Lektion 12

- 2. ordens lineære differentialligninger
- homogene
- inhomogene
- eksempler
- højere ordens lineære differentiallininger

Anden ordens lineære differentialligninger med konstante koefficienter

A. Homogene ligninger

Den anden ordens homogene lineære differentialligning med konstante koefficienter ser sådan ud

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0 \qquad (1)$$

med et 0 på højresiden; $a \neq 0$, b, og c er konstanter.

Eksempel 1 *Differentialligningen*

$$y'' + y' - 2y = 0$$

er en homogen 2. ordens lineær differentialligning med konstante koefficienter. En løsning er en funktion $y = y(x)$ *så at* $y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 0$ *for alle* x.

B. Løsninger til den homogene ligning

Hjælpepolynomiet

$$ar^2 + br + c = a\Big[(r + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\Big]$$

er det andengradspolynomium, der har de samme koefficienter som (1).

Diskriminanten $D = b^2 - 4ac$ afgør antallet af rødder i hjælpepolynomiet:

I. $D = b^2 - 4ac > 0$: To forskellige rødder

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

II. $D = b^2 - 4ac = 0$: Én rod

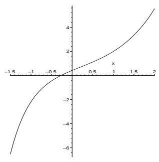
$$r = -\frac{b}{2a}$$

III. $D = b^2 - 4ac < 0$: Ingen (reelle) rødder.

Løsningerne til differentialligningen falder tilsvarende i tre tilfælde:

Løsningerne til $ay'' + by' + cy = 0$ er

I. $D = b^2 - 4ac > 0$:

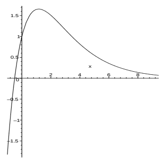


$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \quad \text{hvor}$$

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \text{ og } r_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

er hjælpepolynomiets to rødder.

II. $D = b^2 - 4ac = 0$:

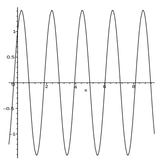


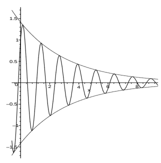
$$y(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx} \quad \text{hvor}$$

$$r = -\frac{b}{2a}$$

er hjælpepolynomiets rod.

III. $D = b^2 - 4ac < 0$:





$$y = e^{kx}\Big(C_1 \sin(\omega x) + C_2 \cos(\omega x)\Big) \text{ hvor}$$

$$k = -\frac{b}{2a}, \ \omega = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \frac{\sqrt{-D}}{2a}$$

C_1 og C_2 er konstanter, som kan bestemmes ud fra f.eks. $y(0)$ og $y'(0)$.

Hvorfor?

Vi checker, at den påståede løsning i tilfælde I, faktisk er en løsning.

Hvis

$$y = Ce^{rx} \quad \text{så er}$$
$$y' = rCe^{rx} \;\text{ og }\; y'' = r^2Ce^{rx}$$

Indsætter vi dette i ligningen (1) får vi

$$\begin{aligned} &ay'' + by' + cy \\ &\qquad = ar^2Ce^{rx} + brCe^{rx} + cCe^{rx} \\ &\qquad\qquad = (ar^2 + br + c) \cdot Ce^{rx} \end{aligned}$$

Da Ce^{rx} aldrig er 0 (hvis $C \neq 0$), slutter vi

$$\begin{aligned} &y = Ce^{rx} \text{ er en løsning til (1)} \\ &\Leftrightarrow ar^2 + br + c = 0 \\ &\Leftrightarrow r = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \end{aligned}$$

eller med ord, $y = Ce^{rx}$ er en løsning hvis og kun hvis r er rod i hjælpepolynomiet.

Eksempel 2 *(Den harmoniske oscillator) Bevægelsen af en kugle ophængt i en fjeder (i et lufttomt rum og sådan set også uden tyngdekraft(men det spiller ikke den store rolle)) vil iflg Newtons 2. lov*

$$\textit{acceleration} = \frac{\textit{kraft}}{\textit{masse}}$$

være bestemt af differentialligningen

$$y''(t) = \frac{-ky(t)}{M}$$

hvor k er fjederkonstanten og M er massen. Dvs.

$$My''(t) + ky(t) = 0$$

hvilket netop er en 2.ordens lineær differerentialligning. Løsningen er

$$y(t) = C_1 \sin\Big(\sqrt{\frac{k}{M}}t\Big) + C_2 \cos\Big(\sqrt{\frac{k}{M}}t\Big)$$

da $b = 0$ og $D = b^2 - 4ac = -4kM < 0$.

Eksempel 3 *Find den generelle løsning til differentialligningen*

$$y'' + 9y = 0$$

Bestem den partikulære løsning med $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.

