Lektion 13
Lineære differentialligningssystemer

- Homogene lineære differentialligningssystemer med konstante koefficienter

- Inhomogene systemer

- To-kammer modeller

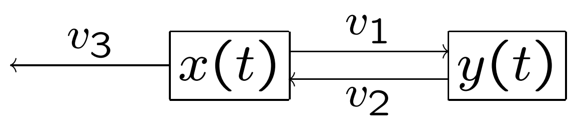
- Lotka–Volterra (ikke lineært)

To-kammer modeller.

Blodet bliver tilført et medikament ved intravenøs injektion. I en model tænker vi at tre ting sker samtidig:

- Noget af stoffet udskilles med urinen (ekskretion).
- Noget af stoffet fordeler sig i vævet (distribution).
- Noget af stoffet vandrer fra vævet tilbage til blodbanen (redistribution).

Lad $x(t)$ (mg) og $y(t)$ (mg) være mængden af medikamentet i blod og væv. Denne figur



viser stoffets vandring hvis v_1, v_2, v_3 (mg/h) er hastigheden af distribution, redistribution og ekskretion.

For hver af de to "kasser" gælder

$$\text{ændring} = \text{det som løber ind} \\ - \text{det som løber ud}$$

Dette princip leder til ligningerne

$$x'(t) = v_2 - v_1 - v_3 \tag{1}$$
$$y'(t) = v_1 - v_2 \tag{2}$$

I denne model antager vi at der findes positive konstanter k_1, k_2 og k_3 så $v_1 = k_1 x$, $v_2 = k_2 y$ og $v_3 = k_3 x$. (Hastighederne antages altså at være proportionale med medikamentmængden i den "kasse" medikamentet udskilles fra.) Ligningerne (1)–(2) giver nu et system af to differentialligninger

$$x'(t) = -(k_1 + k_3)x + k_2 y \tag{3}$$
$$y'(t) = k_1 x - k_2 y \tag{4}$$

Dette er et homogent lineært differentialligningssystem. Ved en løsning forstår vi et par af funktioner $(x(t), y(t))$ som opfylder begge ligninger.

Løsning af differentialligningssystemer
A. Homogene tilfælde

Vi løser et lineært homogent differentialligningssystem ved at omskrive det til en homogen 2.ordens differentialligning. Det næste eksempel viser hvordan.

Eksempel 1 *Løs differentialligningssystemet*

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y \tag{5}$$
$$\frac{dy}{dt} = 2x - 2y \tag{6}$$

Find den løsning der opfylder begyndelsesbetingelserne $x(0) = 14$ *og* $y(0) = 2$.
Løsning: *Vi får en 2. ordens ligning sådan her:*

$$\begin{aligned} x'' &= (x + 2y)' && \textit{fra } (5) \\ &= x' + 2y' \\ &= x' + 4x - 4y && \textit{fra } (6) \\ &= x' + 4x - 2 \cdot 2y \\ &= x' + 4x - 2(x' - x) && \textit{fra } (5) \\ &= -x' + 6x \end{aligned}$$

Nu løser vi 2. ordens differentialligningen

$$x'' + x' - 6x = 0$$

og får

$$x = Ae^{2t} + Be^{-3t}$$

da $r^2 + r - 6 = (r-2)(r+3)$ har de to rødder $r = 2$ og $r = -3$. Nu har vi x og dermed også

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}(x' - x) && \text{fra (5)} \\ &= \frac{1}{2}\Big(2Ae^{2t} - 3Be^{-3t} - Ae^{2t} - Be^{-3t}\Big) \\ &= \frac{1}{2}Ae^{2t} - 2Be^{-3t} \end{aligned}$$

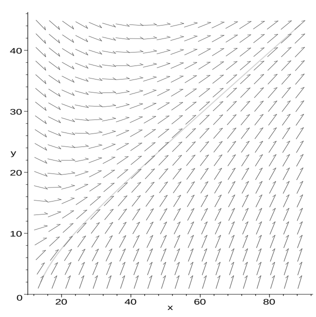
Dette er den generelle løsning.

