DET NATURVIDENSKABELIGE FAKULTET
KØBENHAVNS UNIVERSITET

Kandidatprojekt

Sune Precht Reeh

Homotopiteori for pomængden af p-undergrupper i en endelig gruppe

Vejleder: Jesper Grodal

Afleveret: 15. december 2009

Resumé

I projektet introduceres indledningsvis den grundlæggende teori for det simplicielle kompleks knyttet til en partielt ordnet mængde, samt topologiske egenskaber ved dette simplicielle kompleks.

Dernæst indføres de partielt ordnede mængder $\mathcal{S}_p(G)$ og $\mathcal{A}_p(G)$ af visse ikke-trivielle p-undergrupper i en gruppe G. Grundlæggende topologiske egenskaber ved $\mathcal{S}_p(G)$ og $\mathcal{A}_p(G)$ præsenteres – herunder fremsættes Quillens formodning om hvornår $\mathcal{S}_p(G)$ er kontraktibel.

I de efterfølgende afsnit arbejdes med resultater om *sfæriske* og *Cohen-Macaulay* partielt ordnede mængder, og der bliver blandt andet gennemgået tilstrækkelige kriterier for at $\mathcal{A}_p(G)$ har disse egenskaber.

Til slut benyttes den præsenterede teori til at bevise Quillens formodning for endelige opløselige grupper.

Summary

The first section of this project introduces the fundamental theory of the simplicial complex associated to at partially ordered set, as well as topological properties of this simplicial complex.

Next we introduce the partially ordered sets $\mathcal{S}_p(G)$ and $\mathcal{A}_p(G)$ consisting of certain non-trivial p-subgroups in a group G. Fundamental properties of $\mathcal{S}_p(G)$ and $\mathcal{A}_p(G)$ are presented – and amongst these we state Quillen's conjecture concerning the possible contractibility of $\mathcal{S}_p(G)$.

In the following sections we work with partially ordered sets that are *spherical* or *Cohen-Macaulay*, and we state sufficient criterions for $\mathcal{A}_p(G)$ to have these properties.

At the end, we use the presented theory to prove Quillen's conjecture in the case of finite solvable groups.

Indhold

Forord

Konventioner

I projektet benyttes betegnelsen *pomængde* som en forkortelse af *partielt ordnet mængde*. Dette er inspireret af den engelske forkortelse “poset” for “partially ordered set”.

Igennem hele projektet vil p være et primtal, og G er altid en gruppe. At $H \subseteq G$ er en undergruppe i G noteres $H \leq G$, og tilsvarende betyder $H < G$ at H er en ægte undergruppe.

Projektoversigt

I afsnit 1 arbejdes med generelle pomængder (partielt ordnede mængder). Fra enhver pomængde X kan man konstruere et tilhørende topologisk rum $|X|$, og første afsnit omhandler den tætte sammenhæng mellem egenskaber for X og topologiske egenskaber for $|X|$. Gennem konstruktionen af det simplicielle kompleks $|X|$, tillægger vi også X topologiske egenskaber: Hvis $|X|$ er sammenhængende, siger vi at X er sammenhængende; hvis $|X|$ er kontraktibel, siger vi at X er kontraktibel; og så videre. Afsnit 1 beskriver desuden hvordan forskellige standardoperationer på pomængder resulterer i operationer på de tilhørende topologiske rum.

I afsnit 2 tager vi udgangspunkt i en gruppe G, og introducerer pomængden $\mathcal{S}_p(G)$ af ikke-trivielle p-undergrupper i G. Vi indfører også den mindre pomængde $\mathcal{A}_p(G)$ af ikke-trivielle, elementar-abelske p-undergrupper, og ser at $\mathcal{S}_p(G)$ og $\mathcal{A}_p(G)$ altid giver homotopiækvivalente simplicielle komplekser. Afsnit 2 beskriver også hvordan egenskaber ved gruppen G afspejles i egenskaber for $\mathcal{S}_p(G)$; specielt fremsættes Quillens formodning om at $\mathcal{S}_p(G)$ er kontraktibel for en endelig gruppe G netop når G har en ikke-triviel, normal p-undergruppe.

I afsnit 3 introduceres hvad det vil sige at en pomængde er *sfærisk* eller *Cohen-Macaulay*. Begge egenskaber lægger strukturelle krav på pomængden, og i afsnit 4 undersøges hvornår pomængden $\mathcal{A}_p(G)$ opfylder disse krav. Afsnittene 3 og 4 bygger op til at vi som projektets afsluttende hovedresultat i afsnit 5 kan vise at Quillens formodning er sand såfremt G er endelig og opløselig.

Efter projektets fem hovedafsnit følger tre appendices A, B og C. Disse appendices omhandler nogle hjælpe-resultater inden for henholdsvis topologi, algebraisk topologi og algebra. Resultaterne benyttes i projektets hovedafsnit men er ikke direkte relaterede til indholdet i resten af projektet.

