Lektion 11
1. ordens lineære differentialligninger

- Lineære differentialligninger

- Lineære differentialligninger af 1. orden

  1. homogene

  2. inhomogene

- Lineære differentialligninger af 1. orden med konstante koefficienter

  1. homogene

  2. inhomogene

- 1-kammer modeller

Lineære differentialligninger

En sædvanlig differentialligning af formen

$$\begin{aligned} y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots \\ + a_{n-1}(x)y^{(1)}(x) + a_n(x)y(x) = b(x) \end{aligned}$$

kaldes en *$n$te orden lineær differentialligning*. (Vi skal kun se på $n = 1$ og $n = 2$.) Hvis $b(x) = 0$ har vi en *homogen* ligning, ellers en *inhomogen* ligning.

Den generelle løsning har formen

$$\boxed{y(x) = y_0(x) + c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x)}$$

hvor y_0 er en partikulær løsning, $c_1, \ldots, c_n$ er konstanter, og $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ er n godt valgte løsninger til den *tilhørende homogene ligning*. Vi vil ofte *gætte* den partikulære løsning $y_0(x)$ mens der vil være formler for de homogene løsninger $y_1(x), \ldots, y_n(x)$.

A. 1. ordens homogene ligninger

Den homogene lineære første ordens lineær differentialligning ser sådan ud

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$$

med et 0 på højresiden.

Den generelle løsning er

$$\boxed{y = Ce^{-P(x)}}$$

hvor $P(x) = \int p(x)\,dx$ er et integral til $p(x)$ og C er en konstant.

Ligningen er nemlig separabel, $dy/dx = -p(x)y$, så vi har:

$$\int -p(x)\,dx = \int \frac{1}{y}\,dy \Leftrightarrow B - P(x) = \ln|y|$$
$$\Leftrightarrow y = Ce^{-P(x)}$$

Eksempel 1 *Løs differentialligningen*

$$\frac{dy}{dx} + xy = 0$$

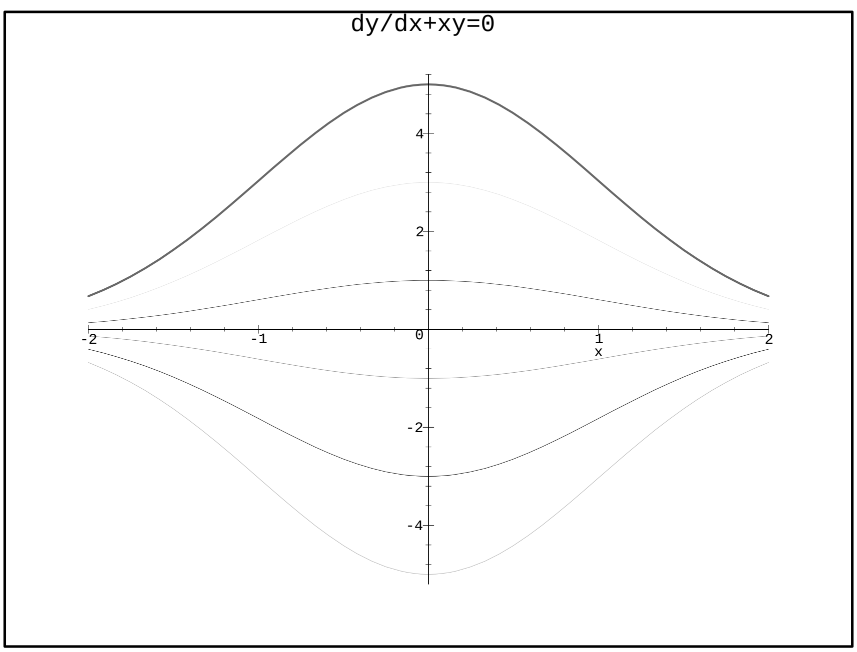
Find den løsning, der opfylder $y(0) = 5$.

