Alberto Santini

L'Assioma di Martin

Tesi di Laurea

Università di Catania,
Dipartimento di Matematica ed Informatica.
Relatore: Prof. Angelo Bella

Indice

CAPITOLO 1

Introduzione

Kurt Gödel [4] e Paul Cohen [1] dimostrarono che l'ipotesi del continuo (CH) non può essere nè provata nè confutata nella teoria assiomatica ZFC (Zermelo-Fraenkel con assioma della scelta). Pertanto, sono sorte numerose domande riguardo ad ipotetici cardinali $\kappa : \omega < \kappa < 2^\omega$ e si è aperto un intero filone di ricerca in teoria degli insiemi senza l'ipotesi del continuo ($\neg CH$). L'Assioma di Martin (MA) è uno dei principali risultati ottenuti in questo senso. MA segue da CH, quindi se si ammette l'ipotesi del continuo, non aggiunge niente di nuovo alla teoria; tuttavia, è stato provato [2] che MA è consistente anche con $\neg CH$ ed è proprio in questo caso che assume un grande rilievo.

L'enunciato originale di MA è puramente topologico ed afferma che nessuno spazio di Hausdorff compatto con la condizione delle catene numerabili (countable chain condition, c.c.c.) è unione di un numero $< 2^\omega$ di insiemi chiusi e mai densi. Questo enunciato, nonostante sia di facile comprensione, risulta di difficile applicazione e pertanto noi useremo una versione equivalente, espressa in termini di ordini parziali e filtri.

Dopo aver introdotto tutti gli strumenti che saranno necessari per il nostro lavoro (poset, filtri, Δ-system, algebre di Boole, etc.), presenteremo MA ed alcune sue proprietà; in particolare ci soffermeremo su alcuni problemi che sorgono quasi spontaneamente quando si lavora in $\neg CH$ e mostreremo che MA conserva la maggior parte delle buone proprietà che avremmo in CH. In seguito torneremo a lavorare sull'aspetto topologico dell'assioma, dando un analogo del teorema di Тихонов per la compattezza del prodotto di spazi compatti e forniremo delle condizioni *di rilassamento*, mostrando che anche restringendo MA a particolari poset o algebre di Boole, esso continua a valere. Infine analizzeremo brevente la relazione tra MA ed un'altro importante enunciato della teoria degli insiemi: l'ipotesi di Souslin.

CAPITOLO 2

Concetti preliminari

Introduciamo brevemente alcuni concetti preliminari, utili alla comprensione del resto del nostro lavoro.

2.1 Poset

Definizione 2.1. Insieme parzialmente ordinato

Si dice insieme parzialmente ordinato (o poset) una coppia $(P, \leq)$ tale che:

(i) $P \neq \emptyset$

(ii) $\leq$ è una relazione transitiva: $\forall p, q, r \in P \ (p \leq q \wedge q \leq r \Rightarrow p \leq r)$

(iii) $\leq$ è una relazione riflessiva: $\forall p \in P \ (p \leq p)$

(iv) $\leq$ è una relazione antisimmetrica: $\forall p, q \in P \ (p \leq q \wedge q \leq p \Rightarrow p = q)$

Si può poi definire la relazione $<$ su P, con $p < q \Leftrightarrow p \leq q \wedge p \neq q$. Se $p \leq q$ si dice spesso che p estende q.

Definizione 2.2. Insieme totalmente ordinato

Un poset $(P, \leq)$ si dice totalmente ordinato (o linearmente ordinato) se:

$$\forall p, q \in P \; p \leq q \; \vee \; q \leq p$$

Definizione 2.3. Insieme ben ordinato

Un insieme totalmente ordinato $(P, \leq)$ si dice ben ordinato se

$$\forall Q \subseteq P \; Q \neq \emptyset \; \Rightarrow \; \exists q \in Q \; : \; \forall r \in Q \; q \leq r$$

Definizione 2.4. Catene ed anticatene

Dato un poset $(P, \leq)$, si dice catena un insieme $C \subset P$ i cui elementi sono tutti confrontabili, ovvero tale che:

$$\forall p, q \in C \; (p \leq q \vee q \leq p)$$

Due elementi $p, q \in P$ si dicono compatibili se:

$$\exists r \in C \; (r \leq p \wedge r \leq q)$$

mentre si dicono incompatibili (e si scrive $p \perp q$) se non sono compatibili. Allora, si dice anticatena un insieme $A \subset P$ i cui elementi sono tutti incompatibili, ovvero tale che:

$$\forall p, q \in A \; (p \neq q \Rightarrow p \perp q)$$

Definizione 2.5. Condizione delle catene numerabili o c.c.c.

Si dice che un poset $(P, \leq)$ ha la condizione delle catene numerabili, c.c.c., se tutte le sue anticatene sono al piú numerabili.

Definizione 2.6. Insieme denso

Dato un poset $(P, \leq)$, un insieme $D \subset P$ si dice denso in P se:

$$\forall p \in P \; \exists d \in D \; : \; d \leq p$$

Definizione 2.7. Filtro

Dato un poset $(P, \leq)$, un insieme $G \subset P$ si dice un filtro se:

(i) $\forall g, h \in G \; \exists r \in G \; (r \leq g \wedge r \leq h)$

(ii) $\forall g \in G \; \forall p \in P \; (g \leq p \Rightarrow p \in G)$

Definizione 2.8. Segmento proprio

Dato un poset $(P, \leq)$ ed un elemento $p \in P$, si definisce segmento proprio di p:

$$P_p = \{q \in P \mid q \leq p\}$$

2.2 Insiemi quasi disgiunti e Δ-system

Definizione 2.9. Insiemi quasi disgiunti

Dato un cardinale infinito κ, due insiemi $x, y \subset \kappa$ si dicono quasi disgiunti se $|x \cap y| < \kappa$. Una famiglia di insiemi $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(\kappa)$ si dice quasi disgiunta se tutti i suoi elementi sono a due a due quasi disgiunti e se $\forall x \in \mathscr{A} \; |x| = \kappa$.

Definizione 2.10. Δ-system

Una famiglia $\mathcal{F}$ di insiemi si dice essere un Δ-system (o una famiglia quasi disgiunta) se

$$\exists r \; (\forall a, b \in \mathcal{F} \; (a \cap b = r))$$

Teorema 2.11. *Data $\mathcal{A}$, famiglia piú che numerabile di insiemi finiti, ne esiste una sottofamiglia $\mathcal{B}$ piú che numerabile che forma un Δ-system.*

Dimostrazione. Dal momento che $|\mathcal{A}| = \omega_1$ e $\forall x \in \mathcal{A} \; (|x| < \omega)$, segue che deve esistere un $n < \omega$ tale che una quantità piú che numerabile di inisemi della famiglia abbia cardinalità n:

$$\exists \mathcal{A}' = \{A_\alpha \mid |A_\alpha| = n \;\wedge\; \alpha < \omega_1\} \subseteq \mathcal{A}$$

Dimostriamo il teorema per induzione transfinita su n, limitandoci alla famiglia $\mathcal{A}'$:

Base induttiva

Se $n = 1$ vuol dire che $\forall x, y \in \mathcal{A}' \ (x \neq y \Rightarrow x \cap y = \emptyset)$ e quindi $\mathcal{A}'$ stessa è un Δ-system, di radice $\emptyset$.

Ipotesi induttiva

Suppongo vero il teorema per $n - 1$.

Passo induttivo

Si possono allora presentare due casi:

(i) Se c'è un elemento che è contenuto in una quantità piú che numerabile di insiemi di $\mathcal{A}'$, ovvero

$$\exists x \ (|\mathcal{A}'_x = \{A_\alpha \mid x \in A_\alpha\}| = \omega_1)$$

posso considerare la famiglia

$$\mathcal{A}'' = \{A_\alpha - \{x\} \ , \ \forall A_\alpha \in \mathcal{A}'_x\}$$

Tale famiglia rientra nell'ipotesi induttiva e quindi

$$\exists \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{A}'' \ \Delta\text{-system} \ (|\mathcal{B}'| = \omega_1)$$

Allora il Δ-system cercato sarà $\mathcal{B} = \{B_\alpha \cup \{x\}, \ \forall B_\alpha \in \mathcal{B}'\}$.

(ii) Se un tale elemento non esiste, posso costruire il Δ-system per ricorsione transfinita:

(a) A_0 è un qualsiasi insieme di $\mathcal{A}'$

(b) $\forall \beta < \omega_1$ osservo che poiché β è numerabile, anche $\bigcup_{\alpha<\beta} A_\alpha$ lo è. Ma, per l'ipotesi fatta, per cui un elemento contenuto in una quantità piú che numerabile di insiemi di $\mathcal{A}'$ non esiste, so che ogni elemento di $\bigcup_{\alpha<\beta} A_\alpha$ è contenuto in una quantità al piú numerabile di insiemi di $\mathcal{A}'$. Posso allora scegliere, come A_β uno qualsiasi dei piú che numerabili insiemi di $\mathcal{A}' - \bigcup_{\alpha<\beta} A_\alpha$.

Alla fine, avrò creato un Δ-system piú che numerabile, di radice $\emptyset$.

□

Osservazione 2.12. ***(Δ-system lemma)*** *Del teorema precedente, esiste la generalizzazione seguente: dato un cardinale infinito κ ed un ordinale regolare $\theta > \kappa$ tale che $\forall \alpha < \theta$ $(|\alpha^{\cdot\kappa}| < \theta)$. Data una famiglia $\mathcal{A}$, con $|\mathcal{A}| \geq \theta$ e tale che $\forall x \in \mathcal{A}$ $(|x| < \kappa)$, allora esiste un Δ-system $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, con $|\mathcal{B}| = \theta$.*[1]

Esempio 2.13. L'ipotesi sulla regolarità di θ non può essere tolta. Ad esempio, se $|\mathcal{A}| = \omega_\omega$, non esiste un Δ-system $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ della stessa cardinalità.

