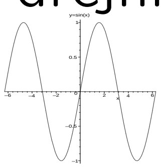
Lektion 14

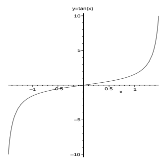
Repetition

Standardfunktioner

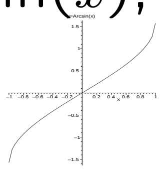
- $(\cos(x), \sin(x))$ er koordinaterne for det punkt på enhedscirklen som $(1, 0)$ føres over i ved en drejning på x (radianer) mod uret



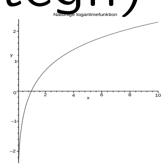
- $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$, $\cot(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$



- $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$, $(-1 \leq x \leq 1)$, $\arctan(x)$ og $\mathrm{arccot}(x)$ (defineret for alle x) er de inverse funktioner til $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$ og $\cot(x)$

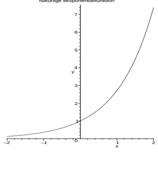


- $\ln(x)$ er arealet (regnet med fortegn) mellem 1 og x under grafen $y = \dfrac{1}{x}$

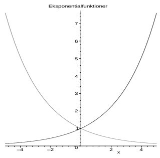


- $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$ (logaritme med grundtal $a > 0$)

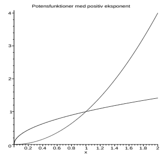
- $\exp(x) = e^x$ er den inverse funktion til $\ln(x)$

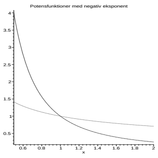


- $a^x = e^{x \ln(a)}$ (eksponentialfunktion med grundtal $a > 0$)



- $x^r = e^{r \ln(x)}$ (potensfunktion med eksponent r)





Regneregler for trigonometriske funktioner:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1, \quad \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$$

$$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$$

$$\sin(\arcsin(x)) = x = \arcsin(\sin(x)) \quad \scriptstyle(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2})$$

Regneregler for logaritmefunktioner:

$$\ln(1) = 0, \quad \ln(e) = 1$$

$$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y), \ \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

$$\ln(x^r) = r\ln(x)$$

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \frac{\ln(b)}{\ln(a)} \cdot \log_b(x)$$

$$\log_a(a^x) = x = a^{\log_a x}$$

Regneregler for potensfunktioner:

$$x^0 = 1, \quad x^1 = x$$

$$x^{r+s} = x^r x^s, \quad x^{r-s} = \frac{x^r}{x^s}, \quad x^{-r} = \frac{1}{x^r}$$

$$x^{rs} = (x^r)^s, \quad x^{\frac{r}{s}} = (x^r)^{\frac{1}{s}}$$

$$x^{\frac{r}{n}} = \sqrt[n]{x^r} = (\sqrt[n]{x})^r, \quad x^{-\frac{r}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^r}}, \quad n\text{=2,3,...}$$

Regneregler for eksponentialfunktioner:

$$\exp(0) = 1, \quad \exp(1) = e, \quad e^0 = 1, \quad e^1 = e$$

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y), \quad e^{x+y} = e^x e^y$$

$$\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}, \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$\exp(rx) = \exp(x)^r, \quad e^{rx} = (e^x)^r$$

$$a^x = e^{x \ln(a)} = b^{\frac{\ln(a)}{\ln(b)} x}$$

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$a^{xy} = (a^x)^y$$

Regneregler for inverse trigonometriske funktioner:

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}, \qquad -1 \leq x \leq x,$$
$$\arctan(x) + \text{arccot}(x) = \frac{\pi}{2}, \qquad -\infty \leq x + \infty$$

Værdier for trigonometriske funktioner og deres inverse

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$	$\cot(x)$
0	0	1	0	∞
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0

Tabellen viser at
$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \arcsin\left(\sin(\frac{\pi}{6})\right) = \frac{\pi}{6}$
$\arctan\left(\sqrt{3}\right) = \arctan\left((\tan(\frac{\pi}{3})\right) = \frac{\pi}{3}$
$\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} = \text{arccot}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Grænseværdi

Definition: Funktionen $f(x)$ har grænseværdien b for x gående mod a, hvis vi kan få funktionsværdierne $f(x)$ til at ligge lige så tæt det skal være ved b ved at vælge x tæt nok ved a. Vi skriver så $\lim_{x \to a} f(x) = b$.

Eksempel:

1. $\lim_{x \to a} x^2 = a^2$

2. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

3. $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

4. $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

5. $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{\exp(x)} = 0$

Regneregler for grænseværdi:

Hvis alle involverede grænseværdier eksisterer, så er

1. $\lim_{x\to a}\Big(Af(x)+Bg(x)\Big)$
   $= A\lim_{x\to a} f(x) + B\lim_{x\to a} g(x)$

2. $\lim_{x\to a}\Big(f(x)\cdot g(x)\Big)$
   $= \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$

3. $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$
   hvis $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

4. $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x))$
   hvis funktionen $f(x)$ er kontinuert i punktet $\lim_{x\to a} g(x)$.

