

Matbio E02

Besvarelse af afleveringsopgave til uge 46

Sune Nørgård-Sørensen

14. november 2002

Lektion 8, opgave 6

Lad $N(x)$ være antallet af HT-passagerer ved billetpris x kroner. I en model for trafikanalyse antager man, at der findes en konstant r så

$$\frac{N'(x)}{N(x)} = \frac{r}{x}$$

a. Find løsningen til ovenstående differentiaalligning.

Ved omskrivning bliver ovenstående differentiaalligning

$$\frac{dN}{dx} = \frac{r}{x}N(x)$$

hvor $x > 0$, da ingen i en overskuelig fremtid vil lade folk køre gratis med bus, endsigte betale dem for det. Endvidere skal der om passagerantallet gælde, at $N(x) > 0$. $N(x) = 0$ er ikke en mulighed, idet vi i den oprindelige ligning dividerer med $N(x)$.

Vi observerer, at vores differentiaalligning er en separabel differentiaalligning. De generelle løsninger er angivet på side 6 i noterne til lektion 8. I vores tilfælde er $t = x$, $y = N$, $f(x) = \frac{r}{x}$ og $g(N) = N$.

Vi bestemmer først konstantløsningen til den omskrevne differentiaalligning. Konstantløsningen bliver

$$g(N) = 0 \Leftrightarrow N(x) = 0$$

men som vi har set skal $N(x) \neq 0$, så dette er ikke en løsning til differential-ligningen

$$\frac{N'(x)}{N(x)} = \frac{r}{x}$$

Ud over konstantløsningen er løsningerne til differentiaalligningen de funktioner $N(x)$ der opfylder nedenstående ligning:

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{g(N)}dN \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{r}{x}dx = \int \frac{1}{N}dN \Leftrightarrow$$

$$r \ln |x| + K = \ln |N| \Leftrightarrow$$

$$r \ln x + K = \ln N$$

$K \in \mathbb{R}$ er en integrationskonstant. $\ln |x| = \ln x$ da $x > 0$. Tilsvarende er $\ln |N| = \ln N$ da antallet af HT-passagerer ikke kan være negativt.

Isolerer vi N i ovenstående udtryk får vi

$$N(x) = e^{r \ln x + K} = (e^{\ln x})^r \cdot e^K = bx^r$$

hvor $b = e^K$ er en konstant.

Vi har nu fundet samtlige løsninger til differentiaalligningen.

b. *Trafiktællinger viser, at når billetprisen øges med 10%, så falder passagerantallet med 3%. Bestem r .*

Ud fra oplysningerne i opgaven ved vi, at

$$N(1, 1x) = 0,97N(x)$$

Billetprisen x øges nemlig med 10% til $1,1x$, mens passagerantallet $N(x)$ falder med 3% til $(1 - 0,03)N(x) = 0,97N(x)$. Indsætter vi det fundne udtryk for N i denne ligning, får vi

$$N(1, 1x) = 0,97N(x) \Leftrightarrow$$

$$b(1, 1x)^r = 0,97bx^r \Leftrightarrow$$

$$1,1^r = 0,97 \Leftrightarrow$$
$$r = \frac{\ln 0,97}{\ln 1,1} \simeq -0,3196$$