Løsning: *Dette er en homogen første ordens lineær differentialligning med* $p(x) = x$. *Da* $P(x) = \int p(x)\,dx = \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2$ *er*

$$y = Ce^{-P(x)} = Ce^{-\frac{1}{2}x^2}$$

i dette tilfælde. Hvis $y(0) = 5$, *så er* $C = 5$ *og*

$$y = 5e^{-\frac{1}{2}x^2}$$



Eksempel 2 *Løs differentialligningen*

$$\frac{dy}{dx} + 10y\sin(5x) = 0$$

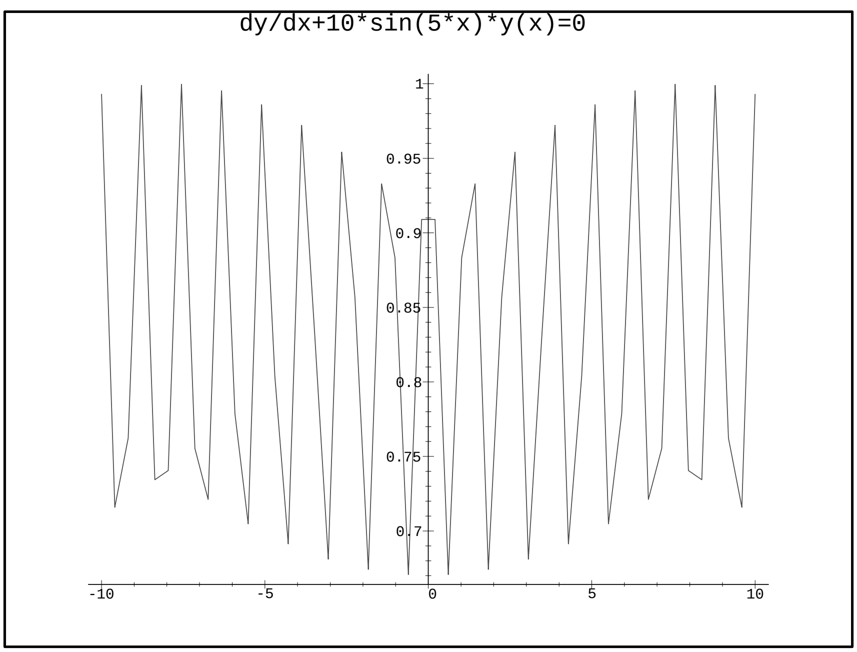
Find den løsning, der opfylder $y(0) = 1$.

Løsning: *Her er* $P(x) = \int 10\sin(5x)\,dx = -2\cos(5x)$ *så*

$$y = Ce^{2\cos(5x)}$$

Hvis $y(0) = 1$, *så er* $1 = Ce^2$ *og*

$$y = e^{-2}e^{2\cos(5x)} = e^{2(\cos(5x)-1)} = \left(e^{(\cos(5x)-1)}\right)^2$$



B. 1. ordens inhomogene ligninger

Den inhomogene første ordens lineære differentialligning ser sådan ud:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)$$

hvor højresiden ikke nødvendigvis er 0.

Løsningen er

$$\boxed{y = e^{-P(x)} \int e^{P(x)} f(x)\,dx + Ce^{-P(x)}}$$

$$P(x) = \int p(x)\,dx$$

Hvorfor? Lad os antage, at y er en løsning. Hvad kan vi sige om y? Vi har

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(e^{P(x)}y) &= p(x)e^{P(x)}y + e^{P(x)}\frac{dy}{dx} \\ &= p(x)e^{P(x)}y + e^{P(x)}(-p(x)y + f(x)) \\ &= e^{P(x)}f(x)\end{aligned}$$

og derfor er

$$e^{P(x)}y = \int e^{P(x)}f(x)\,dx$$

og vi finder y ved at gange med $e^{-P(x)}$ på begge sider.

Eksempel 3 *Løs* $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 1$ *for* $x > 0$.