1 Det simplicielle kompleks associeret til en pomængde

Lad X være en pomængde (partielt ordnet mængde). Pomængden X kan betragtes som en kategori: Objekterne er elementerne i X, og der er en unik morfi $x \to x'$ når $x \leq x'$ ($x, x' \in X$).

For pomængden X kan vi således betragte de sædvanlige konstruktioner af nerven $N(X)$ der er en simpliciel mængde, og det klassificerende rum $|N(X)|$. Med lidt genbrug af notation betegner vi det klassificerende rum ved notationen $|X|$.

Det viser sig dog at konstruktionen af $|X|$ kan forsimples en del når X er en pomængde, i dette tilfælde viser $|X|$ sig at være et simplicielt kompleks med netop ét simpleks for hver endelig kæde i pomængden X.

Et n-simpleks i nerven $N(X)$ er som bekendt en følge af n morfier $x_0 \to x_1 \to \cdots \to x_n$ i X, dvs. en følge af $n+1$ elementer $x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n$ i pomængden X. En degenerations-afbildning s_i i definitionen af nerven indsætter en identitetsmorfi i følgen, hvilket i kontekst af pomængder bliver

$$s_i(x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n) = (x_0 \leq \cdots \leq x_i = x_i \leq \cdots \leq x_n)$$

hvor vi altså duplikerer x_i og indsætter et lighedstegn.

De degenererede n-simplekser i $N(X)$ er således følger $x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n$ der indeholder et eller flere lighedstegn. Et ikke-degenereret n-simpleks i $N(X)$ er dermed en følge $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, dvs. en n-kæde i pomængden X.

En side-afbildning d_i i nerven bliver i pomængde-kontekst til afbildningen

$$d_i(x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n) = (x_0 \leq \cdots \leq x_{i-1} \leq x_{i+1} \leq \cdots \leq x_n)$$

der blot fjerner et element fra følgen.

Bemærkning 1.1. Specielt ses at d_i anvendt på et ikke-degenereret simpleks (en n-kæde i X), igen giver et ikke-degenereret simpleks.

Det er denne egenskab der er den vigtige forskel på pomængder og generelle kategorier (hvor et ikke-degenereret simpleks godt kan have en degenereret side), og det resulterer blandt andet i at vi helt kan se bort fra degenererede simplekser i konstruktionen af det klassificerende rum.

1.1 Det klassificerende rum

Et n-simpleks $f = (x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n)$ i $N(X)$ kan betragtes som en ordningsbevarende afbildning f fra pomængden $\underline{n} := \{1, \ldots, n\}$ til pomængden X. Hvis $(x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n)$ indeholder lighedstegn, er afbildningen f ikke injektiv. Lad $C_f \subseteq X$ være kæden i X hvor vi har udeladt eventuelle lighedstegn i følgen $(x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n)$. Kæden C_f kan da betragtes som en injektion $C_f \colon \underline{k} \xrightarrow{\cong} C_f \subseteq X$ hvor k er længden af C_f.

Afbildningen f kan faktoriseres entydigt som en (ordningsbevarende) surjektion $s^f \colon \underline{n} \twoheadrightarrow \underline{k}$ efterfulgt af injektionen $C_f \colon \underline{k} \to X$.

$$f \colon \underline{n} \overset{s^f}{\twoheadrightarrow} \underline{k} \xrightarrow{C_f} X \tag{1.1}$$

I $N(X)$ får vi således $f = C_f \circ s^f = (s^f)^*(C_f)$, og på denne måde kommer ethvert simpleks f fra et ikke-degenereret simpleks C_f. Dette gælder også for kategorier generelt, men for pomængder gælder ydermere at C_f spiller sammen med s_i og d_i:

Lad f være et n-simpleks, og betragt $s_i(f) = (s^i)^*(f) = f \circ s^i$. Vi kan som bemærket faktorisere $f = C_f \circ s^f$ hvor C_f er en injektion og s^f er en surjektion. Vi får da $s_i(f) = C_f \circ (s^f \circ s^i)$, og idet både s^f og s^i er surjektive, er dette faktoriseringen (1.1) af $s_i(f)$. Der gælder derfor at $C_{s_i(f)} = C_f$ og $s^{s_i(f)} = s^f \circ s^i$.

Alternativt kan vi se simplekset $s_i(f)$ som f hvor der er tilføjet et lighedstegn. Når vi fjerner samtlige lighedstegn fra $s_i(f)$ for at opnå $C_{s_i(f)}$ får vi naturligvis det samme som hvis vi nøjes med at fjerne lighedstegnene fra f, så $C_{s_i(f)} = C_f$.