Den specielle løsning, vi søger, er bestemt ved

$$A + B = 14$$
$$\frac{1}{2}A - 2B = 2$$

som giver $A = 12$ og $B = 2$, så

$$x(t) = 12e^{2t} + 2e^{-3t}$$
$$y(t) = 6e^{2t} - 4e^{-3t}$$



Eksempel 2 *Find den løsning til differentialligningssystemet*

$$x' = -3x + 2y \tag{7}$$
$$y' = -4x + y \tag{8}$$

som opfylder de to begyndelsesbetingelser $x(0) = 0$ *og* $y(0) = 1$.

Løsning: *Vi finder at*

$$\begin{aligned} x'' &= -3x' + 2y' && \textit{fra } (7) \\ &= -3x' - 8x + 2y && \textit{fra } (8) \\ &= -3x' - 8x + (x' + 3x) && \textit{fra } (7) \\ &= -2x' - 5x \end{aligned}$$

eller $x'' + 2x' + 5x = 0$. *Da*

$$D = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 5 = -16$$
$$k = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2} = -1$$
$$\omega = \frac{\sqrt{-D}}{2a} = \frac{4}{2} = 2$$

er løsningen til denne 2.ordens ligning

$$x = e^{-t}\Big(A\sin(2t) + B\cos(2t)\Big)$$

og dermed

$$x' = e^{-t}\Big((-A-2B)\sin(2t) + (2A-B)\cos(2t)\Big)$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}\Big(x' + 3x\Big) \\ &= e^{-t}\Big((A-B)\sin(2t) + (A+B)\cos(2t)\Big) \end{aligned}$$

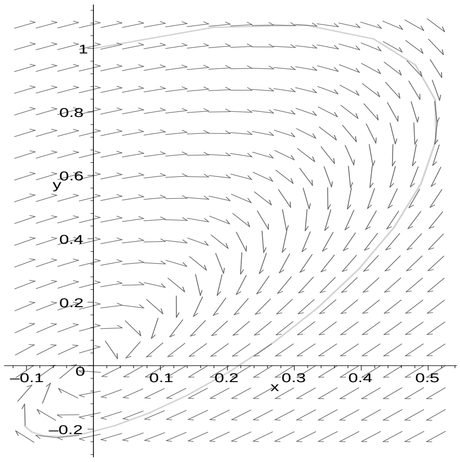
Vi har nu den fuldstændige løsning til de to ligninger (7)–(8). Begyndelsesbetingelserne

$$\begin{aligned} 0 &= x(0) = B \\ 1 &= y(0) = A + B \end{aligned}$$

giver $A = 1$ og $B = 0$, så

$$\begin{aligned} x &= e^{-t}\sin(2t) \\ y &= e^{-t}\Big(\sin(2t) + \cos(2t)\Big) \end{aligned}$$

er den søgte løsning.



Flyd med strømmen!

Omskrivning fra ligningssystem til 2. ordens ligning

Hard-core matematikere gør det én gang for alle. Hvis

$$x' = ax + by \tag{9}$$

$$y' = cx + dy \tag{10}$$

så er

$$\begin{aligned} x'' &= (x')' = (ax+by)' && \text{fra (9)} \\ &= ax' + by' \\ &= ax' + bcx + bdy && \text{fra (10)} \\ &= ax' + bcx + d(x' - ax) && \text{fra (9)} \\ &= (a+d)x' - (ad-bc)x \end{aligned}$$

eller

$$x'' - (a+d)x' + (ad-bc)x = 0 \tag{11}$$

Hvix x og y løser systemet (9)–(10), så vil x løse 2. orden ligningen (11).

Eksempel 3 *(Januar 2000 Opg 3) Find den løsning til*

$$x' = \qquad -\frac{1}{4}y$$
$$y' = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y$$

som opfylder $x(0) = 30, y(0) = 19$.

Løsning: Differentialligningssystemet giver en 2.ordens differentialligning hvis karakteristisk polynomium har rødderne $-\frac{1}{6}$ og $\frac{1}{2}$. Derfor er

$$x = Ae^{-t/6} + Be^{t/2}$$
$$y = -4x' = \frac{2}{3}Ae^{-t/6} + -2Be^{t/2}$$

Begyndelsesbetingelserne giver ligningerne

$$30 = A + B$$
$$19 = \frac{2}{3}B - 2B$$

med løsningen $A = \frac{237}{8}, B = \frac{3}{8}$. Altså er

$$x = \frac{237}{8}e^{-t/6} + \frac{3}{8}e^{t/2}$$
$$y = \frac{79}{4}e^{-t/6} + \frac{3}{4}e^{t/2}$$