Kontinuitet

Definition: En funktion $f(x)$ er kontinuert i punktet a hvis $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, hvis $f(x)$ nærmer sig funktionsværdien i a når x nærmer sig a.

Hovedsætning om kontinuerte funktioner

Lad $f(x)$, $a \leq x \leq b$, være en kontinuert funktion.

1. Funktionen $f(x)$ har en mindsteværdi, m, og en størsteværdi, M.

2. Funktionen $f(x)$ antager alle værdier mellem sin mindsteværdi og sin størsteværdi.

Eksempel

Hvis $f(x) = \sqrt{x}$ er kvadratroden, så er værdierne $\sqrt{x}$ for $3 \leq x \leq 4$ tallene $\sqrt{3} \leq y \leq 2$.

Differentiation

Definition: En funktion $f(x)$ er differentiabel i punktet x hvis differenskvotienten

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

har en grænseværdi for $h \to 0$. Hvis grænseværdien findes, betegnes den med $f'(x)$, $\frac{df}{dx}(x)$ eller $\frac{d}{dx}f(x)$.

Regneregler for differentiation:

1. $\Big(Af(x)+Bg(x)\Big)' = Af'(x)+Bg'(x)$

2. $\Big(f(x)\cdot g(x)\Big)' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

3. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

4. $\Big(f(g(x))\Big)' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

5. $\Big(f^{-1}\Big)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$

Tolkninger: $f'(x)$ er hældningen af grafen $y = f(x)$ i punktet $(x, f(x))$. Monotoniforhold.

Bestemmelse af max og min: Hvis den differentiable funktion $f(x)$, $a < x < b$, har et lokalt maximum eller minimum i punktet x_0, så er $f'(x_0) = 0$ (vandret tangent).

Eksempler på differentiation:
1. $\frac{d}{dx}\Big(2\sin(x)+3\cos(x)\Big) = 2\cos(x)-3\sin(x)$
2. $\frac{d}{dx}\Big(x^2\ln(x)\Big) = 2x\cdot\ln(x) + x^2\cdot\frac{1}{x}$
$= 2x\cdot\ln(x) + x$
3. $\frac{d}{dx}\Big(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\Big) = \frac{\cos(x)\cos(x)-\sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)}$
$= \frac{1}{\cos^2(x)}$
4. $\frac{d}{dx}\Big(\sin(x^2)\Big) = \cos(x^2)\cdot(2x)$
5. $\frac{d}{dx}\Big(\arcsin\Big)(\sin(x)) = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}}$,
$(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$ så $\frac{d}{du}\arcsin(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$

Det ubestemte integral

Definition: Funktionen $F(x)$ er et ubestemt integral af $f(x)$, eller en stamfunktion til $f(x)$, hvis $F'(x) = f(x)$ for alle x. Funktionen $F(x)$ betegnes med $\int f(x)\,dx$.

Regneregler for ubestemte integraler:

1. $\int (Af(x)+Bg(x))\,dx = A\int f(x)\,dx + B\int g(x)\,dx$

2. $\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$

3. $\int f(g(x))g'(x)\,dx = \Big(\int f(u)\,du\Big)(g(x))$

4. $\int \frac{d}{dx}f(x)\,dx = f(x) = \frac{d}{dx}\int f(x)\,dx$

Eksempler på ubestemte integraler:

1. $\int \Big(2\sin(x) + 3\cos(x)\Big)\, dx$
   $= -2\cos(x) + 3\sin(x)$ (Additivitet)

2. $\int x \ln(x)\, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x}\, dx$
   $= \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{4}x^2$ (Partiel integration)

3. $\int 2x\sqrt{1+x^2}\, dx = \Big(\int \sqrt{u}\, du\Big)(1+x^2)$
   $= \Big(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big)(1+x^2) = \frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}$ (Direkte substitution)

4. $\int \cos^2(x)\, dx = \frac{1}{2}\int (1 + \cos(2x))\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin(x)\sqrt{1-\sin^2(x)}$

5. $\Big(\int \sqrt{1-u^2}\, dx\Big)(\sin(x))$ (Omvendt substitution)
   $= \int \sqrt{1-\sin^2(x)}\cos(x)\, dx$
   $= \int \cos^2(x)\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin(x)\sqrt{1-\sin^2(x)}$
   $= \Big(\frac{1}{2}\arcsin(u) + \frac{1}{2}u\sqrt{1-u^2}\Big)(\sin(x))$

