Thieles talmønstre
– gulvfliser og komplekse heltal

Af Steffen L. Lauritzen,
Institut for Matematiske Fag, Aalborg Universitet

- et særtryk af Matilde nr. 15

Forord

Steffen Lauritzens artikel "Thieles talmønstre - gulvfliser og komplekse heltal" er skabt på baggrund af et uforligneligt detektivarbejde, som foregik i efteråret 2002 på Institut for Matematiske Fag, Aalborg Universitet. Det startede med en anekdote fra en århusiansk gymnasielærer og endte med at afdække endnu en facet af T. N. Thieles virke. Det hele drejer sig om matematisk kunst og om et marmorgulv i det tidligere Hafnia hovedsæde på Holmens Kanal nr. 9.

Steffen Lauritzens artikel udkom i tidsskriftet Matilde nr. 15 i marts 2003. Matilde er nyhedsbrevet for Dansk Matematisk Forening og udkommer fire gange årligt. Dansk Matematisk Forening har ca. 400 medlemmer som arbejder på universiteterne, i gymnasiesektoren og i den private sektor. Som medlem modtager man nyhedsbrevet og har mulighed for at blive ugentligt opdateret om matematiske arrangementer gennem foreningens elektroniske kalender (via e-mail). På hjemmesiden **www.mathematics.dk** kan man informere sig om foreningens aktiviteter. Man har mulighed for at melde sig ind i foreningen på et elektronisk ansøgningsskema. Hjemmesiden **www.matilde.mathematics.dk** informerer om nyhedsbrevet og giver mulighed for at abonnere på tidsskriftet.

Maj, 2003

Martin Raussen
Ansvarshavende redaktør for Matilde
Aalborg Universitet

Jan Parner
Codan Forsikring A/S

mat

MATILDE

Tema:

MATEMATIKHISTORIE

NYHEDSBREV FOR DANSK MATEMATISK FORENING

NR. 15 MARTS 2003

Thieles talmønstre

– gulvfliser og komplekse heltal

Af: Steffen L. Lauritzen
Institut for Matematiske Fag, Aalborg Universitet,
e-mail: steffen@math.auc.dk

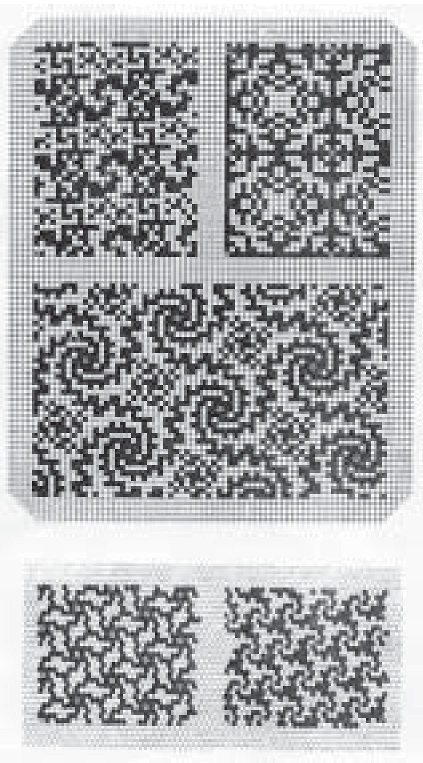
Hvorfor denne artikel?

For nylig lykkedes det mig at færdiggøre en bog om danskeren T. N. Thiele (1838-1910) og hans pionerindsats indenfor statistikkens teori og metode (Lauritzen 2002).

Mens jeg lagde sidste hånd på værket, stødte jeg på et referat af et foredrag, som Thiele havde holdt ved de Skandinaviske Naturforskeres Møde i København i 1873 (Thiele 1874). Her beskrev Thiele, hvordan egenskaber ved komplekse heltal kunne repræsenteres som smukke mønstre, og han fremførte så den påstand,

> *"...at der endog gives en Kunstart, i hvilken Mathematikken selv, uden at iklædes en lunefuld Fantasis udfyldende og tilslørende Dragt, kan frembringe fuldt færdige Billeder, der neppe ville blive betegnede som stive og kedelige."*

Ved foredraget havde Thiele omdelt billeder af de komplekse primtal og andre mønstre, som vil blive nærmere omtalt senere i denne artikel.