Vi betragter nu i stedet $d_i(f)$, og benytter igen faktoriseringen $f = C_f \circ s^f$. Den surjektive afbildning $s^f : \underline{n} \to \underline{k}$ kan skrives som en sammensætning af degenerations-afbildninger: $s^f = s^{j_r} \circ \cdots \circ s^{j_2} \circ s^{j_1}$. Vi har således

$$d_i(f) = (C_f \circ s^{j_r} \circ \cdots \circ s^{j_1}) \circ d^i \tag{1.2}$$

Vi ved at der for en sammensætning $s^j d^i$ gælder enten $s^j d^i = id$ eller $s^j d^i = d^{i'} s^{j'}$ for passende i', j'. I udtrykket (1.2) vil d^i altså enten gå ud med et af s^j'erne og i så fald er $C_{d_i(f)} = C_f$ og $s^{d_i(f)} = s^f \circ d^i$; eller der vil gælde

$$d_i(f) = (C_f \circ d^{i'}) \circ s^{j'_r} \circ \cdots \circ s^{j'_1} = d_{i'}(C_f) \circ s^{j'_r} \circ \cdots \circ s^{j'_1}.$$

Fra tidligere ved vi at $d_{i'}(C_f)$ er ikke-degenereret idet C_f er ikke-degenereret, og vi får således $C_{d_i(f)} = d_{i'}(C_f)$ og $d^{i'} \circ s^{d_i(f)} = s^f \circ d^i$.

Det er dette sidste tilfælde $C_{d_i(f)} = d_{i'}(C_f)$ der vil fejle for generelle kategorier, og forhindre os i af forenkle konstruktionen af det klassificerende rum. For pomængder kan man dog godt udelade de degenererede simplekser samt degenerations-afbildningerne:

Proposition 1.2. *Lad X være en pomængde. Lad desuden X_n være mængden af (eventuelt degenererede) n-simplekser i $N(X)$, og lad $C_n(X)$ være mængden af n-kæder i pomængden X (dvs. de ikke-degenererede simplekser i $N(X)$).*

I så fald er den sædvanlige konstruktion af det klassificerende rum,

$$A := \coprod_{n \geq 0} X_n \times \Delta^n \Big/ (\theta^*(f), \xi) \sim (f, \theta_*(\xi)) \text{ for } \theta \colon \underline{k} \to \underline{n},\ f \in X_n \text{ og } \xi \in \Delta^k,$$

homeomorf med konstruktionen hvor der kun benyttes ikke-degenererede simplekser:

$$B := \coprod_{n \geq 0} C_n(X) \times \Delta^n \Big/ (i^*(C), \xi) \sim (C, i_*(\xi)) \text{ for } i \colon \underline{k} \hookrightarrow \underline{n},\ C \in C_n(X) \text{ og } \xi \in \Delta^k.$$

Bevis. Vi har umiddelbart en veldefineret afbildning $\varphi \colon B \to A$ givet ved

$$\varphi(C, \xi) := (C, \xi),$$

og φ er kontinuert idet φ er kontinuert på hvert simpleks i $\coprod_{n \geq 0} C_n(X) \times \Delta^n$.

Den anden vej har vi $\psi\colon A \to B$ givet ved

$$\psi(f,\xi) := (C_f, (s^f)_*(\xi)).$$

Hvis ψ er veldefineret, er ψ også kontinuert idet $\xi \mapsto (s^f)_*(\xi)$ er kontinuert for ethvert simpleks i $\coprod_{n\geq 0} X_n \times \Delta^n$.

For at vise at ψ er veldefineret ser vi på to ækvivalente punkter $(\theta^*(f),\xi) \sim (f, \theta_*(\xi))$ i A, og viser at de afbildes til ækvivalente punkter i B. Idet s^i'erne og d^i'erne frembringer alle $\theta\colon \underline{k} \to \underline{n}$ $(k, n \geq 0)$, er det nok at tjekke tilfældene $\theta = s^i$ og $\theta = d^i$.

Hvis $\theta = s^i$ gælder som tidligere bemærket at $C_{s_i(f)} = C_f$ og $s^{s_i(f)} = s^f \circ s^i$. I B får vi dermed at

$$\psi(s_i(f),\xi) = (C_{s_i(f)}, (s^{s_i(f)})_*(\xi)) = (C_f, (s^f)_*((s^i)_*(\xi))) = \psi(f, (s^i)_*(\xi)).$$

Hvis $\theta = d^i$, vil der enten gælde $C_{d_i(f)} = C_f$ og $s^{d_i(f)} = s^f \circ d^i$, eller også gælder $C_{d_i(f)} = d_{i'}(C_f)$ hvor $d^{i'} \circ s^{d_i(f)} = s^f \circ d^i$. I første tilfælde får vi

$$\psi(d_i(f),\xi) = (C_{d_i(f)}, (s^{d_i(f)})_*(\xi)) = (C_f, (s^f)_*((d^i)_*(\xi))) = \psi(f, (d^i)_*(\xi));$$

og i andet tilfælde gælder

$$\begin{aligned}\psi(d_i(f),\xi) &= (C_{d_i(f)}, (s^{d_i(f)})_*(\xi)) = (d_{i'}(C_f), (s^{d_i(f)})_*(\xi)) \\ &\sim (C_f, (d^{i'} \circ s^{d_i(f)})_*(\xi)) = (C_f, (s^f)_*((d^i)_*(\xi))) = \psi(f, (d^i)_*(\xi)).\end{aligned}$$

Samlet ser vi altså at $\psi\colon A \to B$ er veldefineret.

