Lektion 9
Vækstmodeller

- Eksponentiel vækst

  1. Eksponentielt voksende funktioner

  2. Eksponentielt aftagende funktioner

  3. Halverings- og fordoblingstider

- Vækst mod asymptotisk grænse

- Logistisk vækst

  1. Logistisk vækst uden høst

  2. Logistisk vækst med høst (MSY)

Eksponentiel vækst

Ved eksponentiel vækst betyder at vækstraten per capita er konstant over tid, dvs

$$\frac{1}{N(t)}N'(t) = \lambda \qquad \begin{cases} \lambda > 0 & N(t) \text{ vokser} \\ \lambda < 0 & N(t) \text{ aftager} \end{cases}$$

hvor konstanten λ er vækstraten per individ. Løsningerne til den separable differentialligning

$$N'(t) = \lambda N(t) \tag{1}$$

er givet ved ligningen

$$\int \lambda \, dt = \int \frac{1}{N} \, dN \quad \text{dvs} \quad \lambda t + C = \ln |N|$$

Ved at tage eksponentialfunktionen på begge sider får vi den generelle løsning

$$N(t) = Be^{\lambda t}$$

hvor B er en konstant. B kan bestemmes hvis man kender populationens størrelse til ét tidspunkt.

Det er karakteristisk for eksponentiel vækst (henfald) at der findes et tidsrum T_k så

$$N(t+T_k) = kN(t) \quad \left(N(t+T_k) = \frac{1}{k}N(t)\right)$$

dvs at antallet af individer bliver multipliceret (divideret) med $k = 2, 3, \ldots$ over tidsintervaller af længde T_k.

I praksis vil det ofte være sådan at

1. du kender per capita vækstraten λ og populationens størrelse $N(0)$ til tiden $t = 0$; så er

   (2) $\quad N(t) = N(0)e^{\lambda t} \quad$ og $\quad T_k = \dfrac{\ln(k)}{\lambda}$

   eller

2. du kender populationens størrelse til to forskellige tidspunkter $t = 0$ og $t = T$; så er

   (3) $\quad N(t) = N(0)\left(\dfrac{N(T)}{N(0)}\right)^{t/T} \quad$ og

   $$T_k = T\frac{\ln(k)}{\ln\left(N(T)/N(0)\right)}, \quad \lambda = \frac{1}{T}\ln\frac{N(T)}{N(0)}$$

Opgave: Antag at funktionen $N(t)$ vokser eksponentielt og at $N(0) = 100$ og $\lambda = 0,3$. Bestem $N(t)$ og find fordoblingstiden.
Løsning: Ifølge formel (2) er

$$N(t) = 100 \cdot e^{0,3t} \approx 100 \cdot (1,3)^t$$

og fordoblingstiden er

$$T_2 = \frac{\ln 2}{0,3} \approx 2,3$$

Opgave: Antag at funktionen $N(t)$ vokser eksponentielt og at $N(0) = 100$ og $N(3) = 120$. Bestem $N(t)$ og find fordoblingstiden.
Løsning: Ifølge formel (3) er

$$N(t) = 100 \cdot \left(\frac{120}{100}\right)^{t/3} = 100 \cdot (1,2)^{t/3}$$

og fordoblingstiden er

$$T_2 = 3\frac{\ln(2)}{\ln(1,2)} \approx 11,4$$

Opgave:(Fortynding) Et akvarium med 100 liter vand indeholder 200 mg af stoffet ABC. Der ledes 3 l rent vand pr minut ind i akvariet. Bestem mængden af ABC i akvariet til tiden t.