Otto Larsen, en århusiansk gymnasielærer som i sin tid havde haft Thiele som lærer på Universitetet, skrev i sine "Universitetsminder" fra 1954, at Thiele havde fået lavet en kakkelovnsskærm til sit hjem efter et sådant talmønster, og at flisemønstret i et af gulvene i Hafnias hus på Gammelholm også blev konstrueret på denne måde.

Min nysgerrighed var vakt! Kakkelovnsskærmen kunne nok ikke opdrives længere, men gulvet måtte jeg absolut se, hvis det stadig fandtes. En henvendelse til Jan Parner, Codan A/S, resulterede i et besøg i Hafnias tidligere hovedsæde (nu overtaget af Codan), og det stod omgående klart, at gulvet i forhallen i hvert fald ikke var helt almindeligt. På den anden side var det heller ikke direkte magen til nogle af de mønstre, som var aftrykt i Thieles foredrag, så der var et mysterium, som krævede sin løsning. På bagsiden af dette nummer af Matilde ses et fotografi af gulvet.

Hvem var Thiele?

Thorvald Nicolai Thiele blev født i København den 24. december 1838 og døde den 26. september 1910 i en alder af 71 år. Thiele blev kendt som astronom, aktuar, matematiker og statistiker. Han var professor i astronomi ved Københavns Universitet fra 1875 til 1907 og samtidig direktør for Universitetets Astronomiske Observatorium.

Thiele var initiativtager og medstifter både af Dansk Matematisk Forening, som blev stiftet i 1873, og af Dansk Aktuarforening, som blev stiftet i 1901. Han var også medstifter af Danmarks første private livsforsikringsselskab Hafnia (stiftet 1872) og beklædte stillingen som matematisk direktør der indtil 1901. Han var desuden formand for Hafnias bestyrelse fra 1903 og indtil sin død i 1910. Ved Thieles 70 års fødselsdag fik Dansk Aktuarforening slået en guldmedalje til hans ære. Denne medalje findes i dag i London på museet hos Institute of Actuaries.

Thiele og tallene

Thiele havde en svær bygningsfejl på begge øjne og blev til sidst næsten helt blind, så det var meget pinefuldt

Thorvald Nicolai Thiele

for ham at virke som observerende astronom. Måske var det derfor, at han slog sig på den mere teoretiske side af astronomien, "Iagttagelseslæren", eller den teoretiske statistik, som vi ville sige i dag. Thieles bidrag til statistikkens teori og metode er usædvanligt originale og dybtgående, og han må regnes blandt fagets største pionerer, selvom flere af hans vigtigste bidrag var så langt forud for deres tid, at de gik i glemmebogen og måtte genopdages af andre på et senere tidspunkt. Hans hovedværk er utvivlsomt hans avancerede lærebog i statistik (Thiele 1889) selv om hans artikel om analyse af observationer indsamlet over et tidsforløb (Thiele 1880) om muligt er endnu mere original.

I sit virke som aktuar var Thiele også banebrydende såvel på det teoretiske som på det praktiske område, mens det er uklart for mig, hvorledes hans rent matematiske arbejder skal vurderes, og det samme gælder hans indsats indenfor astronomi. Han har skrevet en talteoretisk afhandling (Thiele 1886) hvis indhold jeg ikke kan bedømme, og der er vist noget, der hedder "Thiele oscillationer" i teorien for kædebrøker, som var et af Thieles yndlingsemner.

Men der er ingen tvivl om, at hans virtuositet og genialitet først og fremmest kom til udtryk i forbindelse med alt, hvad der havde med tal og beregninger at gøre. J. P. Gram skriver i sin nekrolog over Thiele fra 1910, at Thiele var den første dansker som anskaffede og brugte en regnemaskine. Thiele forsøgte ihærdigt (men uden held) at få oprettet et professorat i "regnende matematik", eller "scientific computing", som vi nok ville kalde det i dag. I samarbejde med H. G. Zeuthen og H. Valentiner medvirkede Thiele til, at Caspar Wessels afhandling om de komplekse tal blev oversat til fransk. Thiele bemærkede, at kvadrattallene 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 delte menneskelivet i naturlige perioder. Blandt hans mere usædvanlige synspunkter kunne man finde, at alle først burde lære at regne i 4-talsystemet, hvor man så senere kunne gå videre til base 16 og endelig til base 64 for de virkeligt viderekomne. Han udarbejdede faktisk tabeller over logaritmer med grundtal 4 til brug for Hafnias beregninger. Af mange samtidige blev Thiele tydeligvis opfattet som lidt af en talmystiker, omend jeg ikke selv har læst noget af ham, der peger i den retning.