For ethvert ikke-degenereret simpleks f, er $C_f = f$ og $s^f = id$. For kompositionen $\psi\varphi\colon B \to B$ gælder derfor

$$\psi\varphi(C,\xi) = \psi(C,\xi) = (C,\xi),$$

så $\psi\varphi = id_B$. For kompositionen $\varphi\psi\colon A \to A$ får vi

$$\varphi\psi(f,\xi) = \varphi(C_f, (s^f)_*(\xi)) = (C_f, (s^f)_*(\xi)) \sim ((s^f)^*(C_f), \xi) = (f,\xi),$$

så der gælder også $\varphi\psi = id_A$. □

Definition 1.3 (Det klassificerende rum)**.** Når X er en pomængde, er *det klassificerende rum* $|X|$ et simplicielt kompleks: Der er netop ét n-simpleks for hver n-kæde C i X. De $n+1$ sider i simplekset hørende til kæden C, er de $n+1$ simplekser hørende til delkæderne i C af længde $n-1$. Som i ethvert simplicielt kompleks, er et n-simpleks i $|X|$ entydigt bestemt ved de $n+1$ elementer i X der udgør hjørnerne i simplekset.

Det klassificerende rum $|X| = |N(X)|$ kan for pomængder defineres ved

$$|X| := \coprod_{n\geq 0} C_n(X) \times \Delta^n \Big/ (i^*(C),\xi) \sim (C, i_*(\xi)) \text{ for } i\colon \underline{k} \hookrightarrow \underline{n},\ C \in C_n(X) \text{ og } \xi \in \Delta^k.$$

Til tider kan vi også have brug for den sædvanlige definition hvor vi medtager de degenererede simplekser:

$$|X| := \coprod_{n\geq 0} X_n \times \Delta^n \Big/ (\theta^*(f),\xi) \sim (f, \theta_*(\xi)) \text{ for } \theta\colon \underline{k} \to \underline{n},\ f \in X_n \text{ og } \xi \in \Delta^k.$$

Definition 1.4. Vi knytter topologiske egenskaber til en pomængde X via det topologiske rum $|X|$. Pomængden X siges at have en topologisk egenskab hvis $|X|$ har den pågældende egenskab.

Eksempelvis siges X at være *kontraktibel* såfremt $|X|$ er kontraktibel.

Proposition 1.5. *Lad $f\colon X \to Y$ være en afbildning af pomængder. Da inducerer f en afbildning $|f| : |X| \to |Y|$.*

Bevis. Da f er ordningsbevarende, vil en kæde C i X blive sendt til en (eventuelt degenereret) kæde i Y. Desuden sender f delkæder af C til de tilsvarende delkæder af $f(C)$. Afbildningen f er altså simpleks-bevarende og bevarer siderne af simplekser. Der induceres derfor en veldefineret afbildning af simplicielle komplekser $|f| : |X| \to |Y|$ der sender simplekset hørende til C over i det eventuelt degenererede simpleks hørende til $f(C)$. Afbildningen $|f|$ er kontinuert idet den er kontinuert på hvert simpleks i $|X|$. □

Bemærkning 1.6. Lad $A \subseteq X$ være en delpomængde, og lad $f\colon X \to Y$ være ordningsbevarende. Det simplicielle kompleks $|A|$ ligger umiddelbart som delkompleks i $|X|$ (idet kæder i A specielt er kæder i X). Definitionen af den inducerede afbildning $|f|$ giver så umiddelbart at

$$|f|\,\Big|_{|A|} = \Big|f|_A\Big|\,.$$

Proposition 1.7. *Lad $X \times Y$ være produktet af pomængderne X og Y, dvs. $X \times Y$ er ordnet med $(x, y) \leq (x', y')$ hvis $x \leq x'$ og $y \leq y'$. Projektionerne π_X og π_Y inducerer da en homeomorfi*

$$|X \times Y| \xrightarrow{\cong} |X| \times |Y|\,,$$

hvor produktet til højre skal tages i kategorien af kompakt frembragte Hausdorff rum. Såfremt X og Y er endelige, er dette blot det normale topologiske produkt.

Bevis. Resultatet følger af at nerve-funktoren $N\colon \mathit{Cat} \to \mathit{sSet}$ bevarer alle limits, herunder produkter, og at geometrisk realisation $|\cdot| : \mathit{sSet} \to \mathit{CGHaus}$ bevarer endelige produkter (hvor CGHaus er kategorien af kompakt frembragte Hausdorff rum).

