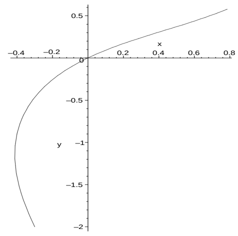
Lektion 8
Differentialligninger

- Implicit differentiation

- Differentialligninger

- Separable differentialligninger

Implicit differentiation



Vi kan finde måske løse ligningen

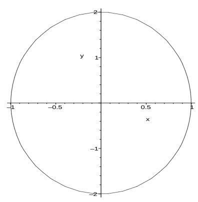
$$xy + \sin y = \tan x \qquad (1)$$

og finde $y = y(x)$ *eksplicit* som en funktion af x. Men selv om det ikke kan lade sig gøre, så bestemmer (1) *implicit* $y(x)$ som en funktion af x. Ved at differentiere (1) mht x får vi

$$y + xy' + y' \cos(y) = 1 + \tan^2 x$$

og for $x = 0$ bliver $y(0) = 0$ og $y'(0) = 1$.

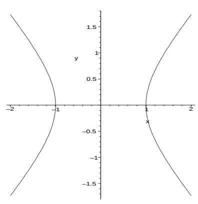
Eksempel 1 *Ligningen $x^2 + y^2 = 1$ fastlægger $y = y(x)$ implicit som en funktion af x (når $x \neq \pm 1$). Implicit differentiation giver*



$$2x + 2yy' = 0 \qquad (2)$$

så $y' = -x/y$. Løs (2) eksplicit og check!

Eksempel 2 *Implicit differentiation af ligningnen $x^2 - y^2 = 1$ giver*



$$2x - 2yy' = 0 \qquad (3)$$

så $y' = x/y$. Løs (3) eksplicit og check!

Sædvanlige differentialligninger

En (sædvanlig) 1. ordens differentialligning er en ligning af formen

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y)$$

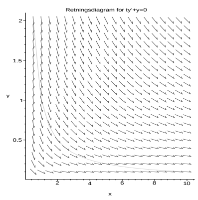
hvor f er en funktion af 2 variable. En (generel) løsning er en differentiabel funktion $y = y(t)$ som opfylder at $y'(t) = f(t, y(t))$ for alle t i et interval. Der er mange (generelle) løsninger. Begyndelsesværdiproblemet

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y), \quad y(t_0) = y_0$$

går ud på at finde den (partikulære) løsning $y(t)$ som opfylder $y(t_0) = y_0$. Der er netop en (partikulær) løsning.

Strømningsdiagrammet får vi ved at afsætte pilen $(1, f(t,y))$ i hvert punkt (t,y). Ved at følge pilene finder vi løsningernes grafer.

Eksempel 3 *Differentialligningen*



$$y' = -\frac{y}{t}$$

har løsningen $y = c/t$, *hvor* c *er en konstant, for*

$$ty' + y = t\left(-\frac{c}{t^2}\right) + \frac{c}{t} = 0$$

for alle $t \neq 0$

Eksempel 4 *Differentialligningen*

$$y' = -\frac{t}{y}$$

har den generelle løsning $y(t) = \sqrt{c^2 - t^2}$, *hvor* $c > 0$ *er en konstant, for*

$$t + yy' = t + \sqrt{c^2 - t^2}\left(\frac{-t}{\sqrt{c^2 - t^2}}\right) = 0$$

når $|t| < c$. *Den partikulære løsning med* $y(1) = 1$ *er* $y(t) = \sqrt{2 - t^2}$, $|t| < \sqrt{2}$.

Eksempel 5 *Differentialligningen* $y' = f(t)$ *har den generelle løsning* $y = \int f(t)\mathrm{dt} + C$. *Den partikulære løsning med* $y(a) = 0$ *er* $y(t) = \int_a^t f(x)\,\mathrm{dx}$.

Eksempel 6 *(Vandfordampning) Lad $v(t)$ være vandvolumenet til tiden t i en sø. Antag at fordampningen er proportional med $v(t)^{2/3}$ og at vandtilførselen er $r(t)$. Differentialligningen*

$$v'(t) = r(t) - cv(t)^{2/3}$$

en da en model for vandmængden i søen. Hvis

$$r(t) = cv(t)^{2/3}$$

er der en ligevægtstilstand.

Eksempel 7 *(Newtons afkølingslov) En vulkan sender en* 1000 *grader varm sten i havet. Stenens temperatur $T(t)$ til tiden t er bestemt ved*

$$T' = -c(T - 15), \quad T(0) = 1000$$

hvis havets temparatur er 15 *grader.*

Separable differentialligninger

En separabel differentialligning er en differentialligning af formen

$$y'(t) = f(t)g(y)$$

hvor højresiden er et produkt af en funktion $f(t)$, kontinuert på et interval I, og en funktion $g(y)$, differentiabel med kontinuert afledet på et interval J.

Den *generelle* løsning findes sådan her:
1. Hvis $g(y_0) = 0$, så er den konstante funktion $y(t) = y_0$ en løsning.
2. Løs ligningen

$$\int f(t)\mathrm{dt} = \int \frac{1}{g(y)}\mathrm{dy}$$

for y. (Implicit differentiation viser at dette virkelig er en løsning.)
Der findes netop en *partikulær løsning* $y(t)$ med $y(t_0) = y_0$ for ethvert valg af begyndelsesbetingelser (t_0, y_0).