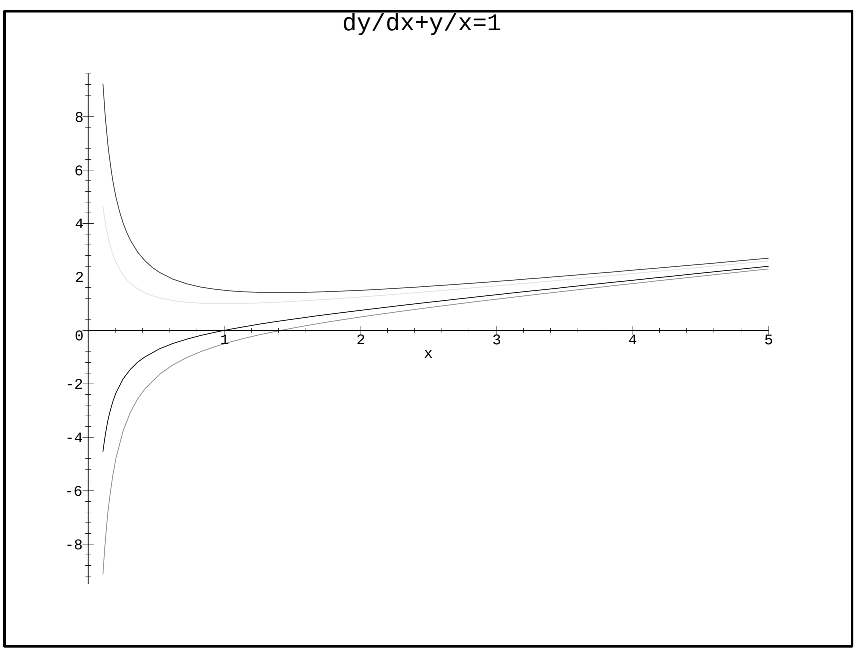
Løsning: *Dette er en første ordens lineær inhomogen differentialligning. Her er* $p(x) = \frac{1}{x}$ *og* $f(x) = 1$. *Da*

$$P(x) = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x \quad \textit{og}$$

$$e^{-P(x)} = e^{-\ln x} = \left(e^{\ln x}\right)^{-1} = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

bliver

$$y = \frac{1}{x}\int x \cdot 1\,dx = \frac{1}{x}\Big(\frac{1}{2}x^2 + C\Big) = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$$



Eksempel 4 *Løs differentialligningen*

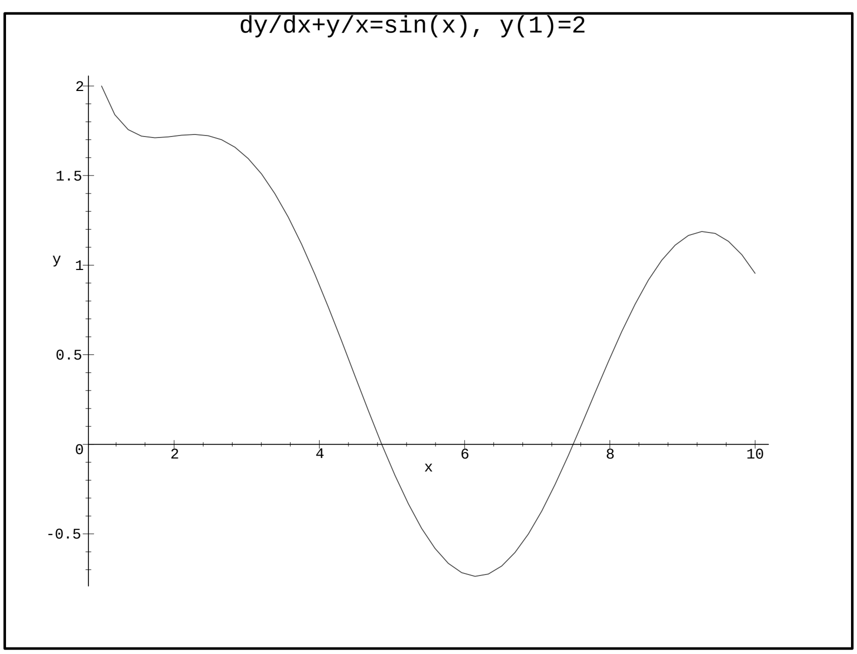
$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \sin x, \qquad x > 0$$

Find den løsningen med $y(1) = 2$.