Komplekse heltalsringe og kvadratiske rester

Thieles mønstre er alle baserede på komplekse heltalsringe. De fleste mønstre er lavet over ringen af gaussiske heltal $\mathbf{Z}[i]$ d.v.s. tallene af form $a+bi$, hvor a og b er reelle heltal. Andre mønstre er lavet over ringen af eisensteinske heltal $\mathbf{Z}[\omega]$, d.v.s. tallene af form $a + b\omega$, hvor a og b er reelle heltal og $\omega = (1 - i\sqrt{3})/2$.

For at lave mønstre med de gaussiske heltal opdeles planen i små kvadrater med sidelængde 1, så tallet $a+bi$ svarer til et kvadrat med centrum (a, b) og sider parallelle med koordinatakserne, alt med hensyn til et sædvanligt, rektangulært koordinatsystem. Mønstrene opstår ved at give hvert felt en bestemt farve, alt efter om det tilsvarende tal besidder en given egenskab. For eksempel lavede Thiele på denne måde et billede af de gaussiske primtal, altså tal $z \in \mathbf{Z}[i]$ som kun kan skrives som et produkt $z=xy$ af andre gaussiske heltal når en af faktorerne er en enhed $(\pm 1, \pm i)$ i $\mathbf{Z}[i]$. Det kan vises, at et naturligt primtal er et gaussisk primtal hvis og kun hvis $p \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$. For eksempel er $5=(2+i)(2-i)$ ikke et gaussisk primtal, mens 7 er.

For at lave mønstre med de eisensteinske heltal skal planen i stedet opdeles i regulære sekskanter og de to nederste af de mønstre, som er afbildet i referatet af Thieles foredrag, er lavet på denne måde.

De afbildede mønstre er alle baseret på såkaldte kvadratiske rester. Et tal siges at være *kvadratisk rest modulo c*, hvis der findes et tal x så $x^2 \equiv d\ (\mathrm{mod}\ c)$. Man kan fortolke dette med hensyn til forskellige heltalsringe. Tilfældet med reelle heltal er klassisk og er beskrevet i næsten enhver lærebog om talteori. Det blev blandt andet studeret i detaljer af Gauss, men mange andre matematikere har haft fingre både i det reelle og i det mere generelle tilfælde. Legendresymbolet $\left(\frac{d}{c}\right)$ defineres til at være 0, hvis c går op i d, det har værdien 1, hvis d er kvadratisk rest modulo c og -1 , hvis det ikke er tilfældet. Programmet MAPLE har en funktion, quadres, som beregner dette symbol i tilfældet med reelle heltal. Hvis c er et ulige primtal som ikke er divisord i d gælder $\left(\frac{d}{c}\right) = d^{(c-1)/2}\ (\mathrm{mod}\, c)$. For ulige primtal d og e gælder endvidere *Gauss' reciprocitetslov*, også kendt som "talteoriens juvel":

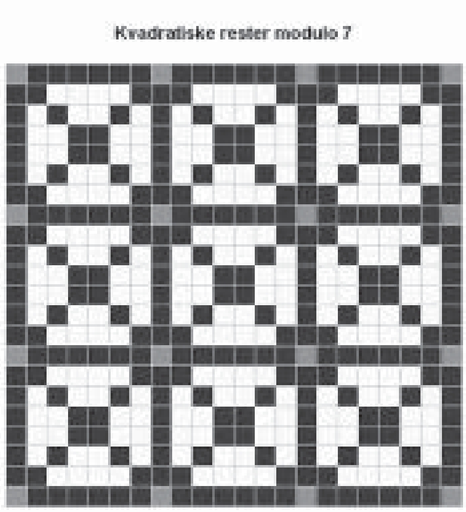
$$\left(\frac{d}{e}\right)\left(\frac{e}{d}\right) = (-1)^{(d-1)(e-1)/4}.$$

