Lektion 7
Eksponentialfunktioner

- Den naturlige eksponentialfunktion
  $\exp(x) = e^x$

- Andre eksponentialfunktioner
  a^x

- Regneregler
  $\exp(0) = 1, \exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$

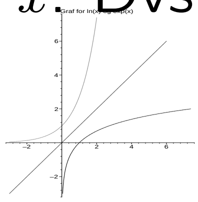
- Potensfunktioner
  x^r

- En berømt grænseværdi

- Uegentlige integraler

Den naturlige eksponentialfunktion

Tallet $e^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{e^m}$ er det tal hvis ln-værdi er $\frac{m}{n}$. Vi vedtager nu feks at $e^{\sqrt{2}}$ er det tal hvis ln-værdi er $\sqrt{2}$. Helt generelt vedtager vi at e^x er det tal hvis ln-værdi er x. Dvs at



$$\ln(e^x) = x = e^{\ln x}$$

så e^x og $\ln x$ er hinandens inverse funktioner. De to grafer er spejlbilleder over vinkelhalveringslinjen $y = x$.
De vigtigste egenskaber ved e^x er

$$e^0 = 1,\ e^1 = e$$

$$e^{x+y} = e^x e^y,\ e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$(e^x)^y = e^{xy}$$

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

som vi ser af at de to tal på hver side af lighedstegnet har samme ln-værdi. Desuden er

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} e^x = e^x \text{ og } \int e^x = e^x + C$$

som vi ser af formlen for differentiation af invers funktion.
Man skriver også $\exp(x)$ for e^x.

Eksempel 1 *(Beregning af e^x) Du kan finde en tilnærmelse til e^x ved at bruge*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x}$$

Udregningen

$$\begin{aligned}
\ln \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} n \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = x \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\ln(1)}{\frac{x}{n}} \\
&= x \ln'(1) = x \cdot \frac{1}{1} = x
\end{aligned}$$

viser nemlig at grænseværdien er det tal hvis ln*-værdi er x. Det tal har vi kaldt e^x. Med $n = 10000$ og $x = \sqrt{2}$ er*

$$\left(1+\frac{\sqrt{2}}{10000}\right)^{10000} = 4,1128\ldots$$

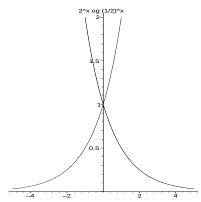
mens den sande værdi er $e^{\sqrt{2}} = 4,1132\ldots$.

Eksponentialfunktioner med andre grundtal

Lad a være et positivt tal, feks $a = 2$. Tallet $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ er det tal hvis $\log_a$-værdi er $\frac{m}{n}$. Vi vedtager nu feks at $a^{\sqrt{2}}$ er det tal hvis $\log_a$-værdi er $\sqrt{2}$. Helt generelt vedtager vi at a^x er det tal hvis $\log_a$-værdi er x. Dvs at

$$\log_a(a^x) = x = a^{\log_a x}$$

så a^x og $\log_a x$ er hinandens inverse funktioner. De to grafer er spejlbilleder over vinkelhalveringslinjen $y = x$. Da



$$a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{(\ln a)\cdot x}$$

er der ikke den store forskel på de forskellige eksponentialfunktioner.
De vigtigste egenskaber ved funktionen a^x er

$$a^0 = 1, \; a^1 = a$$

$$a^{x+y} = a^x a^y, \; a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}, \; (a^x)^y = a^{xy}$$

$$a^{x \ln b} = b^{x \ln a}, \; e^x = a^{\frac{x}{\ln a}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} a^x = \ln(a) \cdot a^x, \; \int a^x \, \mathrm{dx} = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

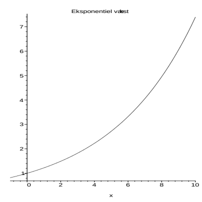
Eksempel 2 *(Eksponentiel vækst)*
Størrelsen $P(t)$ af en bakteriepopulation undre optimale betingelser vokser efter formlen

$$P(t) = P_0 e^{\lambda t} = P_0 (e^{\lambda})^t, \quad \lambda > 0,$$

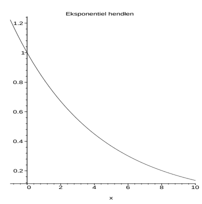
hvor P_0 er antallet af bakterier til tiden $t = 0$ og λ er en positiv konstant. Fordoblingstiden er

$$T_2 = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

og vi kunne også skrive $P(t) = P_0 2^{t/T_2}$.



Eksempel 3 *(Eksponentiel hendøen)*



Antallet $P(t)$ af atomer af en bestemt radioaktiv isotop aftager efter formlen

$$P(t) = P_0 e^{-\lambda t} = P_0 (e^{-\lambda})^t = P_0 (e^{\lambda})^{-t}, \quad \lambda > 0,$$

Halveringstiden er

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

og vi kunne også skrive $P(t) = P_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T_{1/2}}$.