Løsning: *Dette er en første ordens lineær inhomogen differentialligning med* $p(x) = \frac{1}{x}$ *som før, men nu er* $f(x) = \sin x$. *Derfor bliver*

$$y = \frac{1}{x}\int x \cdot \sin x \, dx = \frac{1}{x}\Big(-x\cos x + \int \cos x \, dx\Big)$$
$$= -\cos x + \frac{\sin x}{x} + \frac{C}{x}$$

Med $C = 2 + \cos(1) - \sin(1)$ *bliver* $y(1) = 2$.



C. 1. ordens inhomogene ligninger med konstante koefficienter

En første ordens lineær differentialligning med konstante koefficienter ser sådan ud:

$$\frac{dy}{dx} + ay = b$$

hvor $a \neq 0$ og b er konstanter.

Løsningen er

$$\boxed{y = \frac{b}{a} + Ce^{-ax}}$$

hvor $C = y_0 - \frac{b}{a}$.

Den generelle formel siger

$$y = e^{-ax} \int be^{ax}\, dx = e^{-ax}\Big(\frac{b}{a}e^{ax} + C\Big)$$
$$= \frac{b}{a} + Ce^{-ax}$$

Eksempel 5 *Løs differentialligningen*

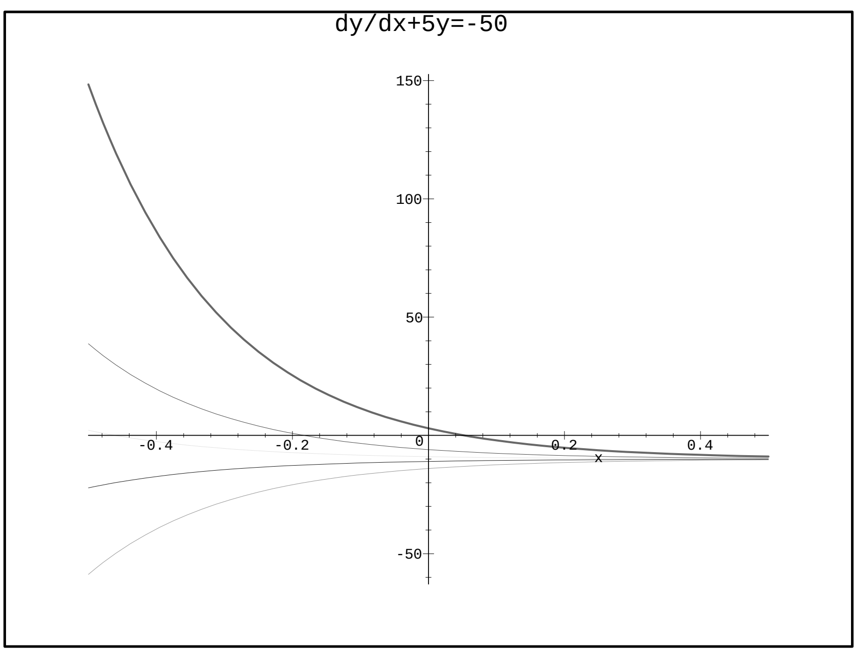
$$\frac{dy}{dx} + 5y = -50$$

Find den løsning, der opfylder $y(0) = 3$.

Løsning: *Dette er en inhomogen første ordens lineær differentialligning med konstante koefficienter* $a = 5$ *og* $b = -50$. *Derfor er den generelle løsning*

$$y(x) = -10 + Ce^{-5x}$$

For at få den partikulære løsning med $y(0) = 3$ *skal vi vælge* $C = 3 + 10 = 13$, *så* $y(x) = -10 + 13e^{-5x}$.