Eksempel 8 *(Eksponentiel vækst) Differentialligningen*

$$\frac{dy}{dt} = \lambda y$$

er separabel. Løsningerne er

$$y = y_0 e^{\lambda t}$$

som vi finder ved at følge opskriften: 1. Den konstante funktion $y = 0$ *er en løsning. 2. De andre løsninger opfylder*

$$\int \frac{1}{y} \mathrm{dy} = \int 1 \mathrm{dt}$$

eller

$$\ln |y| = t + C$$

og vi finder y *ved at tage* exp *på begge sider af lighedstegnet.*

Eksempel 9 *(Newtons afkølingslov) Differentialligningen*

$$T'(t) = -c(T - A)$$

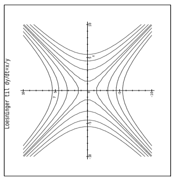
har løsningen

$$T(t) - A = (T_0 - A)e^{-ct}$$

hvor $T_0 = T(0)$.

Opgave: Find den generelle løsning til differentialligningen

$$y' = \frac{t}{y}$$



Løsning:

$$\int t\,dt = \int y\,dy$$
$$\Leftrightarrow t^2 = y^2 + C$$
$$\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{t^2 - C}$$

Opgave: Løs begyndelsesværdiproblemet

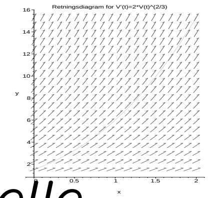
$$y' = \frac{1}{4}y^2, \quad y(0) = 2.$$

Løsning: Ligningen $\int \frac{1}{y^2}\mathrm{dy} = \int \frac{1}{4}\mathrm{dt}$ giver den generelle løsning $y = \frac{1}{C - \frac{1}{4}t}$. Da $y(0) = 2$ er $C = \frac{1}{2}$ så

$$y = \frac{4}{2 - t}$$

er den søgte partikulære løsning.

Eksempel 10 *(Model for cellevækst)*
Lad $V(t)$ være volumenet af en celle. Da næringsoptagelsen sker gennem overfladen, som er proportional med $V(t)^{2/3}$, antager vi at cellens væksthastighed opfylder



$$V'(t) = kV(t)^{2/3}$$

hvor $k > 0$ er en konstant. Den generelle løsning er

$$V(t) = \left(\frac{k}{3}t + C\right)^3$$

som vi ser ved at følge opskriften.

Eksempel 11 *(Allometrisk vækst)*
Lad $x(t)$ være længden af kroppen og $y(t)$ længden af et bestemt organ for en organisme. Antag at den relative vækstrate $\frac{1}{x}x'(t)$ for hele kroppen og den relative vækstrate $\frac{1}{y}y'(t)$ for organet er proportionale. Det giver den separable differentialligning

$$\frac{1}{y}y'(t) = r\frac{1}{x}x'(t) \Leftrightarrow y'(t) = yr\frac{x(t)}{x'(t)}$$

som har den generelle løsning $g(y) = y, f(t) = r\frac{x(t)}{x'(t)}$

$$y = kx^r$$

hvor k er en konstant.

Opgaver til Lektion 8

1. Find $y'(x)$ når $y^3 + x^3 = 1$.
2. Find $y'(x)$ når $1/x + 1/y = 1$.
3. (Eksamen Marts 2002) Lad $y(x)$ være en differentiabel funktion som opfylder at $xy(x) + y(x)^2 = 1$ for alle x. Vis at $y(x)$ er en løsning til differentialligningen
$$y(x) + xy'(x) + 2y(x)y'(x) = 0$$
4. Find løsningerne til differentialligningen $\frac{dy}{dx} = 2xy^2$.
5. Find løsningerne til differentialligningen $\frac{dy}{dx} = 2x\sqrt{y-1}$.
6. (Eksamen Marts 2002) Lad $N(x)$ være antallet af HT-passager ved billetpris x kr. I en model for trafikanalyse antager man at der findes en konstant r så
$$\frac{N'(x)}{N(x)} = \frac{r}{x}, \quad x > 0, \tag{4}$$
altså at den relative vækst i passagerantal N er omvendt proportional med billetprisen x.
a. Find løsningen til differentialligningen (4) ovenfor.
b. Trafiktællinger viser at når billetprisen øges med 10%, så falder passagerantallet med 3%. Bestem r.
7. (Eksamen Januar 2001) Find den generelle løsning til differentialligningen
$$\frac{dy}{dx} = r\frac{y}{x} \quad (x > 0)$$
hvor r er en positiv konstant. Medtag forklaringer og mellemregninger.
8. Løs begyndelsesværdiproblemet $\frac{dy}{dt} = -3ty$, $y(0) = -2$.
9. Løs begyndelsesværdiproblemet $\frac{dy}{dt} = 3y^n$, $y(0) = y_0$.
10. Find den generelle løsnng til differentialligningen
$$\frac{dy}{dx} = ay + b$$
hvor a og b er konstanter. (Vink: Hvordan fandt vi løsningen for Newtons afkølingslov? Eller: $\frac{d}{dx}(y - \frac{b}{a}) = a(y - \frac{b}{a})$)
11. Offeret for et mord har kl 16 temperaturen 30 grader og kl 17 temperaturen 26 grader. Rummets temperatur er 18

grader. Hvornår er mordet sket? (Vi antager at liget følger Newtons afkølingslov).

12. Antag at menneskers vægt som en funktion af højden er en potensfunktion. Find den funktion ud fra oplysningerne at et menneske på 190 cm vejer 120 kg og et menneske på 140 cm vejer 60 kg.