Mat Bio E02
Besvarelse til aflevering, uge 48

Sune Nørgård-Sørensen

1. december 2002

Lektion 9, opgave 4:

En musepopulation på en fjern ø har i årevis ligget på en stabil værdi på 1000 individer, da en ulykke dræber 90% af populationen. Det observeres, at bestanden 2 år efter ulykken er vokset til 500 mus. Det antages at bestanden vil reetableres ifølge logistisk vækst.

a. *Find en formel for musepopulationens størrelse til ethvert tidspunkt efter ulykken.*

Lad $N(t)$ være antallet af mus til tiden t, hvor tiden måles i år efter ulykken. Ifølge opgaveformuleringen er $N(0) = 0,1 \cdot 1000 = 100$, $N(2) = 500$ og bestandens maksimale kapacitet $K = 1000$.

Idet vi kender musepopulationens størrelse til tiden $t = 0$ og $t = T = 2$, er $N(t)$ direkte givet ved formlen nederst på side 12 i noterne til lektion 9. Vi får, at

$$\begin{aligned} N(t) &= \frac{KN(0)}{N(0) + (K - N(0))(\frac{N(0)(K-N(T))}{N(T)(K-N(0))})^{\frac{t}{T}}} \\ &= \frac{1000 \cdot 100}{100 + (1000 - 100)(\frac{100 \cdot 500}{500 \cdot 900})^{\frac{t}{2}}} \\ &= \frac{1000}{1 + 9((\frac{1}{9})^{\frac{1}{2}})^t} = \frac{1000}{1 + 9(\frac{1}{3})^t} \end{aligned}$$

b *Hvornår vokser bestanden hurtigst?*

Da populationen vokser logistisk gælder

$$\frac{dN}{dt} = cN(K - N) = -cN^2 + cKN$$

hvor $c > 0$. Populationen vokser hutigst, når $\frac{dN}{dt}$ er størst. Vi skal derfor bestemme maksimum for funktionen

$$f(N) = -cN^2 + cKN$$

$f(N)$ er en parabel med benene nedad. Den har dermed maksimum i sit toppunkt.

Førstekoordinaten x_{top} til toppunktet for en parabel af formen $f(x) = ax^2 + bx + k$ er givet ved

$$x_{top} = \frac{-b}{2a}$$

I vores tilfælde er $a = -c$ og $b = cK$. Vi får derfor, at maksimum for $f(N)$ bliver

$$N_{top} = \frac{-cK}{2(-c)} = \frac{K}{2}$$

Bestanden vokser altså hurtigst når $N = \frac{K}{2} = \frac{1000}{2} = 500$, hvilket vi ud fra opgaveformuleringen ved den er, til tiden $t = 2$.