Løsning: *Dette er en homogen 2. ordens lineær differentialligning med konstante koefficienter* $a = 1$, $b = 0$, $c = 9$ *Da hjælpepolynomiet*

$$r^2 + 9 = 0$$

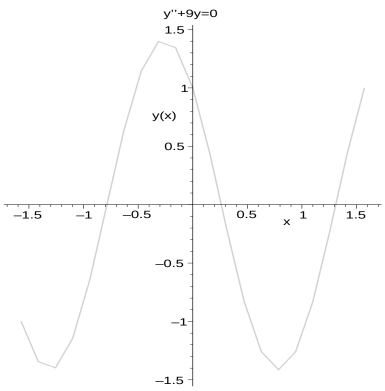
ikke har nogen rødder idet $D = -4ac = -4 \cdot 1 \cdot 9 = -36$ *er negativ, bliver løsningerne*

$$y = C_1 \sin(3x) + C_2 \cos(3x)$$

Hvis $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$, *så er* $C_1 = -\frac{2}{3}$ *og* $C_2 = 1$, *så*

$$y = -\frac{2}{3} \sin(3x) + \cos(3x)$$

Harmonisk svingning $D < 0$, $b = 0$



Eksempel 4 *Find den generelle løsning til differentialligningen*

$$y'' + 4y' + 13y = 0$$

Find den partikulære løsning med $y(0) = 5$ *og* $y'(0) = 1$.

Løsning: *Dette er en homogen 2. ordens lineær differentialligning med konstante koefficienter* $a = 1$, $b = 4$, $c = 13$. *Da hjælpepolynomiets*

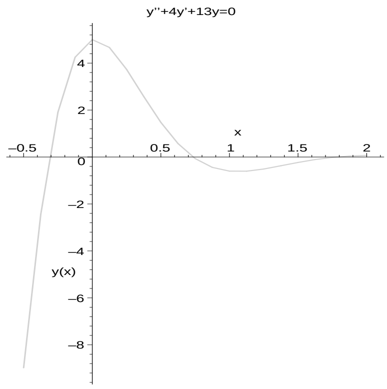
$$r^2 + 4r + 13$$

diskriminant $D = 4^2 - 52 = -36$ *er negativ, er løsningerne*

$$y(x) = e^{-2x}\Big(C_1 \sin(3x) + C_2 \cos(3x)\Big)$$

Hvis $y(0) = 5$ *og* $y'(0) = 1$, *så er* $C_2 = 5$ *og* $C_1 = \frac{11}{3}$.

Dæmpet harmonisk svingning $D < 0$, $b > 0$



Eksempel 5 *Find den generelle løsning til differentialligningen*

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

Find den partikulære løsning med $y(0) = 10$ *og* $y'(0) = -1$.

Løsning: *Dette er en homogen 2. ordens lineær differentialligning med konstante koefficienter* $a = 1$, $b = 6$, $c = 9$. *Da hjælpepolynomiet*

$$r^2 + 6r + 9 = (r + 3)^2$$

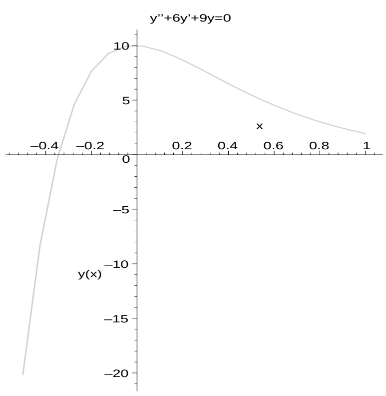
kun har én rod $r = -3$, *er den generelle løsning*

$$y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$$

Hvis $y(0) = 10$ *og* $y'(0) = -1$ *bliver*

$$C_1 = 10, \quad -3C_1 + C_2 = -1$$

så $C_1 = 10$ *og* $C_2 = 29$.



Kritisk dæmpet harmonisk svingning $D = 0$

Eksempel 6 *Find den generelle løsning til differentialligningen*

$$y'' + y' - 2y = 0$$

Find den partikulære løsning med $y(0) = 1$ *og* $y'(0) = 2$.

Løsning: *Dette er en homogen 2. ordens lineær differentialligning med konstante koefficienter* $a = 1$, $b = 1$, $c = -2$. *Da hjælpepolynomiet*

$$r^2 + r - 2 = (r + 2)(r - 1)$$

har to rødder, $r_1 = -2$ *og* $r_2 = 1$, *er*

$$y(x) = C_1 \exp(-2x) + C_2 \exp(x)$$

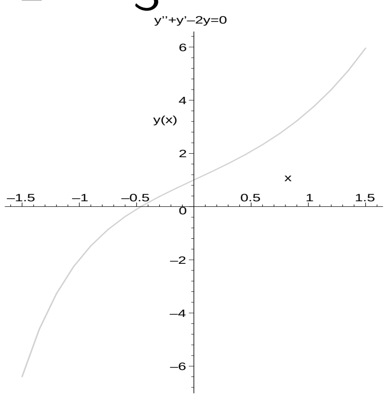
hvor C_1 *og* C_2 *er konstanter.*

Hvis $y(0) = 1$ *og* $y'(0) = 2$, *så er*

$$C_1 + C_2 = 1, \qquad -2 \cdot C_1 + C_2 = 2$$

som giver $C_1 = -\frac{1}{3}$, $C_2 = \frac{4}{3}$.