Eksempel 6 *Løs differentialligningen*

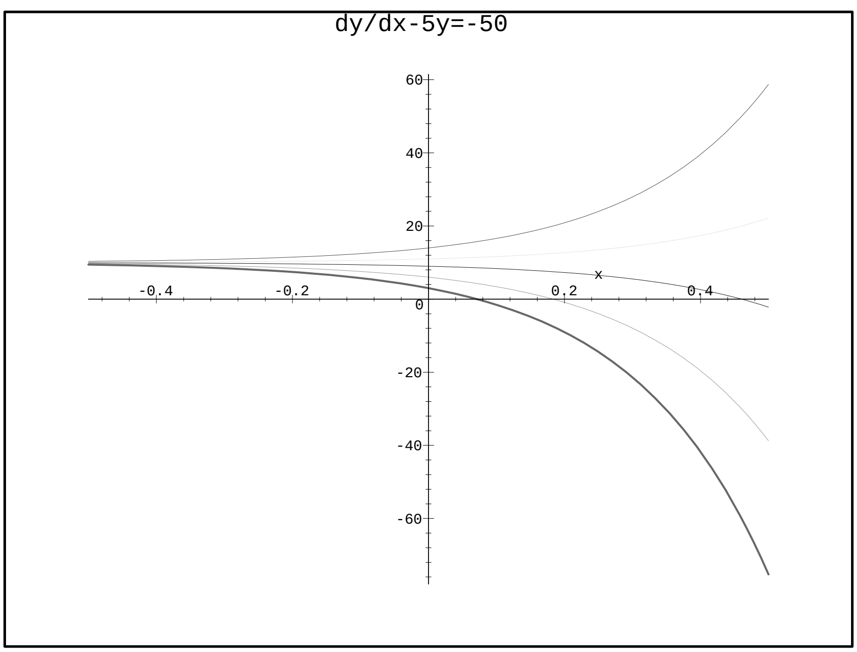
$$\frac{dy}{dx} - 5y = -50$$

Find den løsning, der opfylder $y(0) = 3$.

Løsning: *Dette er en inhomogen første ordens lineær differentialligning med konstante koefficienter* $a = -5$ *og* $b = -50$. *Derfor er den generelle løsning*

$$y(x) = 10 + Ce^{5x}$$

For at få den partikulære løsning med $y(0) = 3$ *skal vi vælge* $C = 3 - 10 = -7$, *så* $y(x) = 10 - 7e^{5x}$.



1-**kammer modeller**

I biologi bruges ligningen $dy/dx = b - ay$ ofte til at beskrive dynamikken i en *1-kammer model*:

$$\xrightarrow{\quad b \quad} \boxed{y} \xrightarrow{\quad ay \quad}$$

hvor noget tilføres en beholder med konstant hastighed og fjernes fra beholderen med en hastighed proportional med den indholdet af y i beholderen.

Tænk feks. på en hullet beholder under en vandhane.

Eksempel 7 *Et stof injiceres i blodet med konstant tilførsel r. Kroppens organer udskiller stoffet med en hastighed proportional med koncentrationen $Q(t)$ af stoffet i blodet. Hvordan udvikler $Q(t)$ sig?*

$$\xrightarrow{\quad r \quad} \boxed{Q} \xrightarrow{\quad cQ \quad}$$

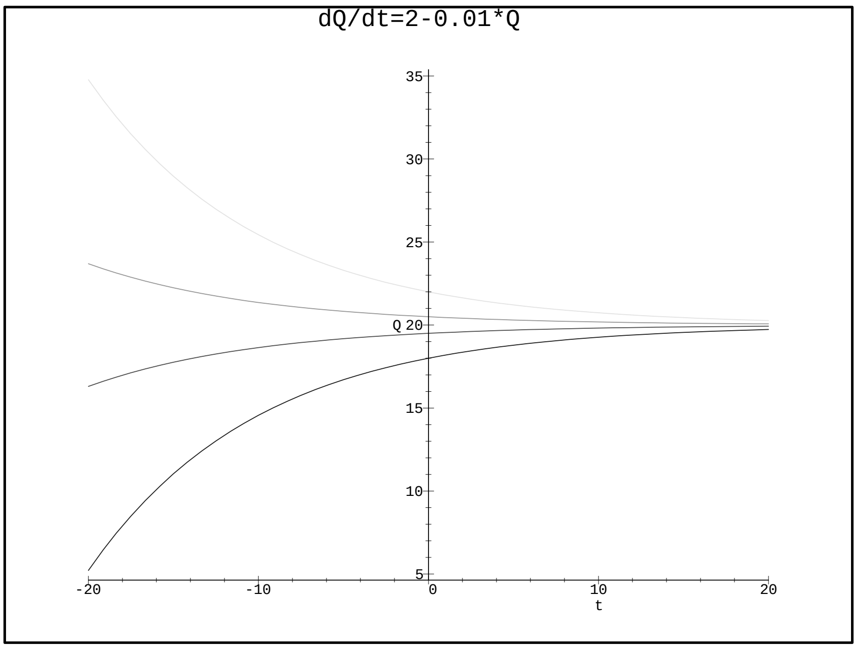
Løsning: *Koncentrationen $Q(t)$ opfylder differentialligningen*