Eksempel 4 *Låner du K_0 kroner til en rente på r procent pr år, er gælden vokset til*

$$K(n) = K_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

efter n år. Gældens fordoblingstid er

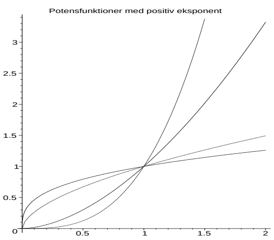
$$T_2 = \frac{\ln 2}{\ln(1 + r/100)} \text{ år}$$

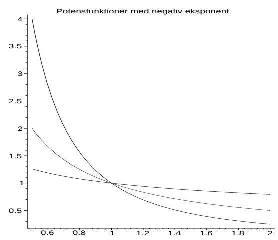
Med $r = 10$ er $T_2 = \frac{\ln 2}{\ln(1{,}1)} = 7{,}3$ år og med $r = 2$ (DKs BNP?) er $T_2 = \frac{\ln 2}{\ln(1{,}02)} =$ 35 år.

Eksempel 5 *(Kulstof datering)*
Carbon 14 isotopen har en halveringstid på $T_{1/2} = 5730$ år. Alderen t af en prøve af organisk materiale som indeholder $1/10$ af den mængde carbon 14 man finder i levende materiale er bestemt ved

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{t/5730} = \frac{1}{10}$$

hvilket giver $t = \frac{\ln 10}{\ln 2} \cdot 5730$ år $= 19035$ år.





Potensfunktionen $f(x) = x^r$

Lad r være et vilkårligt reelt tal. Funktionen $f(x) = x^r$ er defineret for alle positive tal x og den kaldes *potensfunktionen med eksponent* r. (Hvis r er et helt tal er funktionen også defineret for negative x.) Graferne for nogle potensfunktioner med positiv eksponent (til venstre) og negative eksponent (til højre) kan ses øverst på siden.

De vigtigste egenskaber:

$$(xy)^r = x^r y^r,\ (x/y)^r = x^r/y^r,\ x^{-r} = 1/x^r$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} x^r = r x^{r-1},\ \int x^r = \frac{x^{r+1}}{r+1} \, (r \neq -1)$$

$$x^r \text{ voksende hvis } r > 0 \text{ og } \lim_{x \to \infty} x^r = \infty$$

Eksempel 6 *(Allometrisk vækst)*
Sammenhængen mellem størrelsen y af et bestemt organ og størrelsen x af hele organismen er for mange levende væsener givet ved en potensfunktion

$$y = c x^r$$

hvor tallet r kaldes allometrikonstanten.

Karakteristisk egenskaber

Logaritmefunktioner $L(x) = C + \log_a(x)$ $(x > 0)$ opfylder

$$L(Ax) = B + L(x), \quad B = \log_a(x)$$

Potensfunktioner $P(x) = Cx^r (x > 0)$ opfylder

$$P(Ax) = BP(x), \quad B = A^r$$

Eksponentialfunktioner $E(x) = Ca^x$ opfylder

$$E(A + x) = BE(x), \quad B = a^A$$

Specielt gælder

$$E(T_2 + x) = 2E(x) \text{ når } T_2 = \frac{\ln 2}{\ln a}$$

hvis $a > 1$ så E er voksende og

$$E(T_{1/2} + x) = \frac{1}{2}E(x) \text{ når } T_{1/2} = \frac{\ln(1/2)}{\ln a}$$

hvis $a < 1$ så E er aftagende.

En berømt grænseværdi

Lad $r > 0$ være et positivt tal. Både potensfunktion x^r og eksponentialfunktionen e^x går mod ∞ for $x \to \infty$. Hvem vinder? Det gør eksponentialfunktionen:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{x^r}{e^x} = 0}$$

Hvorfor?
Indsætter vi $x = \ln t$ bliver

$$\frac{x^r}{e^x} = \frac{(\ln t)^r}{t} = \left(\frac{\ln t}{t^{1/r}}\right)^r$$

Da x går mod ∞ når t går mod ∞ bliver

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^r}{e^x} = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{\ln t}{t^{1/r}}\right)^r$$

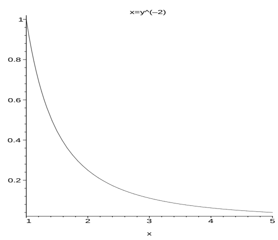
Men vi så i Lektion 6 at enhver potensfunktion vinder over den naturlige logaritmefunktion, så grænseværdien til højre er 0.
Denne grænseværdi ledte Thomas Malthus (1766-1834) til en dommedagsteori.