Løsning: Hvis akvariet indeholder $Q(t)$ mg ABC til tiden t, så er

$$Q'(t) = -\frac{3}{100}Q(t) \text{ mg/minut}$$

fordi 3/100 af det tilstedeværende stof bliver skyllet ud hvert minut. Iflg formel (2):

$$Q(t) = 200e^{-\frac{3}{100}t} \text{ mg}$$

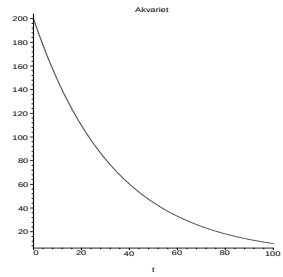
Indholdet af ABC divideres med k i løbet af

$$T_k = \frac{100\ln(k)}{3} \text{ minutter}$$

Feks bliver indholdet halveret eller divideret med 10 i løbet af

$$T_2 = \frac{100\ln(2)}{3} = 23 \text{ min}$$

$$T_{10} = \frac{100\ln(10)}{3} = 77 \text{ min}$$



Vækst mod asymptotisk grænse

Differentialligningen

$$\frac{dL}{dt} = \lambda(A - L)$$

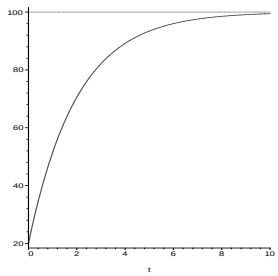
beskriver væksten af fisk. $L(t)$ er fiskens længde og A er artens maksimale længde. Da

$$\frac{d}{dt}(A - L) = -\lambda(A - L)$$

er det samme differentialligning som (1) blot med $A - L$ som den ubekendte funktion. Løsningen er

(4) $A - L = (A - L_0)e^{-\lambda t}$

dvs $L = A - (A - L_0)e^{-\lambda t}$



Opgave: (Newtons afkølingslov) I løbet af 5 minutter falder temperaturen af en kop grøn Yunnan te fra 100 til 80 grader. Luften er 15 grader. Hvor lang tid vil der gå før teen 30 er grader varm?

Løsning: Lad $T(t)$ være teens temperatur. Antager vi at temperaturfaldet er proportionalt med temperaturforskellen betyder det at der findes en konstant c så

$$T'(t) = -c(T-15) = c(15-T), \quad T(0) = 100$$

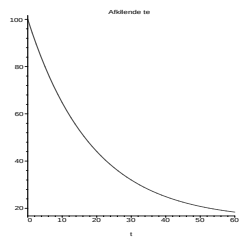
Iflg formel (4) er

$$T(t) = 15 + 85e^{-ct}$$

Oplysningen

$$80 = T(5) = 15 + 85e^{-5c}$$

giver $e^{-5c} = \frac{65}{85} = \frac{13}{17}$. Altså er



$$T(t) = 15 + 85\left(\frac{13}{17}\right)^{t/5}$$

Vi løser nu ligningen $T(t) = 30$ og finder

$$t = 5\frac{\ln(3/17)}{\ln(13/17)} = 32,3 \text{ min}$$

Logistisk vækst

Ved logistisk vækst antager vi at miljøet har en maximal bærekapacitet K og at den relative vækstrate er proportional med populationens frirum, dvs

$$\frac{1}{N(t)}N'(t) = c(K - N(t))$$

eller

$$N'(t) = cN(t)(K - N(t))$$

Den generelle løsning er

1. $N(t) = 0$ og $N(t) = K$ (konstante funktioner).

2. $N(t) = \frac{K}{1+Ce^{-Kct}}$ hvor C er en konstant.

Løsningerne til den separable differentialligning

$$N'(t) = cN(t)(K - N(t))$$

er nemlig givet ved ligningen

$$\int c\,dt = \int \frac{1}{N(K-N)}\,dN$$

Læg mærke til at

$$\frac{1}{N(K-N)} = \frac{1}{K}\Big(\frac{1}{N} + \frac{1}{K-N}\Big)$$

som vi ser ved at sætte på fælles brøkstreg. Altså får vi

$$\begin{aligned}
&\int c\,dt = \int \frac{1}{N(K-N)}\,dN \\
\Leftrightarrow\ & ct + C = \frac{1}{K}\int \Big(\frac{1}{N} + \frac{1}{K-N}\Big)\,dN \\
\Leftrightarrow\ & K(ct + C) = \ln|N| - \ln|K-N| \\
\Leftrightarrow\ & K(ct + C) = \ln\Big|\frac{N}{K-N}\Big| \\
\Leftrightarrow\ & Be^{Kct} = \frac{N}{K-N}
\end{aligned}$$

hvor B er en konstant (positiv eller negativ).