Dimostrazione. Infatti, dal momento che $cf(\omega_\omega) = \omega$, si ha che

$$\exists I \ (|I| = \omega \ \wedge \ \omega_\omega = \bigcup_{i \in I} \alpha_i)$$

Con gli $\alpha_i < \omega_\omega$. Allora, come famiglia $\mathcal{A}$ posso prendere la seguente:

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} A_i$$

Dove $A_i = \{\{x, i\}, \ \forall x \in \alpha_i\}$. Ora, per costruzione, gli unici Δ-system di $\mathcal{A}$ possono essere o sottoinsiemi di un A_i fissato (e, in questo caso, hanno radice $\{i\}$) oppure insiemi che hanno un solo elemento in ogni A_i (e, in tal caso, hanno radice $\emptyset$). Nel primo caso la loro cardinalità è $< \alpha_i < \omega_\omega$, e nel secondo caso è $= |I| = \omega < \omega_\omega$. □

2.3 Algebre di Boole

Definizione 2.14. Algebra di Boole

Un'algebra di Boole è una sestupla $\mathscr{B} = (B, \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$, con:

[1] Per una prova, si veda [5, §2.1.]

(i) $B \neq \emptyset$; $\wedge, \vee$ operazioni binarie su B; $\neg$ operazione unaria su B; $0, 1 \in B$

(ii) $\forall a, b, c \in B\ (a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c,\ a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c)$

(iii) $\forall a, b \in B\ (a \wedge b = b \wedge a,\ a \vee b = b \vee a)$

(iv) $\forall a, b \in B\ (a \wedge (a \vee b) = a,\ a \vee (a \wedge b) = a)$

(v) $\forall a, b, c \in B\ (a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c),\ a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c))$

(vi) $\forall a \in B\ (a \wedge \neg a = 0,\ a \vee \neg a = 1)$

Definizione 2.15. Algebra di Boole completa

Un'algebra di Boole $\mathscr{B} = (B, \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$ si dice completa se

$$\forall S \subseteq B\ (\exists \bigwedge S, \bigvee S)$$

Definizione 2.16. Anticatene di un'algebra di Boole

Si chiama anticatena di $\mathscr{B}$, con un abuso di notazione, un insieme $A \subseteq B - \{0\}$ tale che

$$\forall a, b \in A\ (a \neq b \ \Rightarrow\ a \wedge b = 0)$$

Analogamente a quanto visto per i poset, anche le algebre di boole possono godere della c.c.c., se tutte le loro anticatene sono al piú numerabili.

Definizione 2.17. Algebre su uno spazio topologico

Dato uno spazio topologico X, si definisce algebra di Boole aperta regolare su X, e si denota con $ro(X)$, l'algebra che ha come elementi tutti gli insiemi aperti regolari $b \subseteq X$, come operazioni $b \wedge c = b \cap c$ e $b \vee c = \text{int cl}(b \cup c)$, come complementare $\neg b = \text{int}(X - b)$, ordinata dalla relazione $\subseteq$. Si può provare che tale algebra risulta completa e

$$\forall S \subset ro(X)\ (\bigwedge S = \text{int} \bigcap S, \bigvee S = \text{int cl} \bigcup S)$$

CAPITOLO 3

Assioma di Martin

3.1 Definizione e primi risultati

Definizione 3.1. Assioma di Martin

Si pone $MA(\kappa)$ la proposizione: dato un poset $(P, \leq)$ con la c.c.c. ed una famiglia $\mathscr{D}$ formata da un numero $\leq \kappa$ di sottoinsiemi densi di P, esiste un filtro G di P tale che $\forall D \in \mathscr{D}\ (G \cap D \neq \emptyset)$.

Si pone MA la proposizione: $\forall \kappa < 2^\omega\ (MA(\kappa))$.

Osservazione 3.2. *Dalla definizione segue subito che* $\kappa < \lambda \Rightarrow (MA(\kappa) \Rightarrow MA(\lambda))$.

Esempio 3.3. L'assioma non vale per $\kappa = 2^\omega$

Dimostrazione. Considero l'insieme delle funzioni parziali da ω in 2, ovvero funzioni a valori 0 o 1, il cui dominio sia contenuto propriamente in ω:

$$P = \{p \subset \omega \times 2 \mid |p| < \omega \wedge p \text{ è una funzione}\}$$

In questo caso, la relazione d'ordine è semplicemente $p \leq q \Leftrightarrow p \supseteq q$. P ha la c.c.c., in quanto $|P| = \omega$; la definizione di compatibilità coincide con quella classica sulle funzioni, ovvero p, q sono compatibili se $p_x = q_x \ \forall x \in (dom(p) \cap dom(q))$. Inoltre, dal momento che l'unione di un sistema di funzioni compatibili è una funzione, dato un filtro G di P, ho che $f = \bigcup G$ è una funzione.
Intuitivamente una $p \in P$ può essere pensata come un'approssimazione finita di f, ovvero (nel caso in cui $p \in G$) ci dice come f si comporta in $dom(p)$; in tal caso, se q estende p (ovvero $q \leq p$), q ci dice di più su f di quanto non ci dica p.
Ora, in MA abbiamo l'ipotesi di densità. Il perché si capisce bene da questo esempio, infatti in tal modo evitiamo che $dom(f)$ sia troppo piccolo (in teoria avremmo potuto prendere $G = \emptyset$ e quindi $f = \bigcup \emptyset = \emptyset$) e quindi rendiamo f abbastanza generica. Per raggiungere questo scopo, prendiamo i sottoinsiemi densi in questo modo:

$$D_n = \{p \in P \mid n \in dom(p)\}$$

Ovvero D_n contiene tutte le funzioni che sono definite in n. Chiaramente D_n è denso, perché qualsiasi funzione può essere estesa fino a che il suo dominio non comprenda anche n.
MA richiede infine che $\forall n \in \omega \ (G \cap D_n \neq \emptyset)$, ovvero non ci sono $n \in \omega$ in cui non sia definita qualche funzione di G e ciò, in definitiva, vuol dire che $dom(f) = \omega$.
Una proprietà interessante che potremmo richiedere ad f è che non sia "*prevedibile*", ovvero non sia uguale a nessuna funzione data a priori. Ciò vuol dire, che data una $h : \omega \to 2$, considero l'insieme:

$$E_h = \{p \in P \mid \exists n \in dom(p) \ (p_n \neq h_n)\}$$

Ovvero l'insieme delle funzioni diverse da h e pongo che sia $G \cap E_h \neq \emptyset$, ovvero che in G ci siano tali funzioni e quindi che sia $f \neq h$. Chiaramente E_h è denso perché ogni funzione uguale ad h può essere estesa in una diversa da h e quindi siamo ancora nelle ipotesi di MA.

A questo punto consideriamo $\mathscr{D} = \{D_n \mid n \in \omega\} \cup \{E_h \mid h \in 2^\omega\}$. Chiaramente $|\mathscr{D}| = 2^\omega$. Allora, se valesse $MA(2^\omega)$ esisterebbe effetivamente un filtro G tale che $\forall D \in \mathscr{D}\ (G \cap D \neq \emptyset)$; ma allora $f = \bigcup G$ sarebbe una funzione $\omega \to 2$ diversa da tutte le funzioni $\omega \to 2$, che è un assurdo. □

Teorema 3.4. *L'assioma vale per $\kappa = \omega$*

Dimostrazione. In questo caso, $\mathscr{D}$ è una famiglia al più numerabile di insiemi densi: $\mathscr{D} = \{D_n \mid n \in \omega\}$. Allora $P = \{p_n\}$ può essere ordinato per ricorsione:

(i) p_0 è un qualsiasi elemento di P (che esiste perché per ipotesi $P \neq \emptyset$)

(ii) p_{n+1} è una qualsiasi estensione di p_n, con $p_{n+1} \in D_n$ (che esiste perché D_n è denso)

Quindi gli elementi di P sono ordinati secondo i loro indici: $p_0 \geq p_1 \geq \ldots$. Allora il filtro G della tesi è il filtro generato dai p_n, ovvero:

$$G = \{q \in P \mid \exists n \in \omega\ (q \geq p_n)\}$$

(Il fatto che $\forall n\ (G \cap D_n \neq \emptyset)$ deriva banalmente dal fatto che tutti i p_{n+1} stanno in un D_n.) □

Osservazione 3.5. *Dal Teorema 3.4 si nota subito che MA ha bisogno dell'assioma della scelta per essere vero per ω, in quanto sfrutta il Teorema di ricorsione. Inoltre, la dimostrazione di questo lemma non ha sfruttato il fatto che per P vale la c.c.c.; si potrebbe, allora, pensare che questa è un'ipotesi superflua. L'esempio seguente dimostra che non è cosí, se consideriamo cardinali $\kappa > \omega$.*

Esempio 3.6. L'ipotesi "P c.c.c." non è superflua, se $\kappa > \omega$

Dimostrazione. Sia P l'insieme delle funzioni parziali da ω in ω_1, ovvero:

$$P = \{p \subset \omega \times \omega_1 \mid |p| < \omega \wedge p \text{ è una funzione}\}$$

Come nell'Esempio 3.3, dato un filtro G, ho che $f = \bigcup G$ è una funzione, con $dom(f) \subset \omega$ e $ran(f) \subset \omega_1$. Allora, definisco $\forall \alpha < \omega_1$ l'insieme:

$$D_\alpha = \{p \in P \mid \alpha \in ran(p)\}$$

Ovvero l'insieme di tutte le funzioni che valgono α per qualche valore di p. Chiaramente D_α è denso (ogni funzione si può estendere in una che valga α per qualche p). Tuttavia, non è possibile che esista un filtro G tale che $\forall \alpha < \omega_1$ $(G \cap \alpha \neq \emptyset)$, perché altrimenti risulterebbe $ran(f) = \omega_1$ (in contrasto con il fatto che $ran(f) \subset \omega_1$ come notato prima e che deriva dal teorema che asserisce che $|f[A]| \leq |A|$ per ogni insieme A ed ogni funzione f).
Osserviamo infine che in questo caso P è, come volevamo dimostrare, non-c.c.c.; ad esempio, le funzioni costanti formano un'anticatena di cardinalità ω_1. $\square$

3.2 Alcuni problemi posti dall'introduzione di MA

Se si nega l'ipotesi del continuo (CH o GCH nel caso generalizzato), ma si assume MA, ci si può chiedere se alcuni dei risultati che in precedenza erano stati dimostrati mediante l'impiego di CH siano ancora validi. Ad esempio, si pongono i seguenti problemi: dato $\kappa < 2^\omega$ infinito,

Problema 1

È ancora impossibile che una famiglia quasi disgiunta $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(\omega)$ di cardinalità κ sia massimale?