Overdæmpet svingning $D > 0$



C. Inhomogene ligninger

Den anden ordens inhomogene lineære differentialligning med konstante koefficienter ser sådan ud

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = f(x)$$

med en funktion af x på højresiden; $a \neq 0$, b, og c er konstanter.

Eksempel 7 *Differentialligningen*

$$y'' + y' - 2y = e^x$$

er en 2. ordens inhomogen lineær differentialligning med konstante koefficienter. En løsning er en funktion $y = y(x)$ så at $y''(x) + y'(x) - 2y(x) = e^x$ for alle x.

D. Løsninger til den inhomogene ligning

Løsningerne til $ay'' + by' + cy = f(x)$ er

$$y(x) = y_0(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

hvor $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ er alle løsninger til den tilhørende homogene ligning

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0$$

og $y_0(x)$ er én løsning til den inhomogene ligning.

Miraklet sker ved et gæt. Hvis $f(x)$ indeholder

- e^{ax}, gæt på $y_0(x) = Ae^{ax}$

- x^n, gæt på et polynomium $y_0(x) = A_0 + A_1 x + \cdots A_n x^n$ (Eks 8).

- $\cos(ax)$ eller $\sin(ax)$, gæt på $y_0(x) = A_1 \cos(ax) + A_2 \sin(ax)$ (Eks 10).

evt. ganget med x eller x^2 (se Eks 9).

Hvorfor?

Vi antager at y_0 er en løsning til

$$ay'' + by' + cy = f(x) \qquad (2)$$

Hvis y er en vilkårlig (anden) løsning til (2), så er differencen $y - y_0$ en løsning til den tilhørende homogene ligning fordi

$$\begin{aligned} &a(y-y_0)'' + b(y-y_0)' + c(y-y_0) \\ &\quad = (ay'' + by' + cy) - (ay_0'' + by_0' + cy_0) \\ &\quad = f(x) - f(x) = 0 \end{aligned}$$

Men dvs at

$$y - y_0 = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

eller

$$y = y_0 + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

hvor y_1 og y_2 er de to løsninger, som vi fandt i det homogene tilfælde.

Eksempel 8 *Løs differentialligningen*

$$y'' + y' - 2y = x^2$$

Løsning: *Vi gætter på*

$$\begin{aligned} y_0(x) &= Ax^2 + Bx + C \text{ så} \\ y_0'(x) &= 2Ax + B \text{ og} \\ y_0''(x) &= 2A \end{aligned}$$

Vi ville ønske at

$$\begin{aligned} x^2 &= y_0'' + y_0' - 2y_0 \\ &= 2A + 2Ax + B - 2Ax^2 - 2Bx - 2C \\ &= x^2(-2A) + x(2A - 2B) + (2A + B - 2C) \end{aligned}$$

men det kan vi opnå ved at sætte $A = -1/2$, $B = -1/2$ *og* $C = -3/4$. *Den fuldstændige løsning er derfor*

$$\begin{aligned} y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \\ + C_1 \exp(-2x) + C_2 \exp(x) \end{aligned}$$

da vi kender løsningerne til den tilhørende homogene ligning fra Eksempel 6.

Eksempel 9 *Løs differentialligningen*

$$y'' + y' - 2y = e^x$$

Løsning: *Vi ville nok først gætte på at* $y_0(x) = Ce^x$ *er en løsning. Det er imidlertid forkert, for* e^x *er (tilfældigvis) en løsning til den homogene ligning. I anden omgang gætter vi på*

$y_0(x) = Cxe^x$ *så*
$y_0'(x) = Ce^x + Cxe^x$ *og* $y_0''(x) = 2Ce^x + Cxe^x$

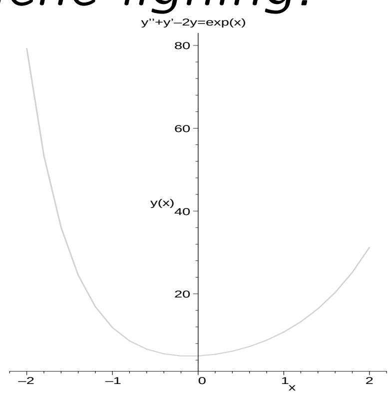
Vi ville ønske at

$$\begin{aligned} e^x &= y_0'' + y_0' - 2y_0 \\ &= e^x(2C + C) + xe^x(C + C - 2C) \end{aligned}$$

Men det kan vi opnå ved at sætte $C = 1/3$. *Den fuldstændige løsning er derfor*

$$y = \frac{1}{3}xe^x + C_1 \exp(-2x) + C_2 \exp(x)$$

da Eksempel 6 giver løsningerne til den tilhørende homogene ligning.