6. $\int \text{arcsin}(x)\,dx = \int 1 \cdot \text{arcsin}(x)\,dx$
$= x\,\text{arcsin}(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$
$= x\,\text{arcsin}(x) + \frac{1}{2}\int \frac{\frac{d}{dx}(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
$= x\,\text{arcsin}(x) + \sqrt{1-x^2}$

7. $\int \sin^n(x)\,dx = \int \sin(x) \cdot \sin^{n-1}(x)\,dx =$
$-\cos(x)\sin^{n-1}(x) + (n-1)\int \cos^2(x)\cos^{n-2}(x)\,d$
$= -\cos(x)\sin^{n-1}(x)$
$+ (n-1)\int(\sin^{n-2}(x) - \sin^n(x))\,dx$ så
$\int \sin^n(x)\,dx$
$= -\frac{1}{n}\cos(x)\sin^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(x)\,dx$

8. $\int \frac{1}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{\frac{d}{dx}(\frac{x}{a})}{1+(\frac{x}{a})^2}$
$= \frac{1}{a}\text{arctan}(\frac{x}{a}) + C$

9. $\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \int \frac{1}{a-x} \cdot \frac{1}{a+x}\,dx$
$= \frac{1}{2a}\int(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x})\,dx$
$= \frac{1}{2a}(-\ln|a-x| + \ln|a+x|) + C =$
$\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

Differentiation og og integration af standardfunktioner

$f(x)$	$f'(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\cos(x)+C$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\sin(x)+C$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$	$-\ln\|\cos(x)\|+C$
$\cot(x)$	$-1-\cot^2(x)=\frac{-1}{\sin^2(x)}$	$\ln\|\sin(x)\|+C$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x\arccos(x)-\sqrt{1-x^2}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x\arctan(x)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
$\operatorname{arccot}(x)$	$\frac{-1}{1+x^2}$	$x\operatorname{arccot}(x)+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
x^r	rx^{r-1}	$\frac{1}{r+1}x^{r+1}+C\ (r\neq -1)$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\ln(\|x\|)+C$
e^x	e^x	e^x+C
$\ln(\|x\|)$	$\frac{1}{x}$	$\|x\|\ln(\|x\|)-\|x\|+C$
a^x	$\ln(a)\cdot a^x$	$\frac{1}{\ln(a)}a^x+C$

Det bestemte integral

Definition: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ hvor $F(x) = \int f(x)\,dx$ er et ubestemt integral af $f(x)$.

Tolkning: Hvis $f(x) \geq 0$ så er $\int_a^b f(x)\,dx$ lig med arealet mellem x-aksen og grafen $y = f(x)$ fra $x = a$ til $x = b$.

Integral- og differentialregningens hovedsætning

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

Eksempel: $\frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{x}$.

Regneregler for bestemte integraler:

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, $\int_a^a f(x)dx = 0$

2. $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

3. $\int_a^b (Af(x) + Bg(x))dx$
   $= A\int_a^b f(x)dx + B\int_a^b g(x)dx$

4. $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$

Eksempler på bestemte integraler:

1. $\int_2^3 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{x=2}^{x=3} = \frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{1}{3}\cdot 8 = \frac{19}{3}$

2. $\int_0^\pi \sin(x)dx = \Big[-\cos(x)\Big]_0^\pi$
$= -\cos(\pi) + \cos(0) = 1 + 1 = 2$

3. $\int_0^\pi \cos^2(x)dx = \frac{1}{2}\Big[x + \sin(2x)\Big]_0^\pi = \frac{1}{2}\pi$

4. $\int_0^1 2x\sqrt{1+x^2}dx = \frac{2}{3}\Big[(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1$
$= \frac{2}{3}(2^{\frac{2}{3}} - 1) = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$

5. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\Big[\arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2}\Big]_0^1$
$= \frac{1}{2}(\arcsin(1) - \arcsin(0)) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$

6. $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin(x)dx = \Big[x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}\Big]_0^{\frac{1}{2}}$
$= \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + \sqrt{\frac{3}{4}} - 1$
$= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\sqrt{3} - 1$

7. $\int_0^1 \frac{1}{3+x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big[\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}\Big]_0^1$
$= \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$

8. $\int_0^1 \frac{1}{3-x^2}dx = \frac{1}{2\sqrt{3}}\Big[\ln\frac{\sqrt{3}+x}{\sqrt{3}-x}\Big]_0^1$
$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}$
$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})$

Differentialligninger

Definition: En differentialligning er en ligning hvor den ubekendte er en funktion. I ligningen kan indgå den ukendte funktion og dens afledte funktioner (evt. af højere orden).