Problema 2

Accade che $2^\kappa = 2^\omega$?

Problema 3

Ogni successione convergente di funzioni reali definite su un insieme di cardinalità κ si può trasformare in una uniformemente convergente, restringendo non banalmente le funzioni?

Problema 4

Ogni funzione reale definita su un insieme di cardinalità κ si può restringere non banalmente ad una continua?

Problema 5

L'unione di κ sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ di prima categoria è ancora di prima categoria?

Problema 6

L'unione di κ sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ di misura di Lesbegue nulla ha ancora misura di Lebesgue nulla?

3.2.1 Problema 1

Definizione 3.7. Ordine parziale di insiemi quasi disgiunti

Cerchiamo un modo per descrivere un insieme $d \subset \omega$, attraverso delle condizioni di appartenenza indotte da una famiglia di sottoinsiemi di ω e di famiglie di $\mathcal{P}(\omega)$.
Dato $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(\omega)$, definiamo ordine parziale di insiemi quasi disgiunti l'insieme:

$$P_{\mathscr{A}} = \{(s, F) \mid s \subset \omega \wedge F \subset \mathcal{P}(\omega) \wedge |s|, |F| < \omega\}$$

Gli (s, F) ci serviranno per descrivere insiemi $d \subset \omega$ tali che:

(i) $s \subset d$

(ii) $\forall x \in F \quad x \cap d \subset s$, ovvero d può intersecare gli insiemi della famiglia F solo nel suo "*nucleo*" s. Ciò si può anche scrivere come $n \in x - s$ per qualche $x \in F \Rightarrow n \notin d$, ovvero in d non ci possono stare quei numeri di x che non sono più piccoli di s.

L'ordine parziale che si definisce tra gli (s, F) è:

$$(s', F') \leq (s, F) \Leftrightarrow \begin{cases} s \subseteq s' \\ F \subseteq F' \\ \forall x \in F \ x \cap s' \subseteq s \end{cases}$$

Ovvero (s', F') estende (s, F) se espande s ed F ed inoltre se è tale che ogni numero di cui (s, F) escludeva l'appartenenza a d non viene incluso da (s', F'). Infatti la terza condizione si può scrivere anche come $n \in x - s$ per qualche $x \in F \Rightarrow n \notin s'$.

Lemma 3.8. $(s_1, F_1), (s_2, F_2)$ *compatibili* $\Leftrightarrow$ $(\forall x \in F_1\ (x \cap s_2 \subseteq s_1)) \wedge (\forall x \in F_2\ (x \cap s_1 \subseteq s_2))$.

Dimostrazione. La tesi segue immediatamente dalla definizione di $\leq$ e vuole praticamente dire che nessun numero la cui esclusione da d è indotta da una delle due coppie può essere incluso dall'altra. In particolare, l'estenzione comune è $(s_1 \cup s_2, F_1 \cup F_2)$. $\square$

Definizione 3.9. d_G

Dato un filtro G di $P_{\mathscr{A}}$, si pone:

$$d_G = \bigcup \{s \subset \omega \mid \exists F \subset \mathcal{P}(\omega)\ ((s, F) \in G)\}$$

Lemma 3.10. *Se G è un filtro di $P_{\mathscr{A}}$ e $(s, F) \in G$, allora $\forall x \in F\ (x \cap d_G \subset s)$.*

Dimostrazione. Voglio provare che $\forall (s', F') \in G\ (\forall x \in F\ (x \cap s' \subset s))$. Ma poiché G è un filtro, tutti i suoi elementi sono compatibili e quindi la tesi discende direttamente dal Lemma 3.8. $\square$

Definizione 3.11. D_x

Dato $x \in \mathscr{A}$, si pone:

$$D_x = \{(s, F) \in P_{\mathscr{A}} \mid x \in F\}$$

Lemma 3.12. *Se G è un filtro di $P_{\mathscr{A}}$ e $G \cap D_x \neq \emptyset$, allora $|x \cap d_G| < \omega$.*

Dimostrazione. Infatti, per il Lemma 3.10, $x \cap d_G \subset s$ e $|s| < \omega$ per definizione. $\square$

Lemma 3.13. *Se $x \in \mathscr{A}$, allora D_x è denso in $P_{\mathscr{A}}$.*

Dimostrazione. Infatti se $x \in \mathscr{A}$, data qualsiasi $(s, F) \in P_{\mathscr{A}}$, ho che anche $(s, F \cup \{x\}) \in P_{\mathscr{A}}$ e ovviamente $(s, F \cup \{x\}) \leq (s, F)$. $\square$

Lemma 3.14. *$P_{\mathscr{A}}$ ha la c.c.c.*

Dimostrazione. Se per assurdo esistesse un'anticatena non numerabile $\{(s_\alpha, F_\alpha) \mid \alpha < \omega_1\}$, per il Lemma 3.8 gli s_α dovrebbero essere tutti distinti, il che è assurdo perché $\forall \alpha \ (|s_\alpha| < \omega)$ per definizione. □

Osservazione 3.15. *Se $|\mathscr{A}| < \kappa$ e vale $MA(\kappa)$, la condizione $G \cap D_x \neq \emptyset$ è vera per ogni $x \in \mathscr{A}$. Ne segue, per il Lemma 3.10, che d_G è quasi disgiunto da ogni elemento di $\mathscr{A}$. Tuttavia, d_G potrebbe essere finito (addirittura vuoto). Ad esempio, se $\exists F \subset \mathscr{A}$ con F finita ed $\bigcup F$ cofinita; in tal caso, infatti, nessun d_G che fosse infinito potrebbe essere quasi disgiunto da tutti gli elementi di F e quindi d_G dovrebbe essere finito. Vogliamo allora far vedere che se non esistono famiglie F di questo tipo, d_G è sempre infinito. Più in generale, ha intersezione infinita con ogni insieme che non sia quasi coperto da una sottofamiglia finita di $\mathscr{A}$.*

Teorema 3.16. *Nell'ipotesi che valga $MA(\kappa)$, date le famiglie $\mathscr{A}, \mathscr{C} \subset \mathcal{P}(\omega)$ con $|\mathscr{A}|, |\mathscr{C}| \leq \kappa$, se $\forall y \in \mathscr{C} \ \forall F \subset \mathscr{A}$, $|F| < \omega$ si ha che $|y - \bigcup F| = \omega$, allora $\exists d \subset \omega$ tale che $\forall x \in \mathscr{A} \ (|d \cap x| < \omega)$ e $\forall y \in \mathscr{C} \ (|d \cap y| = \omega)$.*

Dimostrazione. Dato $y \in \mathscr{C}$ e $n \in \omega$, si pone:

$$E_n^y = \{\langle s, F\rangle \in P_{\mathscr{A}} \mid s \cap y \nsubseteq n\}$$

Ora, tale insieme è denso in $P_{\mathscr{A}}$, perché dato un qualsiasi $\langle s, F\rangle \in P_{\mathscr{A}}$ l'ipotesi $|y - \bigcup F| = \omega$ assicura che $\exists m \in y - \bigcup F$; allora $\langle s \cup \{m\}, F\rangle \leq \langle s, F\rangle$, in quanto $s \subseteq s \cup \{m\}$, $F \subseteq F$, $\forall x \in F \ (x \cap (s \cup \{m\}) \subseteq s)$ perché $m \notin \bigcup F \Rightarrow m \notin x$, $(s \cup \{m\}) \cap y \nsubseteq n$ perché $s \cap y \nsubseteq n$. Ora, per $MA(\kappa)$, so che esiste un filtro G di $P_{\mathscr{A}}$ che interseca tutti gli inisemi (densi) della famiglia:

$$\{D_x \mid x \in \mathscr{A}\} \cup \{E_n^y \mid y \in \mathscr{C} \ \wedge \ n \in \omega\}$$

Allora la tesi si prova facilmente, con $d = d_G$. La prima parte della tesi segue subito dal Lemma 3.12; infatti, questo mi assicura che $\forall x \in \mathscr{A} \ (|x \cap d_G| < \omega)$. Inoltre, dalla definizione di d_G e da quella di E_n^y segue subito che $\forall n \in \omega \ (d_G \cap y \not\subseteq n) \ \Rightarrow \ \forall n \in \omega \ (|d_G \cap y| > n) \ \Rightarrow \ |d_G \cap y| = \omega$. □