Beviset for at $|\cdot| : \mathit{poSet} \to \mathit{CGHaus}$ bevarer endelige produkter bliver ikke simplere for pomængder end for generelle kategorier; og da beviset desuden er forholdsvis omfattende, udelades det. Der henvises i stedet til [Gra03, Chapter 2]. □

1.2 Homotopier

Proposition 1.8. *Lad $f, g\colon X \to Y$ være afbildninger af pomængder. Hvis f og g opfylder $f(x) \leq g(x)$ for alle $x \in X$, så er realisationerne $|f|$ og $|g|$ homotope.*

Bevis. Vi definerer en afbildning $H\colon X \times \{0 < 1\} \to Y$ ved $H(x, 0) = f(x)$ og $H(x, 1) = g(x)$ for $x \in X$. Denne afbildning er ordningsbevarende idet vi har:

- I tilfældet $(x, 0) \leq (x', 0)$, gælder $x \leq x'$, så $H(x, 0) = f(x) \leq f(x') = H(x', 0)$ da f er ordningsbevarende. Tilfældet $(x, 1) \leq (x', 1)$ giver tilsvarende $H(x, 1) = g(x) \leq g(x') = H(x', 1)$.

- I tilfældet $(x, 0) \leq (x', 1)$, får vi igen fra ordningen af $X \times \{0 < 1\}$ at $x \leq x'$. Nu fås straks per antagelse at $H(x, 0) = f(x) \leq f(x') \leq g(x') = H(x', 1)$.

Da afbildningen $H\colon X \times \{0 < 1\} \to Y$ er ordningsbevarende, induceres en afbildning $|H| : |X \times \{0 < 1\}| \to |Y|$.

Pomængden X ligger indlejret i $X \times \{0 < 1\}$ som $X \times \{0\}$ og $X \times \{1\}$. Idet $H|_{X\times\{0\}} = f$, følger jf. bemærkning 1.6 at $|H|\,\big|_{|X\times\{0\}|} = \big|H|_{X\times\{0\}}\big| = |f|$. Tilsvarende gælder $|H|\,\big|_{|X|\times\{1\}} = |g|$.

Ifølge proposition 1.7 gælder $|X \times \{0 < 1\}| \cong |X| \times |\{0 < 1\}|$. Det simplicielle kompleks $|\{0 < 1\}|$ består af ét 1-simpleks med to forskellige endepunkter 0 og 1 – rummet $|\{0 < 1\}|$ er altså blot enhedsintervallet I.

Vi har således en afbildning $|H| : |X| \times I \to |Y|$ med $|H|\,(x, 0) = |f|\,(x)$ og $|H|\,(x, 1) = |g|\,(x)$ for alle $x \in |X|$, så $|H|$ er en homotopi mellem $|f|$ og $|g|$. □

Definition 1.9. En pomængde X kaldes *konisk kontraktibel* hvis der findes et element $x_0 \in X$ og en afbildning $f\colon X \to X$ sådan at $x \leq f(x) \geq x_0$ for alle $x \in X$.

Hvis dette er tilfældet, giver proposition 1.8 først en homotopi $id_{|X|} \simeq |f|$ og dernæst en homotopi $|f| \simeq c_{x_0}$ (hvor $c_{x_0}\colon |X| \to |X|$ er den konstante afbildning der sender alt i x_0). Vi får således en homotopi mellem $id_{|X|}$ og en konstant afbildning, c_{x_0}, så $|X|$ er kontraktibel.

Bemærkning 1.10. Lad K være et simplicielt kompleks. Vi kan da se på den barycentriske underinddeling af K: I den barycentriske underinddeling har vi et punkt for hvert simpleks i K; og vi har et k-simpleks i underinddelingen hver gang vi har en følge af simpleks-inklusioner $s_0 \subsetneq s_1 \subsetneq \cdots \subsetneq s_k$.

Hvis vi danner pomængden $S(K)$ af simplekser i K (ordnet ved inklusion), ser vi at kæderne i $S(K)$ netop svarer til simplekserne i den barycentriske underinddeling. Den barycentriske underinddeling er altså det simplicielle kompleks $|S(K)|$; og vi har dermed en homeomorfi $|S(K)| = K$.

Lad os nu se på $S(K)$ i tilfældet hvor $K = C(L)$ er keglen på et simplicielt kompleks L. Ethvert simpleks s i $S(K)$ er da indeholdt i et simpleks s_0 der indeholder keglens top 0 (vi inkluderer blot keglens toppunkt såfremt det mangler i s). I pomængden $S(K)$ har vi således $s \subseteq s_0 \supseteq 0$, så $S(K)$ er konisk kontraktibel. Idet $|S(K)| = K$, stemmer dette med at keglen K er kontraktibel – og det er herfra at det "koniske" i *konisk kontraktibel* stammer.