Problemet er at finde N. Som ethvert skolebarn kan regne ud, så gælder

$$(5)\quad a = \frac{N}{K-N} \Leftrightarrow aK - aN = N$$
$$\Leftrightarrow N = \frac{Ka}{1+a} \Leftrightarrow N = \frac{K}{1+a^{-1}}$$

Vi konkluderer (med $a = Be^{Kct}$) at

$$(6)\qquad N = \frac{K}{1+B^{-1}e^{-Kct}}$$

er den generelle løsning.

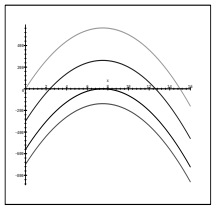
Logistisk vækst blev introduceret af den belgiske biolog P.F. Verhulst i 1838 i et forsøg på at forudsige befolkningsudviklingen i Belgien og Frankrig.

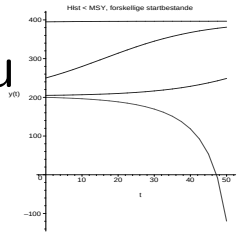
Logistisk vækst med høst

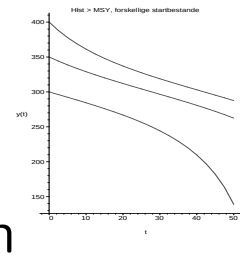
Differentialligningen

$$\frac{dN}{dt} = cN(K - N) - H$$

udtrykker væksten i en population der vokser logistisk og samtidig udsættes for en konstant høst H. Dette er *ikke* en separabel differentialligning og vi har ingen metoder til at løse den. Alligevel kan vi foretage en kvalitative analyse.







Graferne for N' som funktion af N, parabler med toppunkter i $(K/2, cK^2/4 - H)$, viser at hvis $N_0 > K/2$ og

$H < c\frac{K^2}{4}$: Bestanden stabiliseres på niveau $\frac{K}{2} + \sqrt{K^2 - \frac{4H}{c}}$ (nulpunkt for parablen).

$H = c\frac{K^2}{4}$: Bestanden overlever på et niveau lig med $\frac{K}{2}$ (ustabil tilstand).

$H > c\frac{K^2}{4}$: Bestanden uddør.

Det kritiske niveau $H = c\frac{K^2}{4}$ for høsten kaldes på godt dansk for *maximal sustanainable yield* (MSY).

To varianter

1. Kender vi c og populationens størrelse $N(0)$ til tiden $t = 0$ har vi

$$(7)\quad N(t) = \frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-Kct}}$$

$$\text{MSY} = \frac{1}{4}cK^2$$

2. Kender vi populationens størrelse til to tidspunkter $t = 0$ og $t = T \neq 0$ har vi

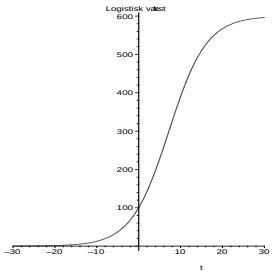
$$(8)\quad N(t) = \frac{KN(0)}{N(0) + (K - N(0))\left(\frac{N(0)(K-N(T))}{N(T)(K-N(0))}\right)^{t/T}}$$

$$\text{MSY} = \frac{1}{4}\frac{K}{T}\ln\left(\frac{N(T)(K - N(0))}{N(0)(K - N(T))}\right)$$

Eksempel 1 *Funktionen* $N(t)$ *vokser logistisk, og* $N(0) = 100$ *og* $N(1) = 120$*. Bestem* $N(t)$ *hvis* $K = 600$*.*

Løsning: Da vi kender værdien af $N(t)$ til to forskellige tidspunkter får vi

$$N(t) = \frac{600}{1 + 5\left(\frac{4}{5}\right)^t}$$



fra formel (8).