Osservazione 3.17. *Il Teorema 3.16 ci permette di risolvere positivamente il primo problema: dato κ tale che $\omega \leq \kappa < 2^\omega$ e considerata una famiglia quasi disgiunta $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(\omega)$, con $|\mathscr{A}| = \kappa$ questa non è massimale. Basta, infatti, applicare il teorema con $\mathscr{C} = \{\omega\}$; le ipotesi sono verificate perché, dal momento che $\mathscr{A}$ è infinita e quasi disgiunta, si ha che*

$$\forall F \in \mathscr{A} \ \left(|F| < \omega \Rightarrow \left|\omega - \bigcup F\right| = \omega\right)$$

Sappiamo, allora, che $\exists d \subset \omega$ tale che:

(i) $\forall y \in \mathscr{C} \ (|d \cap y| = \omega)$*, ovvero nel nostro caso* $|d \cap \omega| = \omega$*, cioè d è infinito*

(ii) $\forall x \in \mathscr{A} \ (|d \cap x| < \omega)$*, ovvero la famiglia $\mathscr{A} \cup \{d\}$ è ancora quasi disgiunta e quindi $\mathscr{A}$ non è massimale.*

3.2.2 Problema 2

Corollario 3.18. ***(Corollario al Teorema 3.16).*** *Dato κ tale che $\omega \leq \kappa < 2^\omega$, data una famiglia quasi disgiunta $\mathscr{B} \subset \mathcal{P}(\omega)$, con $|\mathscr{B}| = \kappa$ e data una sottofamiglia $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$, allora $\exists d \subset \omega$ tale che $\forall x \in \mathscr{A} \ (|d \cap x| < \omega)$ e $\forall x \in \mathscr{B} - \mathscr{A} \ (|d \cap x| = \omega)$.*

Dimostrazione. Basta applicare il Teorema 3.16 con $\mathscr{C} = \mathscr{B} - \mathscr{A}$. □

Osservazione 3.19. *Da questo semplice corollario possiamo subito risolvere positivamente anche il secondo problema. Infatti, dato κ tale che $\omega \leq \kappa < 2^\omega$, fissata una qualsiasi famiglia quasi disgiunta $\mathscr{B}$ di cardinalità κ, posso definire la funzione $\phi : \mathcal{P}(\omega) \to \mathcal{P}(\mathscr{B})$, come*

$$\phi(d) = \{x \in \mathscr{B} \mid |d \cap x| < \omega\}$$

Dal momento che, per il Corollario 3.18 tale ϕ è suriettiva (in quanto $\forall x \in \mathscr{B}$ $(\exists d \subset \omega$ $(|d \cap x| < \omega))$), si ha che:

$$2^\kappa = |\mathcal{P}(\mathscr{B})| \leq |\mathcal{P}(\omega)| = 2^\omega$$

e quindi (dato che l'altro verso della diseguaglianza è banale), ne concludiamo che $2^\kappa = 2^\omega$.

3.2.3 Problema 3

Lemma 3.20. *Con un argomento non dissimile a quelli usati in questa sezione vorremmo provare che, considerando l'insieme delle funzioni, ω^ω, con la relazione d'ordine:*

$$f \preceq g \;\Leftrightarrow\; \exists n \in \omega \; (\forall m \geq n \; (f(m) \leq g(m)))$$

e data una famiglia $\mathscr{F} \subset \omega^\omega$ con $|\mathscr{F}| = \kappa$, ipotizzando che valga $MA(\kappa)$ si ha che

$$\exists g \in \omega^\omega \; (\forall f \in \mathscr{F} \; (f \preceq g))$$

Dimostrazione. Consideriamo il poset

$$P = \{(p, F) \mid p \in \omega^\omega, \; F \in \mathscr{F}, \; |F| < \omega\}$$

ordinato dalla relazione

$$(p, F) \leq (q, G) \;\Leftrightarrow\; q \subseteq p, \; G \subseteq F, \; \forall g \in G \; (\forall n \in dom(p) - dom(q) \; (p(n) \geq g(n)))$$

Osserviamo che P ha la c.c.c. perché due suoi elementi $(p, F), (q, G)$ sono incompatibili solo se $p \neq q$, perché altrimenti $(p, F \cup G)$ sarebbe una loro estensione comune.

Consideriamo allora gli insiemi D_f, $\forall f \in \mathscr{F}$, cosí definiti:

$$D_f = \{(p, F) \mid f \in F\}$$

Ognuno di questi insiemi è denso in P perché $\forall (p, F) \in P$ una sua estensione è $(p, \{f\} \cup F) \in D_f$. Consideriamo poi gli insiemi D_n, $\forall n \in \omega$, definiti nel seguente modo:

$$D_n = \{(p, F) \mid n \in dom(p)\}$$

Ognuno di questi insiemi è denso in P perché ogni funzione si può estendere in una a valori in n. Possiamo allora usare $MA(\kappa)$ per trovare che esiste un filtro $G \subseteq P$ tale che $\forall f \in \mathscr{F}$ $(G \cap D_f \neq \emptyset)$ e $\forall n \in \omega$ $(G \cap D_n \neq \emptyset)$. Allora la tesi risulta provata con $g = \bigcup G$. Infatti, innanzitutto g è una funzione perché gli elementi di G sono compatibili per definizione di filtro. Inoltre, data una qualsiasi $f \in \mathscr{F}$ sia $(h, H) \in G \cap D_f$. Fissato $n \in dom(h)$, $\forall m > n$ si prenda una $(i, I) \in G \cap D_n$. Per definizione di filtro, in G c'è un'estensione comune di (h, H) e (i, I), che chiamiamo (j, J). Ora:

$$(j, J) \leq (i, I) \;\Rightarrow\; j \supseteq i \;\Rightarrow\; dom(j) \supseteq dom(i) \;\Rightarrow m \in dom(j)$$

$$(h, H) \in D_f \;\Rightarrow\; f \in H$$

$$(j, J) \leq (h, H) \;\Rightarrow\; \forall h^* \in H \; (j(m) > h^*(m)) \;\Rightarrow\; j(m) > f(m)$$

Che prova la tesi. □

Teorema 3.21. *Una conseguenza*[1] *del Lemma 3.20 è la seguente: dato $E \subset \mathbb{R}$, con E piú che numerabile, e $\{f_n \mid n \in \omega\}$ successione convergente di funzioni $E \to \mathbb{R}$, allora esiste un sottoinsieme $N \subseteq E$ piú che numerabile, tale che la successione delle restrizioni $f_n \upharpoonright N$ converge uniformemente in N.*

[1] Provata originariamente in [7] a completamento del lavoro di Martin e Solovay in [2], volto a rispondere ai quesiti di Sierpinski [9] nel caso in cui si ammetta $MA + \neg CH$.

Dimostrazione. Sia $|E| = \kappa < 2^\omega$ e sia $f = \lim_n f_n$. Ciò vuol dire che:

$$\forall x \in E \ (\forall m \in \omega \ (\exists k \in \omega \ (\forall n \geq k \ (|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{m+1}))))$$

Se chiamo $\varphi_x : \omega \to \omega$ la funzione che associa ad ogni m il rispettivo k, $m \mapsto k$, avrò definito κ funzioni $\omega \to \omega$. Per quanto visto nel Lemma 3.20:

$$\exists \varphi \in \omega^\omega \ (\exists k_x \in \omega \ (\forall m \geq k_x \ (\varphi_x(m) \geq \varphi(m))))$$

Ma allora, poiché le φ_x sono piú che numerabili, mentre i k_x sono al piú numerabili, vuol dire che $\exists k \in \omega$ tale che $k_x = k$ un numero piú che numerabile di volte. Sia allora $N = \{x \in E \mid k_x = k\}$. Chiaramente, avrò:

$$\forall x \in M \ (\forall m \geq k \ (\forall n \geq \varphi(m) \ (|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{m+1})))$$

Poiché $\varphi(m)$ dipende unicamente da m e non da x, è provata la convergenza uniforme. □

3.2.4 Problema 4

Definizione 3.22. Insiemi F_σ e G_δ
Dato uno spazio topologio X, un insieme $Y \subseteq X$ si dice essere F_σ se è unione di una famiglia numerabile di chiusi e si dice essere un G_δ se è intersezione di una famiglia numerabile di aperti.

Lemma 3.23. *Assumendo $MA(\kappa)$, dato uno spazio metrico separabile X, con $|X| = \kappa$, ogni suo sottoinsieme è sia F_σ che G_δ.*

Dimostrazione. Sia $D \subseteq X$ e $\{B_i \mid i \in \omega\}$ una base di aperti di X. Dato un $x \in X$, sia $s_x = \{i \in \omega \mid x \in B_i\}$. Consideriamo allora gli insiemi $A = \{s_x \mid x \in X - D\}$ e $B = \{s_y \mid y \in D\}$. È banale osservare che, comunque preso un $y \in D$ ed un numero finito di elementi $x_1, \ldots, x_n \in X - D$, l'insieme $s_y - \bigcup_{i=1}^n s_{x_i}$ è ancora infinito.

Applico allora il Teorema 3.16 con $\mathscr{A} = A$ e $\mathscr{C} = B$, per trovare un $d \subset \omega$ tale che

$$\forall x \in X - D\ (|s_x \cap d| < \omega),\ \forall y \in D\ (|s_y \cap d| = \omega)$$

Sia allora, per ogni $n \in \omega$, definito l'insieme:

$$K_n = \bigcup_{\substack{i>n \\ i\in d}} B_i$$

e sia $K = \bigcap_{n\in\omega} K_n$. Per definizione, K è un insieme G_δ. Proviamo che lo è anche D.

(i) Innanzitutto, proviamo che $D \subseteq K$. Infatti, dato $y \in D$ ed un qualsiasi $n \in \omega$, poiché $|s_y \cap d| = \omega$, esiste sicuramente un $i \in s_y \cap d$ tale che $i > n$. Ma allora $\forall n \in \omega\ (y \in B_i \subseteq K_n) \ \Rightarrow\ y \in K$.