1.3 Homotopiækvivalenser

For at vise at to pomængder X og Y er homotopiækvivalente, er den basale fremgangsmåde at finde brugbare afbildninger $f\colon X \to Y$ og $g\colon Y \to X$, for så at benytte proposition 1.8 til at fremstille homotopier $fg \simeq id_Y$ og $gf \simeq id_X$.

Vi vil nu tage udgangspunkt i et generelt kategoriteoretisk resultat for at fremsætte metoder til at vise homotopiækvivalens i tilfælde hvor den basale fremgangsmåde er utilstrækkelig.

Definition 1.11. Lad $f\colon X \to Y$ være en afbildning af pomængder, og lad $y \in Y$. Vi definerer da følgende delpomængder af X:

$$f/y = \{x \in X \mid f(x) \leq y\},$$
$$y\backslash f = \{x \in X \mid f(x) \geq y\}.$$

Sætning 1.12 (Quillens sætning A)**.** *Quillens sætning A er et resultat der generelt omhandler funktorer mellem små kategorier. I kontekst af pomængder kommer sætningen til at lyde således:*

Lad $f\colon X \to Y$ være en afbildning af pomængder, og antag at f/y er kontraktibel for alle $y \in Y$. Da er $|f| : |X| \to |Y|$ en homotopiækvivalens.

Den samme konklusion gælder hvis vi alternativt har $y\backslash f$ kontraktibel for alle $y \in Y$.

Bevis. Se [Qui73, Theorem A]. □

Definition 1.13. En delpomængde $S \subseteq X$ kaldes *nedadtil afsluttet* såfremt der gælder

$$(x' \leq x \text{ og } x \in S) \Rightarrow x' \in S.$$

Begrebet *opadtil afsluttet* defineres tilsvarende.

Lad X og Y være pomængder, og lad Z være en nedadtil afsluttet delmængde af $X \times Y$. Lad desuden $\pi_1 : Z \to X$ og $\pi_2 : Z \to Y$ være restriktionerne af de to projektioner.

For et element $x \in X$, er fiberen $\pi_1^{-1}(x) \subseteq Z$ isomorf med pomængden $Z_x := \{y \in Y \mid (x,y) \in Z\}$. Delmængden $Z_x \subseteq Y$ er afsluttet nedadtil, hvilket følger af at Z er afsluttet nedadtil:

$$(y \in Z_x \wedge y' \leq y) \Rightarrow ((x,y) \in Z \wedge (x,y') \leq (x,y)) \Rightarrow (x,y') \in Z \Rightarrow y' \in Z_x.$$

Tilsvarende er $Z_y := \{x \in X \mid (x,y) \in Z\}$ en nedadtil afsluttet delmængde af X.

Proposition 1.14. *Lad $Z \subseteq X \times Y$ være en nedadtil afsluttet delpomængde. Hvis Z_x er kontraktibel for ethvert $x \in X$, så er $p_1\colon Z \to X$ en homotopiækvivalens.*

Bevis. Pomængden $x\backslash p_1$ består af alle $(x',y) \in Z$ for hvilke $x' \geq x$. Vi definerer afbildningerne $u\colon Z_x \to x\backslash p_1$ og $v\colon x\backslash p_1 \to Z_x$ ved at sætte $u(y) = (x,y)$ og $v(x',y) = y$. Afbildningen v er veldefineret idet $(x',y) \in Z$ med $x' \geq x$ giver at $(x,y) \in Z$ per afsluttethed, så $y \in Z_x$. Vi har nu at

$$vu(y) = v(x,y) = y, \qquad \text{så } vu = id_{Z_x};$$
$$uv(x',y) = u(y) = (x,y) \leq (x',y), \qquad \text{så } vu \simeq id_{x\backslash p_1}.$$

Dermed er $x\backslash p_1$ og Z_x homotopiækvivalente, så $x\backslash p_1$ er kontraktibel for alle $x \in X$ idet Z_x er kontraktibel per antagelse. Ifølge Quillens sætning A, 1.12, er p_1 altså en homotopiækvivalens. □

Korollar 1.15. *Hvis både Z_x og Z_y er kontraktible for alle $x \in X$ og $y \in Y$, så er X og Y homotopiækvivalente.*

Bevis. I så fald er både $p_1\colon Z \to X$ og $p_2\colon Z \to Y$ homotopiækvivalenser ifølge proposition 1.14. □

1.4 Join af pomængder

Definition 1.16. Givet to pomængder X og Y danner vi *join*'et $X * Y$ der er en ny pomængde. Pomængden $X*Y$ er den disjunkte forening af X og Y; ordningen på $X*Y$ er en kombination af ordningerne fra X og Y hvor alle elementerne i X bliver ordnet under elementerne i Y:

$$\begin{aligned}
&x \leq x' \text{ i } X * Y \text{ hvis } x \leq x' \text{ i } X;\\
&y \leq y' \text{ i } X * Y \text{ hvis } y \leq y' \text{ i } Y;\\
&x < y \ \text{ i } X * Y \text{ for alle } x \in X \text{ og } y \in Y.
\end{aligned}$$

Lemma 1.17. *For pomængder X og Y gælder*

$$|X * Y| = |X| * |Y|\,.$$

Her sætter vi $|X| * \emptyset = |X|$ og $\emptyset * |Y| = |Y|$.