Opgaver til Lektion 9

1. Antag at en population vokser eksponentielt efter differentialligningen

$$\frac{dN}{dt} = 0,3N(t) \text{ og at } N(0) = 20$$

   Find $N(t)$. Bestem populationens størrelse til tiden $t = 5$. Hvad er 3-doblingstiden?

2. Lad $L(t)$ være længden af en fisk til tiden t. Antag at

$$\frac{dL}{dt} = \lambda(34 - L) \text{ og at } L(0) = 2$$

   Find $L(t)$. Det viser sig at $L(4) = 10$. Bestem λ.

3. (Eksamen April 2001) Et hårdkogt æg med en temperatur på 98 grader lægges i en (stor) beholder med 18 grader varmt vand. Efter 5 minutter er æggets temperatur 38 grader. Hvornår er æggets temperatur 20 grader?

4. (Eksamen Januar 2002) En bestand af duehøge er i løbet af de sidste 5 år vokset fra 6 til 20 fugle. Det antages at bestanden vokser logistisk mod en bærekapacitet på 25 fugle.
   a. Angiv en formel for antallet, $N(t)$, af fugle til tiden t.
   b. Antag nu at krybskytter skyder H af duehøgene pr. år. Ved hvilken værdi af H vil bestanden uddø?

5. (Eksamen Januar 2002) En bakteriepopulation vokser eksponentielt. Efter 10 timer er populationens størrelse øget med 20%. Hvad er fordoblingstiden?

6. (Eksamen April 1999) I en sø udsættes 50 fisk, og det konstateres at de efter 1/2 år har formeret sig til 100 fisk. Efter en årrække viser det sig at bestanden stabiliseres på 300 fisk. Det antages at bestanden følger logistisk vækst.
   a. Find en formel for fiskepopulationens størrelse til ethvert tidspunkt efter udsættelsen af de første 50 fisk.
   b. Efter bestanden har stabliseret sig, vil myndighederne tillade fiskeri i søen. For at være helt sikre på at bestanden ikke vil tage skade beslutter man sig for at tillade at årligt fiskeri på halvdelen af MSY. Hvor stor en fangst vil man tillade?

7. (Eksamen April 1999) Bademesteren i en svømmehal har bemærket at kloret i bassinet fordamper eksponentielt med en halveringstid på $3\ln(2)$ uger. Han måler at klormængden til tiden 0 er 4 (i en bestemt enhed).
   a. Find en formel for klormængden $y(t)$ til tiden t.
   b. Bademesteren beslutter at tilsætte en konstant mængde klor til vandet pr. tidsenhed. Argumentér for at, hvis m betegner den tilsatte mængde klor pr. tidsenhed, så vil klormængden i vandet nu være beskrevet ved differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{3}y + m$$

   c. Find den generelle løsning til ligningen ovenfor.
   d. Antag igen at $y(0) = 4$. Bestem den mængde klor (m) som bademesteren skal tilsætte for at klormængden i vandet forbliver konstant lig med 4.
8. (Eksamen Januar 1999) En musepopulation på en fjern ø har i årevis ligget på en stabil værdi på 1000 individer, da en ulykke dræber 90% af populationen. Det observeres at bestanden 2 år efter ulykken er vokset til 500 mus. Det antages at bestanden vil reetableres iflg. logistisk vækst.
   a. Find en formel for musepopulationens størrelse til ethvert tidspunkt efter ulykken.
   b. Hvornår vokser bestanden hurtigst? (Dette spørgsmål kan med fordel besvares uafhængigt af spørgsmål **a** udelukkende ved betragtning af differentialligningen der beskriver logistisk vækst.)
9. Antag at en population, af størrelse $N(t)$ til tiden t, vokser efter differentialligningen

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{100}N^2 \text{ og at } N(0) = 10$$

   Find $N(t)$. Hvad sker der når $t \to 10$?