Uegentlige integraler

Vi definerer

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{dx} = \lim_{N\to\infty} \int_a^N f(x)\,\mathrm{dx}$$

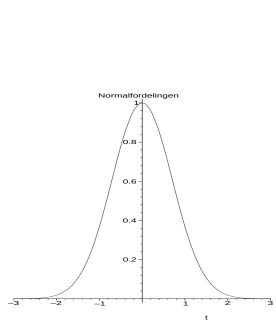
hvis ellers grænseværdien eksisterer. Du kan ogås møde uegentlige integraler af formen $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{dx}$ og endda $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{dx}$. Hvis $f(x)$ er en positiv funktion kan integralerne ses som arealer af ubegrænsede områder.



Eksempel 7 *For alle $r > 0$ er*

$$\int_1^\infty x^{-1-r}\,\mathrm{dx} = \lim_{N\to\infty} \left[-r^{-1}x^{-r}\right]$$
$$= \lim_{N\to\infty} \left(-r^{-1}N^{-r} + r^{-1}\right) = r^{-1}$$

Feks er $\int_1^\infty x^{-2}\,\mathrm{dx} = 1$ og $\int_1^\infty x^{-3}\,\mathrm{dx} = 2$.



Eksempel 8 *Det uegentlige integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\mathrm{dt} = \sqrt{2\pi}$$

kender I fra sandsynlighedsregningnens normalfordeling.

Opgave: Find $\int_0^\infty x^r e^{-x}\,\mathrm{dx}$ for $r = 1, 2, 3, \ldots$
Løsning: Partiel integration giver

$$\int x^r e^{-x}\,\mathrm{dx} = -x^r e^{-x} + r \int x^{r-1} e^{-x}\,\mathrm{dx}$$

og derfor er

$$\int_0^\infty x^r e^{-x}\,\mathrm{dx} = r \int_0^\infty x^{r-1} e^{-x}\,\mathrm{dx}, \quad r \geq 1,$$

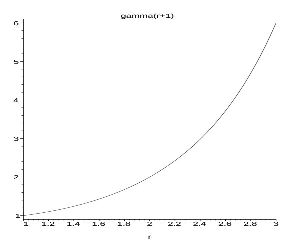
så vi kan altså finde værdierne induktivt.
Vi starter med $r = 1$ hvor

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^0 e^{-x}\,\mathrm{dx} = \int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{dx} &= \lim_{N\to\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^N \\ &= \lim_{N\to\infty} \left(-e^{-n} + 1\right) = 1\end{aligned}$$

og altså er

$$\int_0^\infty x^r e^{-x}\,\mathrm{dx} = r \cdot (r-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$$

for alle naturlige tal r.



Opgaver til Lektion 7

1. Skriv 2^x på formen $e^{\lambda x}$ for en konstant λ.
2. Skriv $e^{1,2x}$ på formen a^x for en konstant a.
3. Hvad er halveringstiden for $E(x) = 3^{-x}$?
4. (**Eksamen Januar 2001, Opgave 3**) Der er nu en bestand af 50 Traner (*Grus grus*) i Jylland. Det antages, at bestanden vokser eksponentielt med 10% om året. Hvornår vil der være 200 fugle?
5. Et radioaktivt stof har en halveringstid på $1,3$ millioner år. Hvor lang tid tager det for aktiviteten at aftage til 10% af den nuværende?
6. Find maksimumsværdien for funktionen $f(x) = xe^{-x}$.
7. "Når billetprisen øges med 10% falder passagerantallet med 3%". Hvilken funktion taler vi om her? Hvor meget skal billetprisen øges for at passagerantallet falder med 25%?
8. En tommelfingerregel siger at fordoblingstiden for en formue, der forrrentes med p% p.a, er $\frac{70}{p}$ år. Hvordan kom jeg frem til det? (Vink: $70 \approx 100 \ln(2)$)
9. Den 1. januar 2000 lægger du en 10 krone på et bord. Samtidig tænder en lommelygte og lader lysstrålen fare ud i verdensrummet. Banken giver dig 10% i rente som du modtager i 10 krone mønter og stabler ovenpå den første mønt. Hvornår bliver lysstrålen overhalet af stablen af mønter?
10. Biologer tæller antallet af fuglearter S på en række øer med areal A. Det viser sig at logaritmen til artsantallet vokser lineært

    $$\ln(S) = 4,5 + 0,15 \ln(A)$$

    som en funktion af logaritmen til arealet. Gør rede for at det betyder at artsantallet vokser som en potensfunktion af arealet. (Se I. Hanski, M. Gyllenberg, Science 275 (1997), 397–400.)
11. Find på en opgave hvor svaret er $\pi \int_0^4 \sqrt{x}\,dx$. Du skal bruge ordene "parabel" og "vinglas".