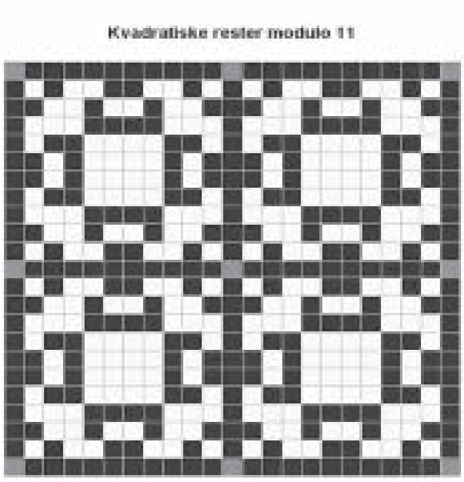
Kvadratisk reciprocitet for Gaussiske heltal blev først studeret af Dirichlet omkring 1835.

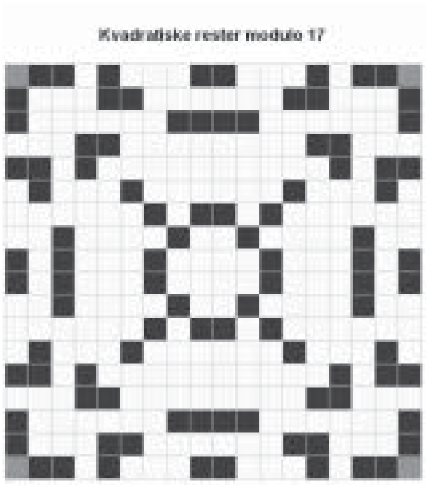
Thieles mønstre med grundtal c opstår ved at man farver feltet svarende til tallet d, hvis og kun hvis $\left(\frac{d}{c}\right) = 1$. Hvis c går op i d gives feltet en afvigende farve. Thieles fem billeder svarer på denne måde (regnet ovenfra og fra venstre mod højre) til grundtallene $14+i$, 19, $17+8i$, $5+4\omega$ og $6+\omega$, hvor de to sidste er eisensteinske heltal, mens de andre er gaussiske heltal. Det skal bemærkes at grundtallene for alle disse mønstre er primtal. Mønstre baseret på sammensatte tal har generelt færre farvede felter. Det skyldes, at hvis $c=ab$ gælder trivielt $x^2 \equiv d\ (\mathrm{mod}\, ab) \Rightarrow x^2 \equiv d\ (\mathrm{mod}\, a) \wedge x^2 \equiv d\ (\mathrm{mod}\, b)$, og det omvendte er tilfældet, hvis a og b er indbyrdes primiske. Så mønstre for sammensatte tal dannes som fællesmængder af primtalsfaktorernes mønstre.

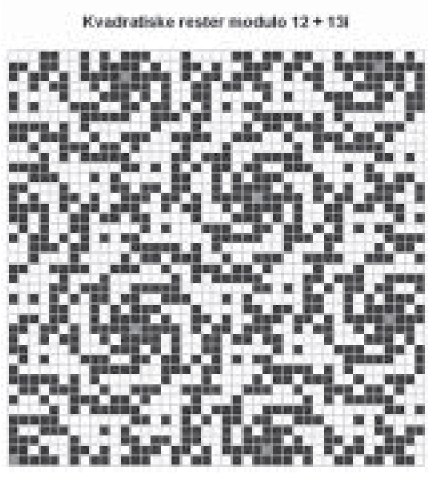
Min kollega Søren Buhl har skrevet et program i det statistiske programmeringssprog R, som hurtigt beregner sådanne billeder, se eksempler nedenfor. Programmet kan hentes på adressen http://www.math.auc.dk/~slb/kurser/basmat-02/software/tile.R og statistikpakken R kan hentes på http://www. R-project.org/, hvis nogen skulle have lyst til at prøve selv.

Ved hjælp af dette kan man more sig med at tegne mange flotte billeder, se eksemplerne nedenfor. Man









kan ikke undgå at bemærke, at billederne har en række iøjnefaldende symmetri- og andre egenskaber, afhængig af hvilket grundtal, der bruges til konstruktionen. Sommetider er hele diagonalen farvet, sommetider er hele den reelle og den imaginære akse farvet. Hvis grundtallet er ikke er reelt eller rent imaginært, optræder spirallignende strukturer, o.s.v. Det overlades med stor fornøjelse til læseren at undersøge teoretisk, hvornår disse fænomener optræder og hvorfor.