B. Inhomogene ligningssystemer

Systemet

$$\begin{aligned} x' &= 3x - 2y - 3 \\ y' &= 3x - 4y + 9 \end{aligned}$$

er et *inhomogent* lineært differentialligningssystem med konstante koefficienter. Ligevægtstilstanden, bestemt ved

$$\begin{aligned} 0 &= 3x - 2y - 3 \\ 0 &= 3x - 4y + 9 \end{aligned}$$

giver én konstant løsning til systemet, nemlig $x = 5$, $y = 6$. Den fuldstændige løsning får vi ved til ligevægtstilstanden at addere alle løsninger til det tilsvarende homogene system

$$\begin{aligned} x' &= 3x - 2y \\ y' &= 3x - 4y \end{aligned}$$

Det giver

$$\begin{aligned} x &= 2Ae^{2t} + Be^{-3t} + 5 \\ y &= Ae^{2t} + 3Be^{-3t} + 6 \end{aligned}$$

Eksempel 4 *Jordbunden består af to forskellige jordlag. Vi antager at regn falder på jordoverfladen med konstant hastighed p (mm/h), siver ned i det første jordlag, derfra ned i det andet, og derfra videre ned i undergrunden. Vi opstiller en matematisk model.*

Lad $x(t)$ (mm) og $y(t)$ (mm) være vandhøjden i det øverste og det nederste lag. Vi bruger en 2-kammer model til at beskrive situation

$$\xrightarrow{\quad p \quad} \boxed{x(t)} \xrightarrow{\quad k_1 x \quad} \boxed{y(t)} \xrightarrow{\quad k_2 y \quad}$$

Her står p (mm/h) for den konstante regnintensitet. Vi antager, at den hastighed hvormed vandet flyder væk fra et jordlag er proportional med vandhøjden (i mm) i det jordlag. Det giver ligningerne

$$x' = p - k_1 x$$
$$y' = k_1 x - k_2 y$$

som er et inhomogent system.

Ligevægtstilstandens konstante løsninger fås af

$$\begin{aligned} 0 &= p - k_1 x \\ 0 &= k_1 x - k_2 y \end{aligned}$$

som giver $x = \frac{p}{k_1}$, $y = \frac{p}{k_2}$. Det tilsvarende homogene system

$$\begin{aligned} x' &= -k_1 x \\ y' &= k_1 x - k_2 y \end{aligned}$$

har løsningen (Overvej!)

$$\begin{aligned} x &= Ae^{-k_1 t} \\ y &= \frac{k_1}{k_2 - k_1} Ae^{-k_1 t} + Be^{-k_2 t} \end{aligned}$$

Den fuldstændige løsning er derfor

$$\begin{aligned} x &= \frac{p}{k_1} + Ae^{-k_1 t} \\ y &= \frac{p}{k_2} + \frac{k_1}{k_2 - k_1} Ae^{-k_1 t} + Be^{-k_2 t} \end{aligned}$$

Lad os nu også antage at jordlagene er tørre til tiden $t = 0$, altså at vi har begyndelsesbetingelserne $x(0) = 0$ og $y(0) = 0$. Det giver

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{p}{k_1} + A \\ 0 &= \frac{p}{k_2} + \frac{k_1}{k_2 - k_1} A + B \end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned} A &= -\frac{p}{k_1} \\ B &= -\frac{p}{k_2} + \frac{k_1}{k_2 - k_1} \cdot \frac{p}{k_1} = \frac{k_1 p}{k_2(k_2 - k_1)} \end{aligned}$$

Vi konkluderer altså at

$$\begin{aligned} x &= \frac{p}{k_1}\Big(1 - e^{-k_1 t}\Big) \\ y &= \frac{p}{k_2} - \frac{p}{k_2 - k_1}\Big(e^{-k_1 t} - \frac{k_1}{k_2} e^{-k_2 t}\Big) \\ &= \frac{p}{k_2} - e^{-k_1 t} \frac{p}{k_2 - k_1}\Big(1 - \frac{k_1}{k_2} e^{(k_1 - k_2) t}\Big) \end{aligned}$$

giver udviklingen af vandhøjden i de to jordlag.