(ii) Proviamo infine che $(X - D) \cap K = \emptyset$. Infatti, dato $x \in X - D$, poiché $|s_x \cap d| < \omega$, esiste un $n \in \omega$ tale che per ogni $i \in d, i > n$ si ha $i \notin s_x$. Ma allora avrò che $x \notin K_n \ \Rightarrow\ x \notin K$.

Per provare che D è un insieme F_σ, basta scambiare nel ragionamento precedente D ed $X - D$. Si otterrà cosí che $X - D$ è un insieme G_δ e quindi D è F_σ. □

Teorema 3.24. *Una conseguenza del Lemma 3.23 è la seguente: dato $E \subset \mathbb{R}$, con E piú che numerabile, ed una funzione $f : E \to \mathbb{R}$, allora esiste un sottoinsieme $N \subseteq E$ piú che numerabile, tale che la funzione $f \restriction N$ è continua in N.*

Dimostrazione. Sia $|E| = \kappa < 2^\omega$ e si fissi un chiuso $F \subseteq \mathbb{R}$. Per il Lemma 3.23, l'insieme $f^{-1}(F)$ è un insieme G_δ di E. Da ciò segue[2] che f è di categoria di Baire 1, ovvero è limite di una successione $\{f_n \mid n \in \omega\}$ di funzioni continue. Ma, per il Teorema 3.21 ho che $\exists N \subseteq E$ piú che numerabile in cui tale successione converge uniformemente a $f \restriction N$ e poiché tutte le f_n sono continue in N, lo sarà anche f. □

[2] In letteratura la condizione precedente è a volte data come definizione di funzioni di classe di Baire 1; noi intenderemo qui la definizione che fa uso delle successioni di funzioni. Per una dimostrazione della loro equivalenza, si può vedere ad esempio [6, p. 280].

3.2.5 Problema 5

Definizione 3.25. Sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ di prima categoria
Ricordiamo che un insieme $M \subset \mathbb{R}$ si dice di prima categoria se si può scrivere come $M = \bigcup\{K_n \mid n \in \omega\}$ dove i K_n sono insiemi chiusi e magri.

Teorema 3.26. *Dato κ tale che $\omega \leq \kappa < 2^\omega$, data una famiglia $\{M_\alpha \subset \mathbb{R} \mid \alpha < \kappa\}$ di inisiemi di prima categoria, allora $\bigcup\{M_\alpha\}$ è di prima categoria.*

Dimostrazione. Provare la tesi, equivale (per la definizione di insieme di prima categoria) a provare che l'unione di ogni famiglia di κ insiemi chiusi e magri è contenuta nell'unione di una famiglia numerabile di insiemi chiusi e magri. Ma, dal momento che il complementare di un insieme chiuso e magro è un insieme aperto e denso, la tesi è ancora equivalente a provare che l'intersezione di ogni famiglia di κ insiemi aperti e densi contiene l'intersezione di una famiglia numerabile di insiemi aperti e densi. Per provare ciò, consideriamo la famiglia

$$\{B_i \neq \emptyset \, | i < \omega\}$$

definita come la famiglia di tutti gli intervalli aperti di $\mathbb{R}$, ad estremi razionali. Dal momento che ogni aperto di $\mathbb{R}$ è unione di alcuni (in generale infiniti) B_i in esso contenuti, i B_i formano una base per la topologia di $\mathbb{R}$. Vorremmo ora applicare il Teorema 3.16 per trovare un insieme $d \subset \omega$ che ci permetta di definire la famiglia $\{V_n\}$ che cerchiamo, come:

$$V_n = \bigcup\{B_i \mid i \in d \ \wedge \ i > n\}$$

Una tale famiglia potrebbe fare al caso nostro. Detto, infatti, $c_j = \{i \in \omega \mid B_i \subset B_j\}$, se potessi applicare il Teorema 3.16 con $\mathscr{C} = \{c_j\}$, per trovare che $\forall j \ |d \cap c_j| = \omega$, allora vorrebbe dire che

$$\begin{aligned}
&\forall j\ (\forall n\ (\exists i \in d, i > n\ (B_i \subset B_j))) &\Rightarrow\\
\Rightarrow&\forall j\ (\forall n\ (V_n \cap B_j \neq \emptyset)) &\Rightarrow\\
\Rightarrow&\forall n\ (V_n \text{ è denso.})
\end{aligned}$$

Inoltre, detto $a_\alpha = \{i \in \omega \mid B_i \not\subset U_\alpha\}$, se potessi applicare il Teorema 3.16 con $\mathscr{A} = \{a_\alpha\}$, per trovare che $\forall \alpha\ (|d \cap a_\alpha| < \omega)$, avrei che

$$\begin{aligned}
&\exists n \in \omega\ (d \cap a_\alpha \subset n) &\Rightarrow\\
\Rightarrow&\forall i > n\ (i \in d \Rightarrow B_i \subset U_\alpha) &\Rightarrow\\
\Rightarrow&V_n \subset U_\alpha &\Rightarrow\\
\Rightarrow&\bigcap_{n<\omega} V_n \subset \bigcap_{\alpha<\kappa} U_\alpha
\end{aligned}$$

Che è la tesi. Tutto quello che resta da fare, quindi, è mostrare che si è nelle ipotesi del Teorema 3.16, ovvero che dato un sottoinsieme finito $F \subset \kappa$, allora $\forall j < \omega\ (|c_j - \bigcup_{\alpha\in F} a_\alpha| = \omega)$. Ora, ho che:

$$c_j - \bigcup_{\alpha\in F} a_\alpha = \{i \in \omega \mid B_i \subset (B_j \cap \bigcap_{\alpha\in F} U_\alpha)\}$$

per definizione dei c_j e degli a_α. Ma, dal momento che i B_j sono non vuoti e che $\bigcap_{\alpha\in F} U_\alpha$ è denso, segue che $B_j \cap \bigcap_{\alpha\in F} U_\alpha$ è un aperto non vuoto nella nostra topologia e quindi deve essere infinito. □

3.2.6 Problema 6

Teorema 3.27. *Dato κ tale che $\omega \leq \kappa < 2^\omega$, data una famiglia $\{M_\alpha \subset \mathbb{R} \mid \alpha < \kappa\}$ di insiemi di misura nulla secondo Lebesgue, allora $\bigcup\{M_\alpha\}$ ha misura nulla.*

Dimostrazione. Detta μ la misura secondo Lebesgue, chiaramente $M \subset \mathbb{R}$ ha misura nulla se

$$\forall \varepsilon > 0\ (\exists U \supset M \text{ aperto } : \ \mu(U) \leq \varepsilon)$$

Quello che ci proponiamo di trovare, quindi, è un

$$U \subset \mathbb{R} \text{ aperto } : \left(\mu(U) \leq \varepsilon \ \wedge \ \bigcup_{\alpha<\kappa} M_\alpha \subset U \right)$$

Consideriamo, allora, il seguente poset:

$$P = \{p \subset \mathbb{R} \mid p \text{ aperto } \wedge \mu(p) < \varepsilon\}$$

in cui la relazione d'ordine è quella di inclusione: $p \leq q \Leftrightarrow q \subseteq p$. Chiaramente $p, q \in P$ sono compatibili se e solo se risulta $\mu(p \cup q) < \varepsilon$ (l'unione di due aperti, infatti, è sicuramente un aperto) e $p \cup q$ è proprio la loro estensione comune. Consideriamo ora un filtro G su P e poniamo $U_G = \bigcup G$. Dal momento che tutti gli insiemi di G sono aperti, anche U_G è un aperto. Inoltre, per definizione di filtro $p, q \in G \Rightarrow \exists r \in G \ (r \leq p \ \wedge \ t \leq q)$; ma allora $r \leq p \cup q$ e quindi $p \cup q \in G$. Se allora si procede per induzione su n, si vede subito che dato un sottoinsieme numerabile $A \subset G$, si ha $\bigcup A \subset G \subset P$ e quindi per i sottoinsiemi numerabili di G vale la proprietà $\mu(\bigcup A) \leq \varepsilon$ che deriva dalla numerabile additività della misura secondo Lebesgue. Il problema è che in genere G è più che numerabile; possiamo però risolvere tale problema dimostrando che:

$$\exists A \subset G \ (|A| = \omega \wedge \bigcup A = \bigcup G)$$

Questo risultato è sufficiente per provare che $\mu(U_G) \leq \varepsilon$. Dimostriamolo, allora: sia $\mathscr{B}$ l'insieme degli intervalli aperti ad estremi razionali. Ora, $\forall p \in G$ e $\forall x \in p$ sicuramente $\exists q \in \mathscr{B}$ tale che $x \in q$ e $q \subset p$, ovvero $p \leq q$ e quindi, per definizione di filtro, $q \in G$. Ma allora l'insieme numerabile cercato è $A = G \cap \mathscr{B}$, per il quale risulta $\bigcup A = \bigcup G = U_G$. (Si può notare come abbiamo sfruttato l'esistenza di una base numerabile per la topologia euclidea su $\mathbb{R}$, ovvero il cosiddetto *secondo assioma di numerabilità*).