Er Thieles mønstre originale?

På nuværende tidspunkt kender jeg ikke svaret. Thiele angiver ingen kilder i sit foredrag, men det var ikke usædvanligt for ham at undlade dette. Af snørklede veje er jeg stødt på et referat af et foredrag, som nordmanden O.- J. Broch holdt i 1874 i l'Association Française pour l'avancement des sciences om Thieles mønstre. Her fremstilles det, som om Thieles påfund er originalt og Broch angiver en række eksempler på mønstrene.

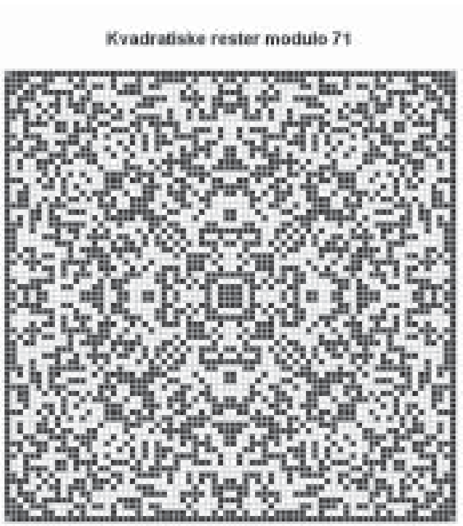
Men jeg er også stødt på en henvisning til en bog (Lucas 1867) af den samtidige franske matematiker Edouard Lucas (1842-1891), hvor titlen kunne antyde, at denne havde lignende ideer. Om Thiele har kendt til Lucas' arbejde eller ej, står under alle omstændigheder hen i det uvisse. Desværre er det i skrivende stund ikke lykkedes mig at komme i nærheden af et eksemplar af Lucas' bog, så jeg har ikke kunnet undersøge, hvad den mere præcist indeholder.

Hvad forestiller gulvet i Hafnia?

Selvom man nu har et billede af gulvet i Hafnias bygning foran sig, er der et stykke vej til at afgøre, hvordan det er konstrueret, og om det overhovedet er konstrueret som beskrevet ovenfor.

Da jeg i efterårssemestret 2002 skulle være projektvejleder på basisuddannelsen, var det derfor naturligt at foreslå et projekt om talmønstre. De studerende skulle gerne have et projektemne som kunne aktivere dem, som lå indenfor deres matematiske rækkevidde umiddelbart efter gymnasieskolen, som gerne måtte være lidt spændende, og hvor de ikke kunne undgå at lære både noget matematik og noget om den matematiske arbejdsproces. I sagen om talmønstrene startede studenter og vejleder stort set på samme sted, nemlig på bar bund. Til min store glæde var der ikke mindre end tre projektgrupper med i alt 19 studerende som bed på krogen, og der måtte hidkaldes hjælp fra to kolleger (Poul Svante Eriksen og Hans Hüttel) for at alle grupperne kunne få en vejleder.

Min glæde blev ikke mindre, da det i løbet af november måned lykkedes min egen projektgruppe at løse gulvets gåde, i hvert fald delvist. Konkret var det en enkelt af de studerende (Thomas Ellebæk) , som til slut ved hjælp af empiri og systematisk ihærdighed kunne identificere, at gulvet på den ovenfor beskrevne måde var et billede af de kvadratiske rester for det komplekse primtal 71. Der er dog et par modifikationer, som jeg skal komme tilbage til. Det viste billede af de kvadratiske rester modulo 71 er beregnet ved hjælp af Søren Buhls program.



Nu kunne jeg så ærgre mig grundigt over ikke at have gættet på dette tal fra starten. Hafnias bygning blev påbegyndt i 1910 og stod færdigt i 1912. Talmystikeren Thiele var netop 71 år gammel i 1910, som også blev hans dødsår. Så gulvet markerer uden tvivl hans egen alder på det pågældende tidspunkt. Om Thiele ligefrem selv har vidst, at det skulle blive hans gravmæle, er vel tvivlsomt, men det er dog tankevækkende.

Men hvori består modifikationerne? Jo, for det første er Hafnias gulv trefarvet, idet de farvede fliser i mønstret enten er røde eller grønne. Det er hverken lykkedes de studerende eller de involverede vejledere, at finde ud af, hvad forskellen er på de røde og grønne felter. Så det forbliver en udfordring til foreningens medlemmer. Men herudover er der i alt 9 fliser, som ikke ligger korrekt i forhold til det beregnede mønster.