$$\frac{dQ}{dt} = r - cQ$$

med konstante koefficienter. Løsningen er derfor:

$$\boxed{Q(t) = \frac{r}{c} + \Big(Q_0 - \frac{r}{c}\Big)e^{-ct}}$$

hvor Q_0 er koncentrationen til tiden $t = 0$.



Koncentrationen vil, uanset startværdien, stabiliseres omkring $\frac{r}{c}$ *over lang tid.*

Eksempel 8 *Et akvarium med* $1000\ \ell$ *vand gennemstrømmes af vand med en konstant fart på 2 l i minuttet. Til tiden* $t = 0$ *in-*
im
deholder akvariet 800 mg PCB. Det indstrømmende vand indeholder $\frac{5}{100}$ *mg/*ℓ *PCB. Hvornår er PCB-indholdet i akvariet nede på 200 mg?*

Løsning: *Akvariet indeholder* $Q(t)$ *mg PCB hvor*

$$\frac{dQ}{dt} = 2 \cdot \frac{5}{100} - \frac{2}{1000}Q = \frac{1}{10} - \frac{1}{500}Q$$

og $Q(0) = 800$*. Dette er en lineær differentialligning med konstante koefficienter* $a = \frac{1}{500}$ *og* $b = \frac{1}{10}$*. Da* $\frac{a}{b} = 50$ *bliver*

$$\begin{aligned} Q(t) &= 50 + (800 - 50)\exp(-\frac{1}{500}t) \\ &= 50 + 750\exp(-\frac{1}{500}t) \end{aligned}$$

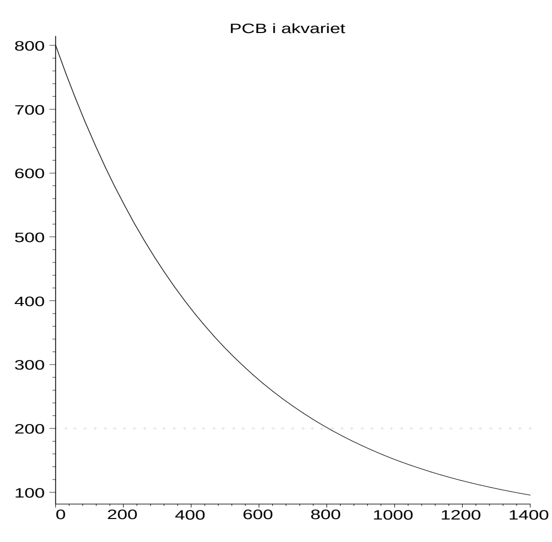
ifølge løsningsformlen.

$$\xrightarrow{2\cdot\frac{5}{100}} \boxed{Q(t)} \xrightarrow{2\cdot\frac{1}{1000}Q(t)}$$

Vi beregner nu hvor denne funktion antager værdien 200:

$$
\begin{aligned}
Q(t) &= 200 \\
&\Leftrightarrow 750\,\exp(-\frac{1}{500}t) = 150 \\
&\Leftrightarrow \exp(-\frac{1}{500}t) = \frac{1}{5} \\
&\Leftrightarrow -\frac{1}{500}t = -\ln(5) \\
&\Leftrightarrow t = 500 \cdot \ln(5)
\end{aligned}
$$

Det tager altså $500 \cdot \ln(5)$, eller ca 805 minutter før PCB-mængden er faldet fra 800 mg til 100 mg.