Bevis. Påstanden gælder oplagt hvis $Y = \emptyset$ med $|X * \emptyset| = |X| = |X| * \emptyset$, og tilsvarende hvis $X = \emptyset$. Antag derfor $X, Y \neq \emptyset$.

Joinet af de to rum $|X|$ og $|Y|$ består af linjestykker fra ethvert punkt i $|X|$ til ethvert punkt i Y. Det kan eksempelvis være givet ved

$$|X| * |Y| := |X| \times |Y| \times I/(x, y_1, 0) \sim (x, y_2, 0), (x_1, y, 1) \sim (x_2, y, 1) \tag{1.3}$$

for $x, x_1, x_2 \in |X|$ og $y, y_1, y_2 \in |Y|$.

Da $|X|$ og $|Y|$ er simplicielle komplekser, bliver $|X|*|Y|$ igen et simplicielt kompleks; og simplekser i $|X| * |Y|$ er:

- C, hvor C er et simpleks i $|X|$,
- D, hvor D er et simpleks i $|Y|$,
- $C * D$, hvor C er et simpleks i $|X|$ og D er et simpleks i $|Y|$.

  Lad $\{x_0, \ldots, x_k\}$ være hjørnerne i et k-simpleks C i $|X|$, og lad $\{y_0, \ldots, y_n\}$ være hjørnerne i et n-simpleks D i $|Y|$. Joinet $C * D$ bliver da et $k + n + 1$-simpleks i $|X| * |Y|$ med hjørnerne $\{x_0, \ldots, x_k, y_0, \ldots, y_n\}$.

Simplekserne i $|X| * |Y|$ har altså hjørner $\sigma \sqcup \tau$, hvor σ er mængden af hjørner i et simpleks i $|X|$, og τ er hjørnerne i et simpleks i $|Y|$ – eventuelt kan σ eller τ være tomme (dog ikke begge samtidig).

Et simpleks i $|X|$ har hjørner der danner en kæde i X, og tilsvarende for $|Y|$. Et simpleks i $|X| * |Y|$ har dermed hjørner $\sigma \sqcup \tau$, hvor σ og τ er (muligvis tomme) kæder i hhv. X og Y; og σ, τ er ikke begge tomme. Dette er dog netop det samme som at $\sigma \sqcup \tau$ er en kæde i pomængden $X * Y$. En kæde C i $X * Y$ svarer således til et simpleks i $|X| * |Y|$ med elementerne i C som hjørner.

Vi ser altså at $|X| * |Y|$ er identisk med det simplicielle kompleks $|X * Y|$. □

Bemærkning 1.18. Lad $\sigma \sqcup \tau$ være en kæde i $X * Y$ hvor σ er en kæde i X af længde k, og kæden τ har længde k' i Y. Længden af kæden $\sigma \sqcup \tau$ er dermed $k + k' + 1$ (da kæden indeholder $k + k' + 2$ elementer).

Da dimensionen af en pomængde er den maksimale kædelængde, ser vi straks at

$$\dim(X * Y) = \dim X + \dim Y + 1.$$

Definition 1.19. For en pomængde X defineres keglen CX som pomængden $CX := \{0\} * X$. Vi ser straks at $|CX| = |\{0\}| * |X| = C\,|X|$ er keglen på $|X|$, hvilket retfærdiggør betegnelsen "kegle" om CX. For den tomme pomængde er $C\emptyset = \{0\} * \emptyset = \{0\}$, og $|C\emptyset| = |\{0\}|$ består kun af toppunktet 0.

Proposition 1.20. *For pomængder X og Y gælder*

$$|X * Y| = |X| * |Y| \cong |CX \times CY \setminus \{(0,0)\}|\,.$$

Bevis. Identifikationen $|X| * |Y| = |X * Y|$ har vi allerede fra lemma 1.17.

For $Y = \emptyset$, er $CX \times CY \setminus \{(0,0)\} = CX \times \{0\} \setminus \{(0,0)\} \cong X$; så her gælder påstanden. Tilsvarende håndteres tilfældet $X = \emptyset$. Herefter antages derfor $X, Y \neq \emptyset$.