Lotka–Volterra* modeller

Betragt (det ikke-lineære) differentialligningssystem

$$\frac{dx}{dt} = x(p - ay) \tag{12}$$

$$\frac{dy}{dt} = y(-q + bx) \tag{13}$$

med positive konstanter a, b, p, q. Dette system bruges i økologi til at modellere vekselvirkningen mellem en population, $x(t)$, af byttedyr (sneharer) og en population, $y(t)$, af rovdyr (polarræve).

Hvis konstanten a var lig med 0, ville (12) reducere til ligningen $dx/dt = px$ for eksponentiel *vækst*, og bestanden af byttedyr ville vokse over alle grænser for $t \to \infty$. Tilsvarende, hvis konstanten b var lig med 0, ville (13) reducere til ligningen $dy/dt = -qy$ for eksponentiel *henfald*, og bestanden af rovdyr ville uddø for $t \to \infty$. Det negative led $-ay$ i (12) nedsætter per capita vækstraten for byttedyrene med et bidrag der er proportionalt med antallet af rovdyr. Det positive led bx i (13) øger per capita vækstraten for rovdyrene med et bidrag der er proportionalt med antallet af byttedyr.

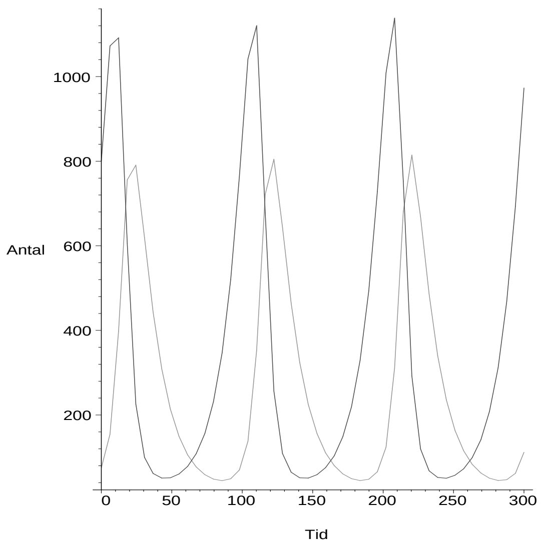
*Vito Volterra udviklede modellen ca 1920 for at analysere de cykliske variationer i spisefisk/haj-bestandene i Adriaterhavet.

Eksempel 5 *Differentialligningssystemet*

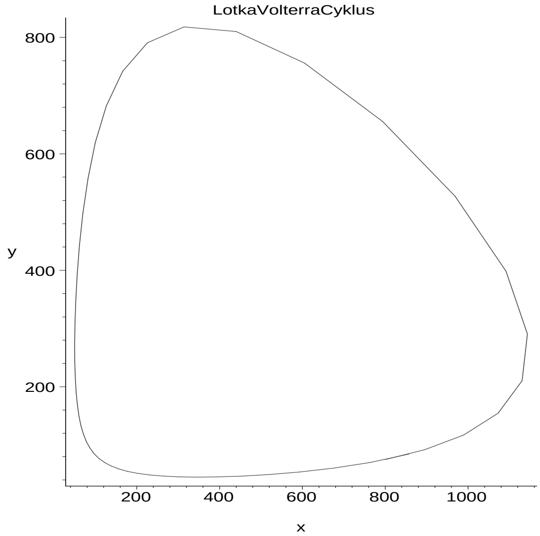
$$\frac{dx}{dt} = 0,08x - 0,0003xy$$
$$\frac{dy}{dt} = -0.07y + 0,0002xy$$
$$x(0) = 800, \ \ y(0) = 75$$

modellerer samspillet mellem en bestand kaniner, oprindeligt på 800, *og en bestand ulve, oprindeligt på* 75.

Graferne for $x(t)$ *og* $y(t)$



Kurven $(x(t), y(t))$



Løsningskurverne er ikke stabile - biologisk set ikke så godt!

To konkurrerende arter

Differentialligningssystemet

$$\frac{dx_1}{dt} = \alpha_1 x_1 (K_1 - x_1 - \alpha_{12} x_2) \tag{14}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \alpha_2 x_2 (K_2 - x_2 - \alpha_{21} x_1) \tag{15}$$

med positive konstanter $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{12}, \alpha_{21}$, bruges i økologi til at modellere vekselvirkningen mellem en to populationer af to dyre- eller plantearter, der konkurrerer om de samme ressourcer. Funktionerne $x_1(t)$ og $x_2(t)$ står for antallet af individer af art 1 og 2 til tiden t. K_1 og K_2 er miljøets bærekapacitet for de to arter.