Vorremmo ora mostrare che P ha la c.c.c.: Consideriamo l'insieme $\mathscr{C}$ di tutte le unioni finite di elementi di $\mathscr{B}$. Allora (se $\triangle$ è l'operatore di differenza simmetrica) si ha che

$$\forall V \subset \mathbb{R} \text{ misurabile } \ (\forall \delta > 0\ (\exists C \in \mathscr{C}\ (\mu(C \triangle V) \leq \delta)))$$

Se, allora, scegliamo una sottofamiglia non numerabile di P, $\{p_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$, tale che i p_α siano a due a due incompatibili (ovverosia scegliamo un'anticatena non numerabile di P), dalla non numerabilità della famiglia e dal fatto che $p_\alpha < \varepsilon$ per definizione di P, segue che

$$\exists \delta > 0\ (|X = \{\alpha < \omega_1 \mid \mu(p_\alpha) \leq \varepsilon - 3\delta\}| > \omega)$$

Allora, per quanto detto prima, dato un $\alpha \in X$, si può scegliere un certo $C_\alpha \in \mathscr{C}$ tale che sia $\mu(C_\alpha \triangle p_\alpha) \leq \delta$. Consideriamo ora quest'altro fatto: presi due elementi distinti $\alpha, \beta \in X$, dal momento che p_α e p_β sono incompatibili, la loro unione non può avere misura $< \varepsilon$, ovvero si ha: $\mu(p_\alpha \cup p_\beta) \geq \varepsilon$; d'altronde, $\alpha, \beta \in X \ \Rightarrow\ \mu(p_\alpha), \mu(p_\beta) \leq \varepsilon - 3\delta \ \Rightarrow\ \mu(p_\alpha \cap p_\beta \leq \varepsilon - 3\delta)$; in definitiva, possiamo concludere che $\mu(p_\alpha \triangle p_\beta) \geq 3\delta$. Da ciò, considerando che $\mu(p_\alpha \triangle C_\alpha), \mu(p_\beta \triangle C_\beta) \leq \delta$, si deduce che $\mu(C_\alpha \triangle C_\beta) \geq \delta$ (quando $C_\alpha \neq C_\beta$). Ma allora i C_α (che dovrebbero essere numerabili in quanto unioni finite di una famiglia numerabile) sono elementi distinti di $\mathscr{C}$, e questo per $\alpha < \omega_1$: ovvero, sono in quantità più che numerabile. Siamo, dunque, pervenuti ad un assurdo che ci porta a concludere che le anticatene di P non possono essere più che numerabili.

Per concludere, consideriamo gli insiemi $D_\alpha = \{p \in P \mid M_\alpha \subset p\}$ (considerati $\forall \alpha < \kappa$). Tali insiemi sono densi; infatti, dato un qualsiasi $q \in D_\alpha$, ho che $q \in P \ \Rightarrow\ \mu(q) < \varepsilon$ e quindi $\exists V \supset M_\alpha$ tale che V è aperto e $\mu(V) < \varepsilon - \mu(q)$ (in questo caso, come anche nel provare che P ha la c.c.c. stiamo implicitamente usando la separabilità dello spazio delle misure $L^1(\mathbb{R})$). Allora se considero l'insieme $p = q \cup V$, ho che $\mu(p) < \varepsilon \ \Rightarrow\ p \in P$ e $M_\alpha \subset q \ \Rightarrow\ M_\alpha \subset p \ \Rightarrow\ p \in D_\alpha$; segue che p è un'estensione di q in D_α.

Possiamo ora concludere la nostra dimostrazione. Per $MA(\kappa)$, infatti, esiste un filtro G tale che $\forall \alpha < \kappa\ (G \cap D_\alpha \neq \emptyset)$; ne segue per quanto visto, che $\forall \alpha < \kappa\ (M_\alpha \subset U_G)$ e quindi $\bigcup_{\alpha < \kappa} M_\alpha \subset U_G$ e, come provato all'inizio, U_G è un aperto di misura $\leq \varepsilon$. $\square$

Osservazione 3.28. *Si può addirittura provare*[3] *un risultato piú forte: al posto di* $\mathbb{R}$ *si può considerare un qualsiasi spazio polacco (ovvero uno spazio separabile completamente metrizzabile) ed al posto della misura secondo Lebesgue si può considerare una qualsiasi misura di Borel,* σ*-finita (ovvero in cui lo spazio sul quale è definita si può scrivere come unione numerabile di insiemi di misura finita) e non atomica (ovvero per la quale non esistono insiemi di misura positiva che non contengono nessun sottoinsieme proprio ancora di misura positiva).*

Corollario 3.29. *Dato* κ *tale che* $\omega \leq \kappa < 2^\omega$*, data una famiglia* $\{M_\alpha \subset \mathbb{R} \mid \alpha < \kappa\}$ *di insiemi misurabili secondo Lebesgue, allora* $M = \bigcup\{M_\alpha\}$ *è misurabile secondo Lebesgue.*

Dimostrazione. Poiché M è unione di insiemi misurabili, avrà un nucleo misurabile, ovvero

$$\exists N \subset M \ (N \text{ misurabile } \wedge \ \forall R \subseteq M - N \ (R \text{ misurabile } \Rightarrow \ \mu(R) = 0))$$

In particolare, quindi, gli insiemi $M_i - N$ hanno misura nulla e quindi per il Teorema 3.27 anche $\mu(M - N) = 0$. Segue subito che $M = N \cup (M - N)$ è misurabile (ed ha misura $\mu(M) = \mu(N)$). $\square$

[3] Per una dimostrazione si veda [2].

CAPITOLO 4

Applicazioni topologiche di MA

Teorema 4.1. *Assumendo $MA(\kappa)$, dato uno uno spazio di Hausdorff compatto X per il quale vale la c.c.c. e data una famiglia $\{U_\alpha \subset X \mid U_\alpha$ aperto e denso $\forall \alpha < \kappa\}$, allora $\bigcap_{\alpha<\kappa} U_\alpha \neq \emptyset$.*

Dimostrazione. Sia

$$P = \{p \subset X \mid p \neq \emptyset,\ p \text{ aperto}\}$$

con la relazione d'ordine $p \leq q \Leftrightarrow p \subseteq q$ (e quindi $p \perp q \Leftrightarrow p \cap q = \emptyset$). Notiamo che, dal momento che X ha la c.c.c., anche P ce l'ha. Consideriamo ora un filtro G di P; poiché, per definizione di filtro, $\forall x, y \in G\ (\exists z \in G\ (z \subseteq x\ \wedge\ z \subseteq y))$, segue che G ha la proprietà dell'intersezione finita. Ora, poiché G è un filtro, ho che $\forall g \in G\, \forall p \in P\ (p \supseteq g \Rightarrow p \in G)$ per definizione; e, dal momento che per definizione di spazio topologico, X stesso è un aperto non vuoto e quindi sta in P, ho che $X \in G$ e quindi G è un ricoprimento (in generale infinito) di X. Ora, per definizione di spazio compatto, da ogni ricoprimento di X se ne può estrarre uno finito. Ciò vuol dire che $\exists G' \subseteq G\ (\bigcup G' = X\ \wedge\ |G'| < \omega)$. Per la proprietà dell'intersezione finita di G si ha allora che $\bigcap G' \neq \emptyset$ e, poiché i filtri sono ricoprimenti da ciò segue che $\bigcap G \neq \emptyset$

e quindi $\bigcap\{\overline{g} \mid g \in G\} \neq \emptyset$. Definiamo ora, $\forall\alpha < \kappa$:

$$D_\alpha = \{p \in P \mid \overline{p} \subseteq U_\alpha\}$$

Voglio provare che tale insieme è denso (nel senso degli ordini parziali) in P. Ovvero, che:

$$\forall p \in P\ \exists q \in D_\alpha\ (q \subseteq p)$$

Cioè:

$$\forall p \in P\ \exists q \in P\ (q \subseteq p\ \wedge\ \overline{q} \subseteq U_\alpha)$$

Infatti, dato $p \in P$, se $\overline{p} \subseteq U_\alpha$, posso scegliere semplicemente $q = p$. In caso contrario, poiché U_α è denso in X, ho che sicuramente $p \cap U_\alpha \neq \emptyset$; scelgo allora $x \in p \cap U_\alpha$. Dal momento che X è compatto e di Hausdorff, sarà regolare. Allora, considerati x e l'insieme chiuso $X - U_\alpha$, per la regolarità si ha che:

$$\exists A, B \in P\ (x \in A\ \wedge (X - U_\alpha) \subseteq B\ \wedge\ A \cap B = \emptyset)$$

Quindi $x \in A$ e $\overline{A} \cap (X - U_\alpha) = \emptyset \Rightarrow \overline{A} \subseteq U_\alpha$, ovvero possiamo scegliere $q = A$. Siamo allora in grado di concludere. Basterà infatti scegliere un filtro G tale che $\forall\alpha < \kappa\ (G \cap D_\alpha \neq \emptyset)$; per quanto visto, si avrà che $\emptyset \neq \bigcap\{\overline{g} \mid \forall g \in G\} \subseteq \bigcap\{U_\alpha \mid \forall\alpha < \kappa\}$. □

Lemma 4.2. *Assumendo $MA(\omega_1)$, dato uno spazio X per il quale vale la c.c.c. e data una famiglia $\{U_\alpha \subset X \mid U_\alpha \neq \emptyset \text{ aperto } \forall\alpha < \omega_1\}$, allora esiste un A, con $\omega < A < \omega_1$ tale che $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ ha la proprietà dell'intersezione finita.*

Dimostrazione. Poniamo, $\forall\alpha < \omega_1$:

$$V_\alpha = \bigcup_{\gamma > \alpha} U_\gamma$$

e quindi $\alpha < \beta \Rightarrow V_\beta \subset V_\alpha$. Vogliamo provare, innanzitutto che $\exists\alpha^*$ tale che $\forall\beta > \alpha^*\ (\overline{V_\beta} = \overline{V_{\alpha^*}})$. Infatti, se cosí non fosse, vorrebbe dire che esistono degli ordinali α_ξ ($\xi < \omega_1$) crescenti ($\alpha_\xi < \alpha_{\xi+1}$) e tali che

$$\forall \xi < \omega_1 \ (\overline{V_{\alpha_{\xi+1}}} \neq \overline{V_{\alpha_\xi}})$$