Eksempel 10 *Løs differentialligningen*

$$y'' + 6y' + 9y = 2\sin(x)$$

Løsning: *Vi gætter på*

$$\begin{aligned} y_0(x) &= A\cos(x) + B\sin(x) \quad \textit{så} \\ y_0'(x) &= -A\sin(x) + B\cos(x) \quad \textit{og} \\ y_0''(x) &= -A\cos(x) - B\sin(x) \end{aligned}$$

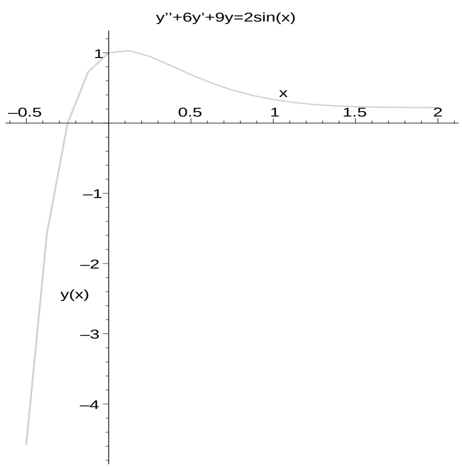
Det giver ligningerne

$$\begin{aligned} -A + 6B + 9A &= 0 \\ -B - 6A + 9B &= 2 \end{aligned}$$

med løsningen $A = -\frac{3}{25}$, $B = \frac{4}{25}$. *Altså er*

$$\begin{aligned} y = -\frac{3}{25}\cos(x) + \frac{4}{25}\sin(x) \\ + C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x} \end{aligned}$$

da Eksempel 5 giver løsningen til den tilhørende homogene ligning.



*

D. Differentialligninger af højere orden

En homogen $n$te ordens lineær differentiallignign med konstante koefficienter ser sådan ud

$$a_n y^{(n)}(x) + \cdots + a_1 y^{(1)}(x) + a_0 y(x) = 0$$

hvor $y^{(k)}(x)$ er den $k$te afledede funktion. Løsningerne har formen

$$y = C_1 y_1(x) + \cdots + C_n y_n(x)$$

hvor de n funktioner $y_1, \ldots, y_n$ kan aflæses af hjælpepolynomiet

$$a_n r^n + \cdots + a_1 r + a_0 = 0$$

akkurat som for 2.ordens ligninger.

Eksempel 11 *Den 4. ordens lineære differentialligning*

$$y^{(4)} - 16y = 0$$

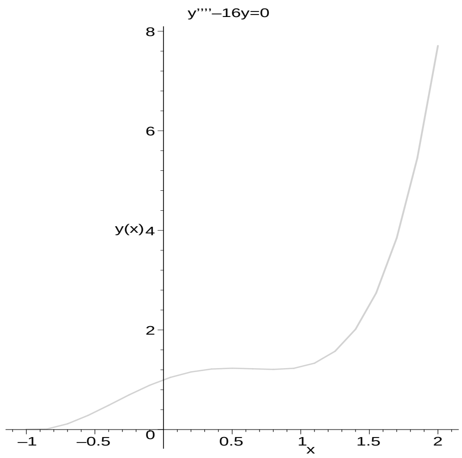
har hjælpepolynomiet

$$r^4-16 = (r^2-4)(r^2+4) = (r-2)(r+2)(r^2+4)$$

som giver den fuldstændige løsning

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos(2x) + C_4 \sin(2x)$$

hvor $C_1, \ldots, C_4$ er konstanter.



*

Opgaver til Lektion 12

1. Find den generelle løsning til differentialligningen $y'' + y' - 6y = e^{2x}$.
2. Find den generelle løsning til differentialligningen $y'' + 2y' + 2y = 2$.
3. Find den generelle løsning til differentialligningen $y'' + y = \cos x$.
4. Løs begyndelsesværdiprobelemet $y'' + 9y = 80\cos(5x)$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.
5. (Eksamen Januar 2002) Betragt differentialligningen $y'' - 4y' + 4y = 0$.
   a. Find den generelle løsning.
   b. Find den partikulære løsning, $y(t)$, der opfylder $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
6. (Eksamen April 2001) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = x$$

7. (Eksamen April 2001) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2 e^{-y}$$

8. (Eksamen April 2000)
   a. Bestem en funktion $h(x)$ som tilfredsstiller differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{y+1}$$

   og begyndelsesbetingelsen $h(1) = -3$.
   b. Angiv værdien af integralet

$$\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} x \sin(x^2)\, dx$$