Den ene af disse bryder mønstrets symmetri. Mønstret er symmetrisk omkring de to hovedakser og de to hoveddiagonaler i forhallen. Men hvis koordinatsystemet orienteres således, at førsteaksen går vinkelret på fotografens synslinie og andenaksen peger væk fra kameraet, er flisen med koordinater (25,45) farvet rød, mens alle spejlinger af denne flise i symmetriakserne er ufarvede. Nu siges det at være en gammel tradition blandt fliselæggere, at der skal være en enkelt fejl i sådant et gulvmønster for at det ikke skal bringe uheld over bygherren. Det er efter al sandsynlighed forklaringen på den enkelte forkerte flise.

De resterende 8 ukorrekte fliser består af flisen med koordinater (27,35) og de syv spejlbilleder af samme. De tilsvarende komplekse tal er kvadratiske rester modulo 71, men er ikke farvede i gulvet. Igen er det uklart, hvad forklaringen er. På grund af symmetrien kunne det i princippet være en fejl i Thieles beregninger, som derefter er blevet spejlet 7 gange, men Thiele lavede nu meget sjældent fejl.

Fejlen er snarere opstået under byggeprocessen. Det ville i hvert fald være menneskeligt, og siden symmetrien ikke er brudt, bemærker man næppe noget, medmindre man er usædvanlig skrap til hovedregning med komplekse kvadratiske rester.

Hvad nu?

Der er flere løse ender i denne sag. Dels kunne det være morsomt at se, hvordan man i dag ville lave en egentlig talteoretisk undersøgelse af den slags mønstre og deres symmetriegenskaber, samt algoritmer til at konstruere dem. Dels er der stadig gåden om de grønne og de røde felter, som kræver en løsning. Men nogen må også på jagt i Hafnias kældre efter papirer, som beskriver, hvorledes mønstret rent konkret blev beregnet i sin tid. Der findes papkasser med papirer fra byggesagen, men endnu er der ikke fundet noget i dem, som direkte vedrører gulvet i forhallen.

Under alle omstændigheder er det fantastisk i sig selv, at der findes sådan et stykke matematisk kunst i Danmark. Det bør sikres, at gulvet og dets historie ikke går til.

Tak

En tak til alle, som har hjulpet mig på den ene eller den anden måde med denne sag. Bjarne Toft fik fat i Thieles foredrag til mig, Johan P. Hansen og Martin Raussen har hjulpet mig med talteoretisk litteratur, og Anders Hald havde franske forbindelser. Mange andre er allerede nævnt direkte i selve artiklen. Uden deres hjælp og indsats var jeg ingen vegne kommet. Søren Buhl skal nævnes specielt, både for hans uvurderlige program og for præcise kommentarer til denne artikel.

Litteratur

S. L. Lauritzen. Thiele: Pioneer in Statistics. Oxford University Press, Oxford, 2002.

E. Lucas. Application de l'arithmétique a la construction de l'armure des satins réguliers. G. Retaux, Paris, 1867.

T. N. Thiele. Om talmønstre. Forhandlingerne ved de skandinaviske Naturforskeres 11te Møde i København, Juli 1873, side 192-195. København, 1874.

T. N. Thiele. Om Anvendelse af mindste Kvadraters Methode i nogle Tilfælde, hvor en Komplikation af visse Slags uensartede tilfældige Fejlkilder giver Fejlene en 'systematisk' Karakter. Det kongelige danske Videnskabernes Selskabs Skrifter, 5. Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afdeling, 12:381-408, 1880.

Fransk version: Sur la compensation de quelques erreurs quasi-systématiques par la méthode des moindres carrés.} C. A. Reitzel, København, 1880.

T. N. Thiele. Om Definitionerne for Tallet, Talarterne og de tallignende Bestemmelser. Det kongelige danske Videnskabernes Selskabs Skrifter, 6. Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afdeling, 2:453-514, 1886.

T. N. Thiele. Almindelig Iagttagelseslære: Sandsynlighedsregning og mindste Kvadraters Methode. C. A. Reitzel, København, 1889.

Gulvet i Hafnias forhal (Foto: Jan Parner, Codan Forsikring A/S)