Ovvero

$$\forall \xi < \omega_1 \ (V_{\alpha_\xi} - \overline{V_{\alpha_{\xi+1}}} \neq \emptyset)$$

Tali insiemi $V_{\alpha_\xi} - \overline{V_{\alpha_{\xi+1}}}$ sono tutti aperti (sono infatti costituiti da un aperto meno un chiuso in esso contenuto) e sono a due a due disgiunti (per costruzione). Quindi formano un'anticatena di X di cardinalità $> \omega$, che è assurdo perché in X vale la c.c.c.. Provata l'esistenza di un α^*, possiamo considerare

$$P = \{p \subset V_{\alpha^*} \mid p \neq \emptyset, \ p \text{ aperto}\}$$

che sarà c.c.c. perché X lo è. Ora, un filtro G di P ha la proprietà dell'intersezione finita (la dimostrazione è analoga a quella fornita nel teorema precedente). Scelgo allora

$$A = \{\gamma < \omega_1 \mid \exists g \in G \ (g \subset U_\gamma)\}$$

Dall'intersezione finita per G segue quella della famiglia $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Resta quindi da provare che A è piú che numerabile, ovvero che $A > \omega$. Per farlo, proviamo che si può usare $MA(\omega_1)$ per scegliere un filtro G apposito, per il quale A sia illimitato in ω_1 e quindi piú che numerabile. Consideriamo, infatti, $\forall \beta < \omega_1$:

$$D_\beta = \{p \in P \mid \exists \gamma > \beta \ (p \subset U_\gamma)\}$$

Ora, D_β è denso in P: infatti, $\forall \beta < \omega_1$ ($\overline{V_{\alpha^*}} \subseteq \overline{V_\beta}$) per definizione di α^*, quindi $\forall p \in P$ ($p \cap V_\beta \ neq \emptyset$) e quindi $\exists \gamma > \beta$ ($p \cap U_\gamma$). Allora $p \cup U_\gamma$ è un'estensione di p in D_β. Possiamo allora richiedere, grazie all'applicazione di $MA(\omega_1)$ che il filtro G sia tale che $\forall \beta < \omega_1$ ($G \cap D_\beta \neq \emptyset$) e quindi $\forall \beta$ ($\exists \gamma \in A$ ($\gamma > \beta$)) e quindi A è illimitato in ω_1. $\square$

Teorema 4.3. *Assumendo $MA(\omega_1)$, dati due spazi X ed Y per i quali vale la c.c.c., allora essa vale anche per il loro prodotto.*

Dimostrazione. Se per assurdo $X \times Y$ non fosse c.c.c., esisterebbe in esso un'anticatena non numerabile $\{W_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ di insiemi non nulli ed aperti. Per ogni $\alpha < \omega_1$ si possono considerare U_α, V_α tali che $\emptyset \neq U_\alpha \times V_\alpha \subset W_\alpha$. Ora, per il Lemma 4.2, sappiamo che $\exists A$ $(\omega < A < \omega_1)$ tale che la famiglia $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ ha la proprietà dell'intersezione finita. Ma ciò vuol dire che dati $\alpha, \beta \in A$ con $\alpha \neq \beta$ la loro intersezione è non vuota. Eppure, poiché $\{W_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ è un'anticatena, si avrà che $(U_\alpha \times V_\alpha) \cap (U_\beta \times V_\beta) = \emptyset$, da cui deriva che $V_\alpha \cap V_\beta = \emptyset$ e questo $\forall \alpha, \beta$. Ne segue che $\{V_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ è un'anticatena non numerabile di Y, in contrasto con il fatto che Y è c.c.c. $\square$

Corollario 4.4. *Segue subito dal Teorema 4.3 che il prodotto di un numero finito di spazi c.c.c. è ancora c.c.c.; con il seguente corollario proveremo che ciò vale anche per prodotti infiniti.*

Corollario 4.5. *Dati gli spazi c.c.c. X_i, con i appartenente ad un generico I, tali che il prodotto di un qualsiasi numero finito di essi è ancora c.c.c., allora il prodotto di tutti gli spazi è c.c.c.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista un'anticatena piú che numerabile $\{U_\alpha \mid \forall\alpha < \omega_1\}$ di aperti di $\prod_{i \in I} X_i$. Restringendo, se necessario, gli U_α, possiamo supporli elementi di una base di $\prod_{i \in I} X_i$. Poichè ogni elemento di una base di una topologia prodotto è il prodotto di elementi delle basi dei singoli spazi, di cui solo un numero finito di essi possono essere diversi da tutto lo spazio, si ha che ogni U_α dipende soltanto da un numero finito di "*coordinate*", dette a_α. Ora, per il Δ-system lemma (Osservazione 2.12) esisterà un certo $A \subseteq \omega_1$ piú che numerabile, tale che $\{a_\alpha \mid \forall\alpha \in A\}$ forma un Δ-system di radice al piú finita. Detta r tale radice, osserviamo che essa non può essere vuota, perché altrimenti gli U_α avrebbero intersezione non vuota, in disaccordo con il fatto che formano un'anticatena. Posso quindi considerare lo spazio $\prod_{i \in r} X_i$. Ora, la proiezione degli U_α su $\prod_{i \in r} X_i$ costituisce un'anticatena piú che numerabile, il che è assurdo per ipotesi. $\square$

CAPITOLO 5

Risultati equivalenti ad MA

5.1 Restrizione a poset piú piccoli

Teorema 5.1. *$MA(\kappa)$ è equivalente ad $MA(\kappa)$ ristretto a poset di cardinalità $\leq \kappa$.*

Dimostrazione. Dato un poset c.c.c. $(Q, \leq)$, di cardinalità qualsiasi, ed una famiglia $\mathscr{D}$ di suoi sottoinsiemi, densa in Q e di cardinalità $\leq \kappa$, vogliamo provare che esiste un filtro H che interseca tutti gli insiemi di $\mathscr{D}$ applicando $MA(\kappa)$ ad un opportuno poset $P \subseteq Q$ di cardinalità $\leq \kappa$. Consideriamo, allora, per ogni $D \in \mathscr{D}$, la funzione $f_D : Q \to Q$ tale che

$$\forall p \in Q \ (f_D(p) \in D \ \land \ f_D(p) \leq p)$$

Sia, inoltre, $g : Q \to Q$ tale che

$$\forall p, q \in Q \ (p, q \text{ compatibili } \Rightarrow \ (g(p, q) \leq p \ \land \ g(p, q) \leq q))$$

Consideriamo allora $P \subseteq Q$ tale che $|P| \leq \kappa$ e che P sia chiuso rispetto a g ed alle f_D[1]. Poiché P è chiuso rispetto alle f_D e per la loro costruzione, segue che

$$\forall D \in \mathscr{D} \; (D \cap P \text{ denso in } P)$$

E poiché P è anche chiuso rispetto a g, per costruzione segue che

$$\forall p, q \in P \; (p, q \text{ compatibili in } P \;\Leftrightarrow\; p, q \text{ compatibili in } Q)$$

Da ciò discende anche, immediatamente, che P eredita la c.c.c. e quindi possiamo applicare $MA(\kappa)$ "ristretto". Ne segue che

$$\exists G \text{ filtro di } P \; (\forall D \in \mathscr{D} \; (G \cap (D \cap P) \neq \emptyset))$$

Sia, allora, H il filtro di Q generato da G:

$$H = \{q \in Q \mid \exists p \in G \; (p \leq q)\}$$

Esso prova la tesi, in quanto intersecherà ogni insieme $D \in \mathscr{D}$. □

5.2 Restrizione alle algebre di Boole complete

Nel dire che restringiamo $MA(\kappa)$ alle algebre di Boole complete, intendiamo che possiamo considerare soltanto quei poset P tali che c'è un'algebra di Boole completa per la quale vale la c.c.c., $\mathscr{B} = (B, \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$, tale che $P = B - \{0\}$. Dimostriamo, innanzi tutto, il seguente importante risultato.

Lemma 5.2. *Dato un poset P, esistono un'algebra di Boole completa $\mathscr{B}$ e una funzione $i : P \to B - \{0\}$ tali che:*

(i) $i(P)$ è denso in $\mathscr{B} - \{0\}$

[1] Per una prova che un tale P esiste sempre, si veda [5, §1.10]

(ii) $\forall p, q \in P \; (p \leq q \;\Rightarrow\; i(p) \leq i(q))$

(iii) $\forall p, q \in P \; (p \perp q \;\Leftrightarrow\; i(p) \wedge i(q) = 0)$

Dimostrazione. Per dimostrare tale lemma, ci avvarremo delle algebre di Boole aperte regolari (Definizione 2.17) su P. La prima cosa da fare, quindi, è dare a P una struttura di spazio topologico. Ciò è subito fatto, considerando la topologia di base $\{N_p, \; \forall p \in P\}$, con

$$N_p = \{q \in P \mid q \leq p\}$$

Vogliamo allora provare che $\mathscr{B} = ro(P)$ e $i(p) = \text{int cl}N_p$ soddisfano la tesi.

(i) Dato un insieme aperto regolare $b \in \mathscr{B}$, osservando che N_p è il piú piccolo aperto contenente p e ricordando che, per definizione di insieme regolare int cl$b = b$, si ha:

$$\forall p \in b \; (N_p \subseteq b \;\Rightarrow\; i(p) = \text{int cl}N_p \subseteq \text{int cl}b = b)$$

E quindi $i(P)$ è denso in $\mathscr{B}$.

(ii) È ovvio che $p \leq q \;\Leftrightarrow\; N_p \subseteq N_q$, per costruzione della base.