Hvis konstanterne α_{12} og α_{21} begge var lig med 0 ville ligningerne reducere til de logistiske ligninger og antallet af begge arter ville vokse logistisk uden indflydelse på hinanden. Når konstanten α_{12} ikke er 0 udtrykker det at x_2 individer af art 2 har lige så stor negativ indvirking på art 1 som $\alpha_{12}x_2$ individer dens egen slags. Helt tilsvarende har x_1 individer af art 1 lige så stor negativ indvirkning på art 2 som $\alpha_{21}x_1$ individer af den egen art.

Opgaver til Lektion 13

1. Løs differentialligningssystemet
$$\frac{dx}{dt} = 2x - y$$
$$\frac{dy}{dt} = x$$
2. Løs differentialligningssystemet
$$\frac{dx}{dt} = -x + y$$
$$\frac{dy}{dt} = x - y + t$$
3. To dyrearter, hvis antal betegnes med x og y, konkurrerer om de samme ressourcer. Deres interaktion modelleres ved
$$\frac{dx}{dt} = x - y + 30 + 5e^{-t}$$
$$\frac{dy}{dt} = 2x - y$$
Find $x(t)$ og $y(t)$ når $x(0) = 50$ og $y(0) = 65$. Vil en af arterne udkonkurrere den anden?
4. (Januar 2001) a) Find den generelle løsning til differentialligningssystemet
$$\frac{dx}{dt} = 3x - y$$
$$\frac{dy}{dt} = 4x - 2y$$
Medtag mellemregninger.
b) Find den partikulære løsning, $(x(t), y(t))$, der opfylder, $x(0) = 3$ og $y(0) = 0$.
5. (April 1999) Lad $x(t)$ og $y(t)$ betegne antallet af to slags dyr, henholdsvis X og Y, der konkurrerer om samme føde. Antag endvidere at dyrenes antal udvikler sig efter ifølge differentialligningssystemet
$$\frac{dx}{dt} = 3x - y$$
$$\frac{dy}{dt} = -2x + 2y + 12k$$

hvor sidste led i sidste ligning angiver at der udsættes et konstant antal $12k$ af dyreart Y pr. tidenhed.

a. Find den fuldstændige løsning til dette system af differentialligninger.

b. Antag at der til tiden $t = 0$ er 500 af arten X og 400 af arten Y, og antag desuden at der ikke udsættes nogen dyr af art Y ($k = 0$ i ligningerne ovenfor). Vis at en af arterne uddør, og bestem den værdi af t hvor det sker.

c. Antag, som i spørgsmål **b**, at der til $t = 0$ er 500 af arten X og 400 af arten Y, man lad nu k være forskellig fra 0. Undersøg om det er muligt at redde *begge* arter fra at uddø ved at udsætte dyr af arten Y med konstant hastighed, dvs. ved at vælge k passende.

6. (Januar 1997) Et dyr er blevet angrebet af en skadelig parasit. Til tiden $t = 0$ er der 25 parasitter, og dyrets vægt er (i passende enheder) 10. Idet antal parasitter til tiden t betegnes $y(t)$, og dyrets vægt til tiden t betegnes $x(t)$, gælder

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}y + 10$$
$$\frac{dy}{dt} = 8x - 80$$

Find et udtryk for dyrets vægt til et vilkårligt tidspunkt t.

7. (Ligning for løsningskurven til Lotka-Volterra modellen) Lad $(x(t), y(t))$ være løsningskurven for Lotka-Volterra modellen (12, 13), se Eksempel 5. Antag at kurven er graf for en funktion $y = y(x)$. Så er $y(t) = y(x(t))$ og

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \text{ eller } \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

Det giver den separable differentialligning

$$\frac{dy}{dx} = \frac{px - axy}{-qy + bxy} = \frac{-q + bx}{x}\frac{y}{p - ay}$$

Vis at den generelle løsning er givet implicit på formen

$$x^q y^p = Ce^{bx}e^{ay}$$

hvor C er en konstant (som kan bestemmes hvis man kender ét punkt, som kurven løber igennem).