Eksempel 9 *Samme situation som før bortset fra at akvariet nu drænes med kun 1 ℓ/min så vandmængden stiger. Beskriv indholdet af PCB til tiden t.*

Løsning: *Akvariet indeholder* $1000+t\ell$ *vand og* $Q(t)$ *mg PCB til tiden* t. *Udviklingen beskrives af differentialligningen*

$$Q'(t) = 2 \cdot \frac{5}{100} - \frac{Q(t)}{1000+t}$$

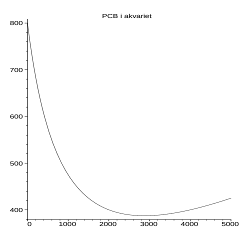
Det er en 1.*ordens lineær inhomogen differentialligning med* $p(t) = \frac{1}{1000+t}$ *og* $f(t) = \frac{1}{10}$. *Den generelle løsning er*

$$Q(t) = \frac{1}{1000+t} \int \frac{1000+t}{10} \mathrm{dt} = \frac{100t + \frac{1}{20}t^2 + C}{1000+t}$$

og den partikulære løsning med $Q(0) = 800$ *er*

$$Q(t) = \frac{100t + \frac{1}{20}t^2 + 800000}{1000+t}$$

$$\xrightarrow{2\cdot\frac{5}{100}} \boxed{Q(t)} \xrightarrow{\frac{1}{1000+t}Q(t)}$$


PCB i akvariet
800
700
600
500
400
0
1000
2000
3000
4000
5000
t

Opgaver til Lektion 11

1. Løs begyndelsesværdiproblemet $\frac{dy}{dx} - y = \frac{11}{8}e^{-x/3}$, $y(0) = 0$.
2. Løs begyndelsesværdiproblemet $\frac{dy}{dx} + y = 2$, $y(0) = 0$.
3. Løs begyndelsesværdiproblemet $x^2\frac{dy}{dx} + xy = \sin(x)$, $y(1) = 0$.
4. En beholder indeholder 1000 ℓ vand. Der er opløst 100 kg salt i vandet. Rent vand pumpes ind i beholderen med en fart på 5 ℓ/s og blandingen pumpes ud med samme fart. Hvor længe varer det før der kun er 10 kg salt i beholderen?
5. En beholder indeholder 60 ℓ rent ferskvand. Saltvand i koncentrationen 1 g/ℓ pumpes ind i beholderen med 2 ℓ/min og blandingen pumpes ud med 3 ℓ/min. Beholderen er altså tom efter 60 minutter.
   a. Find mængden af salt i beholderen efter t minutter.
   b. Hvad er den maksimale mængde salt som beholderen indeholder i løbet af de 60 minutter.
6. En jernbanevogn triller ind i en oversvømmet (vandret) tunnel. Vi antager at den modstand som vandet yder er proportonal med farten $v(t)$. Newtons anden lov siger da at $\frac{dv}{dt} = -kv$ hvor k en en konstant.
   a. Vis at jernbanevognens fart er

$$v(t) = v_0 e^{-kt}$$

   og at dens position er

$$x(t) = x_0 + \left(\frac{v_0}{k}\right)(1 - e^{-kt})$$

   b. Gør rede for at jernbanevognen kun vil trille et endeligt stykke og find det stykke.
7. (Eksamen Januar 2000) Et aktivt stof modvirker hovedpine. Efter indtagelsen nedbrydes det i organismen efter følgende differentialligning:

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{\ln 2}{12}Q$$

   hvor $Q(t)$ er mængden af stof til tiden t efter indtagelsen.
   a. Angiv stoffets halveringstid.

b. En hovedpinepille indeholder 6 mg af det aktive stof. En patient indtager en pille kl. 6, kl. 12, kl. 18 og kl. 24. Hvor meget aktivt stof indeholder patienten næste morgen kl. 6?

c. Antag at den samme mængde aktivt stof i stedet var giver intravenøst over et døgn, altså med en konstant hastighed af 1 mg stof i timen. Hvor meget aktivt stof ville patienten da indeholde efter 24 timer?