(iii) Supponiamo che siano $p, q \in P$ tali che $p \not\perp q$. Allora $\exists r \in P \; (r \leq p, q)$ e quindi $i(r) \leq i(p), i(q)$, ovvero $i(r) \subseteq i(p), i(q) \;\Rightarrow\; i(p) \wedge i(q) = i(p) \cap i(q) \neq 0$. Viceversa, se $p \perp q$, si ha che $N_p \cap N_q = \emptyset$. Ma siccome sia N_p che N_q sono aperti, ciò vuol dire $(\text{int cl}N_p) \cap (\text{int cl}N_q) = \emptyset$ e quindi $i(p) \wedge i(q) = 0$.

□

Teorema 5.3. *$MA(\kappa)$ è equivalente ad $MA(\kappa)$ ristretto alle algebre di Boole complete.*

Dimostrazione. Dato un poset c.c.c. $(P, \leq)$ ed una famiglia, di cardinalità $\leq \kappa$, $\mathscr{D}$ di sottoinsiemi densi di P, per il lemma precedente, esisteranno l'algebra $\mathscr{B}$ e la funzione i che soddisfano (i), (ii) e (iii). Innanzitutto, proviamo che $\mathscr{B}$ ha la c.c.c.: se per assurdo esistesse un'anticatena piú che numerabile $\{b_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$, poichè $i(P)$ è denso in $B - \{0\}$, si avrebbe che $\forall b_\alpha \; (\exists p_\alpha \in P \; (i(p_\alpha \leq b_\alpha)))$ e quindi (poiché

i conserva l'ordine) $\{p_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ sarebbe un'anticatena piú che numerabile di P, che è assurdo. Vogliamo poi provare che l'immagine tramite i degli insiemi densi di $\mathscr{D}$ è un insieme denso in $B - \{0\}$. Ma questo è chiaro, perchè $\forall b \in B - \{0\}$ poichè $i(P)$ è denso in $B - \{0\}$, ancora un volta $\exists p \in P\ (i(p) \leq q)$. Ma D è denso in P, quindi $\exists q \in D\ (q \leq p)$ e quindi, poiché i conserva l'ordine, $i(q) \leq b$. A questo punto possiamo applicare $MA(\kappa)$ a $\mathscr{B}$, per trovare un filtro G tale che $\forall D \in \mathscr{D}\ (G \cap i(D) \neq \emptyset)$. L'idea piú naturale per provare $MA(\kappa)$ su P sarebbe quella di usare $H = i^{-1}(G)$ come filtro in P. Il problema è che un tale H, mentre soddisfa sicuramente la seconda proprietà dei filtri, ovvero:

$$\forall h \in H\ (\forall p \in P\ (p \leq h \Rightarrow p \in H))$$

poiché i conserva l'ordine, non è detto che soddisfi anche la prima proprietà, ovvero:

$$\forall h, j \in H\ (\exists r \in H\ (r \leq h, j))$$

Infatti, (iii) mi garantisce che h, j sono compatibili, ma non mi dice niente sul fatto che abbiano o meno un'estensione comune. Tuttavia, se riuscissi ad "allargare" la famiglia $\mathscr{D}$ in maniera appropriata, pur mantenendola di cardinalità $\leq \kappa$, potrei garantire anche la prima proprietà dei filtri per H. In particolare, vorrei aggiungere a $\mathscr{D}$ gli insiemi

$$D_{pq} = \{r \in P \mid (r \leq p, q) \vee (r \perp p) \vee (r \perp q)\}$$

per ogni $p, q \in P$. Per stare in $\mathscr{D}$, però, ognuno di questi insiemi deve essere denso in P; proviamolo: dato $r_0 \in P$, possiamo avere due casi:

(a) r_0 ha un'estensione $s \leq r_0$ che è incompatibile sia con p che con q, essa sta in D_{pq} per definizione.

(b) in caso contrario, r_0 stesso sarà compatibile ad esempio con p, ovvero

$$\exists r_1 \in P\ (r_1 \leq p, r_0)$$

Ma r_1 sarà compatibile ad esempio con q, ovvero

$$\exists r_2 \in P \ (r_2 \leq q, r_1)$$

D'altronde $r_2 \leq r_1 \leq p$, quindi r_2 rientra nella costruzione di D_{pq} ed è un'estensione di r_0.

Resta da garantire che l'aggiunta dei D_{pq} non aumenti la cardinalità di $\mathscr{D}$. Questo sarebbe sicuramente vero se tutti i D_{pq} avessero cardinalità $\leq \kappa$, che a sua volta sarebbe vero se P avesse cardinalità $\leq \kappa$. Ma, per il Teorema 5.1, questa è un'ipotesi del tutto lecita. Abbiamo, allora, provato la tesi perché ora H soddisfa anche la prima proprietà dei filtri. Infatti, dati $h, j \in H$, un qualsiasi elemento $r \in H \cap D_{pq}$ (che esiste per densità) è una loro estensione comune, dal momento che non si può verificare (per la seconda proprietà dei filtri, che vale per H) nè $r \perp h$ nè $r \perp j$. $\square$

5.3 Equivalenza delle formulazioni di MA

Gli enunciati:

(i) $MA(\kappa)$

(ii) $MA(\kappa)$ ristretto a poset di cardinalità $\leq \kappa$

(iii) $MA(\kappa)$ ristretto alle algebre di Boole complete

(iv) dato uno spazio di Hausdorff compatto c.c.c. X ed una famiglia di suoi sottoinsiemi aperti densi $\{U_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$, allora $\bigcap_{\alpha<\kappa} U_\alpha \neq \emptyset$.

sono equivalenti. Che (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) lo abbiamo appena provato. Inoltre, (i) $\Rightarrow$ (iv) per il Teorema 4.1. Per provare che (iv) $\Rightarrow$ (iii), si veda [5, §2.3]. Per altre formulazioni equivalenti e per analizzare molte interessanti conseguenze di MA e di $MA + \neg CH$, si veda [3].

CAPITOLO 6

MA e l'ipotesi di Souslin

Viene qui esposto il risultato fondamentale relativo alle relazioni che intercorrono fra MA e SH. Per ulteriori approfondimenti, si possono consultare [5, §2.4] e [8].

Definizione 6.1. Albero di Souslin Un albero è un poset $(P, \leq)$ tale che ogni suo segmento proprio è una catena. Un albero di Souslin è un albero piú che numerabile per cui ogni catena ed anticatena è numerabile.

Definizione 6.2. Ipotesi di Souslin L'ipotesi di Souslin, SH, è la proposizione: non esistono alberi di Souslin.

Lemma 6.3. *Se esiste un albero di Souslin, allora esiste un albero di Souslin Q, con $|Q| = \omega_1$, tale che $\forall x \in Q$ l'insieme $\{y \in Q \mid y \geq x\}$ è piú che numerabile.*

Dimostrazione. Dal momento che ogni sottoinsieme di un albero di Souslin è ancora un albero di Souslin (come si vede facilmente), possiamo affermare che esiste un albero di Souslin P di cardinalità ω_1. Sia $Q = \{x \in P \mid y \geq x\}$. Posso poi usare il lemma di Zorn per trovare un'anticatena massimale Z in $P - Q$ che, poiché P è un albero di Souslin, sarà numerabile. Allora, fissato un elemento $z \in Z$, sia l'insieme

$\{y \in P \mid y \geq z\}$ che l'insieme $\{y \in P \mid y \leq z\}$ sono numerabili perché catene di P. Quindi in P ci sono numerabili elementi che sono confrontabili con z. Questi, poiché Z è un'anticatena massimale, devono includere tutti gli elementi di $P - Q$ e quindi $P - Q$ è numerabile e quindi Q ha cardinalità ω_1. Resta da provare che fissato un $x \in Q$, l'insieme $\{y \in Q \mid y \geq x\}$ è piú che numerabile. Ma in tale insieme ci stanno tutti gli elementi di $\{y \in P \mid y \geq x\}$ che non stanno in $P - Q$ (numerabile) e che quindi sono piú che numerabili. □

Teorema 6.4. *Se vale $MA(\omega_1)$, allora vale SH.*

Dimostrazione. Se per assurdo esistesse un albero di Souslin, ne esisterebbe uno Q come quello della tesi del Lemma 6.3, che indicizziamo come:

$$Q = \{x_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$$

Siano poi:

$$Q_\beta = \{x_\alpha \mid \beta \leq \alpha < \omega_1\}$$

Osserviamo che, per costruzione, tutti i Q_β sono densi in Q e quindi per $MA(\omega_1)$ esisterà un filtro G che li interseca tutti. Ora, per la proprietà (ii) della definizione dei filtri, un filtro è un segmento e quindi, per definizione di albero, G è una catena di Q. Ma G interseca tutti i Q_β e quindi (come si vede facilmente) deve essere piú che numerabile, in disaccordo con il fatto che ogni catena di un albero di Souslin è numerabile per definizione. □

Indice analitico

Bibliografia

[1] Paul Cohen. The independence of the continuum hypothesis. *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 50:1143–1148, 1963.

[2] R. M. Solovay D. A. Martin. Internal cohen extensions. *Ann. Math. Logic*, 2(2):143–178, 1970.

[3] D.H. Fremlin. *Consequences of Martin's Axiom*. Cambridge University Press, 1984.

[4] Kurt Godel. The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis. *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 24(12):556–567, 1938.

[5] Kenneth Kunen. *Set Theory - An Introduction to Independence Proofs*. North-Holland Publishing Company, 1980.

[6] C. Kuratowski. *Topologie*. Z subwencji Prezydium Rady Ministrow i Ministerstwa Oswiaty, 1952.

[7] J. Shinoda. Some consequences of martin's axiom and the negation of the continuum hypothesis. *Nagoya Math.*, 49:117–125, 1973.

[8] J. R. Shoenfield. Martin's axiom. *The American Mathematical Monthly*, 82(6):610–617, 1975.

[9] W. Sierpinski. *Hypothese du continu*. Chelsea, 1956.