager vi at $Q(0) = 6$. Vi har altså alt i alt

$$Q(t) = 6 \cdot 2^{\frac{-t}{12}}.$$

Heraf har vi, at der næste morgen kl.6 må være

$$Q(24) + Q(18) + Q(12) + Q(6) = 6 \cdot 2^{-\frac{24}{12}} + 6 \cdot 2^{-\frac{18}{12}} + 6 \cdot 2^{-\frac{12}{12}} + 6 \cdot 2^{-\frac{6}{12}} \approx 10,86 \text{ mg}$$

af det aktive stof i patienten.

c. Nu antages i stedet, at patienten får samme mængde stof (24 mg) intravenøst over et døgn, dvs med en konstant hastighed på 1 mg stof i timen. Hvor meget aktivt stof indeholder patienten da efter 24 timer?

I dette tilfælde, har vi så følgende differential ligning, for stofmængden i patienten:

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{\ln 2}{12}Q + 1 \Leftrightarrow \frac{dQ}{dt} + \frac{\ln 2}{12}Q = 1.$$

Dette er jo netop en 1. ordens inhomogen differentiaalligning med konstante koefficienter. Lektion 11, side 9 giver os nu følgende løsning:

$$Q(t) = \frac{1}{\frac{\ln 2}{12}} + \left(Q(0) - \frac{1}{\frac{\ln 2}{12}} \right) e^{-\frac{\ln 2}{12}t}.$$

Da patienten får stoffet intravenøst startende kl. 6, antager vi at $Q(0) = 0$, og får derfor:

$$Q(t) = \frac{12}{\ln 2} - \frac{12}{\ln 2} 2^{-\frac{t}{12}}.$$

Så efter 24 timer vil patienten indeholde

$$Q(24) = \frac{12}{\ln 2} - \frac{12}{\ln 2} 2^{-\frac{24}{12}} = \frac{9}{\ln 2} \approx 12,98 \text{ mg}$$

af det aktive stof.