Separable differentialligninger: Løsningerne til en separabel differentialligning

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

er de konstante funktioner $y = y_0$ hvor $g(y_0) = 0$ samt løsningerne til ligningen

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x$$

Eksempler:

1. Løsningerne til $y' = cy$ er

$$y(t) = y_0 e^{ct},$$

eksponentiel vækst ($c > 0$) med fordoblingstid $T_2 = \frac{\ln(2)}{c}$.

2. Løsningerne til $y' = cy(K-y)$ er de konstante funktioner $y = 0$, $y = K$, samt

$$y(t) = \frac{Ky_0}{y_0 + (K - y_0)e^{-Kct}},$$

logistisk vækst med MSY $= c\frac{K^2}{4}$.

Lineære differentialligninger:

Løsningerne til 1.ordens differentialligningen

$$y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$$

er

$$y = e^{-P(x)} \int e^{P(x)} f(x)\, \mathrm{d}x + Ce^{-P(x)}$$

hvor $P(x) = \int p(x)\, \mathrm{d}x$ er et integral til $p(x)$.

Specielt har differentialligningen med konstante koefficienter

$$y'(x) + ay(x) = b$$

løsningen

$$y(x) = \frac{b}{a} + Ce^{-ax}$$

Løsningerne til en homogen 2.ordens lineær differentialligning med konstante koefficienter

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

aflæses af hjælpepolynomiet $ar^2 + br + c = 0$.

Løsningerne til en inhomogen 2.ordens lineær differentialligning med konstante koefficienter

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$$

består af alle løsninger til den tilhørende homogene ligning plus en enkelt løsning til den inhomogene ligning (som vi finder ved at gætte på en funktion, der ligner højresiden $f(x)$).

Løsningerne til et lineært differentialligningssystem

$$x' = ax + by$$
$$y' = cx + dy$$

finder vi ved at omforme til 2. ordens ligningen

$$x'' + (a + d)x' + (ad - bc)x = 0$$

Opgaver til Lektion 14

1. (Eksamen Januar 1999) Find nedenstående integraler eksakt

   a. $\int x(5x^2+3)\,dx$.

   b. $\int_0^4 x(4-x)^{\frac{1}{2}}\,dx$.

2. (Eksamen Januar 1998) En undersøgelse af blyforureningen langs motorvej A38 viser at, hvis $B(x)$ betegner jordens blyindhold x meter fra vejen, gælder

   $$B(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$$

   i passende enheder. Beregn den eksakte værdi af middelværdien af jordens blyindhold i en 2 meter bred bræmme langs den ene side af vejen, dvs

   $$\frac{1}{2}\int_0^2 B(x)\,dx$$

3. For en bestemt fisk gælder at dens vægt, v, som funktion af alderen, t, opfylder

   $$\frac{dv}{dt} = Av^{2/3}e^{-kt}$$

   hvor A og k er kendte positive konstanter. Endvidere er $v(0)=1$ med de valgte enheder.

   a. Bestem fiskens vægt som funktion af dens alder.

   b. Vis at $\lim_{t\to\infty} v(t) = \left(\frac{A}{3k}+1\right)^3$. Hvad udtrykker dette tal?

4. (Eksamen Januar 1998) Mængden af alger i en sø betegnes $M(t)$. Det antages at

   $$M''(t) = -9M(t) + 180$$

   samt at $M(0)=10$ og $M'(0)=6$. Bestem mængden af alger i søen som funktion af tiden.

5. (Eksamen Januar 2002) Betragt differentialligningen $y' = 1-y^2$.

   a. Gør rede for at funktionen

   $$f(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$$

er en løsning til differentialligningen.

b. Find en konstant løsning til differentialligningen.

6. (Eksamen April 2001) Find den eksakte værdi af det bestemte integral

$$\int_0^1 \frac{5x^2}{x^3-2}\,\mathrm{d}x$$

7. (Eksamen April 2001) Lad N være funktionen der, for alle reelle tal t, er givet ved

$$N(t) = A \cdot \exp(-5 \cdot e^{-2t})$$

hvor A er en positiv konstant.

a. Vis, at funktionen N opfylder differentialligningen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\ln N(t)\Big) = 10e^{-2t}$.

b. Bestem A, så $N(0) = 1$.

8. (Eksamen Januar 2001) Find den generelle løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = r\frac{y}{x} \quad (x > 0)$$

hvor r er en positiv konstant.

9. Betragt en population $P(t)$ som kan modelleres ved

$$\frac{dP}{dt} = (0,0004)P(P-150)$$

Find $P(t)$ i disse to tilfælde: a) $P(0) = 200$ b) $P(0) = 100$. Vis at populationen i tilfælde a) eksploderer i antal og i tilfælde b) uddør. Findes der en værdi af $P(0)$ som giver en konstant bestandsstørrelse?