Vi betragter produktet $|CX| \times |CY| = |CX \times CY|$. Joinet $|X| * |Y|$ ligger indlejret i $|CX| \times |CY|$ som delrummet

$$\begin{aligned} M :&= \{(x, 1-t, y, t) \mid x \in |X|\,, y \in |Y|\,, 0 \le t \le 1\} \\ &\subseteq (|X| \times I / |X| \times 0) \times (|Y| \times I / |Y| \times 0) = |CX| \times |CY|\,. \end{aligned}$$

Punktet (x, y, t) i $|X| * |Y|$, jf. (1.3), svarer her til punktet $(x, 1-t, y, t) \in M$.

Et simpleks i $|CX \times Y \cup X \times CY|$ er en kæde i pomængden $CX \times Y \cup X \times CY$. Da $CX \times Y$ og $X \times CY$ er afsluttede opadtil, er en kæde i $CX \times Y \cup X \times CY$ enten en kæde i $CX \times Y$ eller i $X \times CY$. Et simpleks i $|CX \times Y \cup X \times CY|$ er altså et simpleks i enten $|CX \times Y|$ eller $|X \times CY|$. Den omvendte implikation gælder på tilsvarende vis, så vi har

$$|CX \times Y| \cup |X \times CY| = |CX \times Y \cup X \times CY| = |CX \times CY \setminus \{(0,0)\}|\,.$$

Vi finder nu en homeomorfi $\varphi\colon M \to |CX \times Y| \cup |X \times CY|$ ved at skalere ud fra punktet $(0,0)$ i $|CX \times CY|$. Givet et punkt $(x, 1-t, y, t) \in M$, defineres

$$\begin{aligned} \varphi(x, 1-t, y, t) &:= \left(x, \tfrac{1-t}{\max(t,1-t)}, y, \tfrac{t}{\max(t,1-t)}\right) \\ &= \begin{cases} \left(x, 1, y, \frac{t}{1-t}\right) \in |X \times CY| & \text{hvis } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ \left(x, \frac{1-t}{t}, y, 1\right) \in |CX \times Y| & \text{hvis } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Afbildningen er veldefineret idet vi for $t = 0$ får $\varphi(x, 1, y, 0) = (x, 1, y, 0) \in |X \times \{0\}|$, for $t = 1$ fås $\varphi(x, 0, y, 1) = (x, 0, y, 1) \in |\{0\} \times Y|$, og for $t = \frac{1}{2}$ fås $\varphi(x, \frac{1}{2}, y, \frac{1}{2}) = (x, 1, y, 1) \in |X \times Y| = |CX \times Y| \cap |X \times CY|$.

Den inverse afbildning til φ bliver afbildningen $\psi\colon |CX \times Y| \cup |X \times CY| \to M$ givet ved

$$\begin{aligned}\psi(x,1,y,t) &:= \left(x, \tfrac{1}{1+t}, y, \tfrac{t}{1+t}\right) \text{ for } (x,1,y,t) \in |X \times CY|;\\ \psi(x,s,y,1) &:= \left(x, \tfrac{s}{s+1}, y, \tfrac{1}{s+1}\right) \text{ for } (x,s,y,1) \in |CX \times Y|.\end{aligned}$$

Billedet ligger i M idet $\frac{s}{s+t} + \frac{t}{s+t} = 1$. Igen tjekkes at $\psi(x,s,y,t)$ er veldefineret for $t = 0$, $s = 0$ og $t = s = 1$.

At φ og ψ er inverse ses ved indsættelse (hvor der deles op efter om $t \leq 1-t$ eller $t \geq 1-t$). Lad os nøjes med at se på tilfældet $t \leq 1-t$:

$$\begin{aligned}\psi\varphi(x,1-t,y,t) = \psi(x,1,y,\tfrac{t}{1-t}) &= \left(x, \frac{1}{1+\frac{t}{1-t}}, y, \frac{\frac{t}{1-t}}{1+\frac{t}{1-t}}\right) = (x,1-t,y,t),\\ \varphi\psi(x,1,y,t) = \varphi(x,\tfrac{1}{1+t},y,\tfrac{t}{1+t}) &= \left(x, \frac{\frac{1}{1+t}}{\frac{1}{1+t}}, y, \frac{\frac{t}{1+t}}{\frac{1}{1+t}}\right) = (x,1,y,t).\end{aligned}$$ □

1.5 Lokale systemer og overlejringsrum

Definition 1.21. Lad X være en pomængde. Et *lokalt system* (af mængder) på X er en funktor $F\colon X \to Set$ som opfylder at $F(x \leq x')$ er en isomorfi for enhver morfi $x \leq x'$ i X.

Ved $\mathrm{Cov}(X)$ forstås *kategorien af lokale systemer på* X: Objekterne i $\mathrm{Cov}(X)$ er de lokale systemer på X, og for to lokale systemer $F, F'\colon X \to Set$ består $\mathrm{Mor}_{\mathrm{Cov}(X)}(F,F')$ af de naturlige transformationer $F \Rightarrow F'$.

Proposition 1.22. *Kategorien af lokale systemer på X, $\mathrm{Cov}(X)$, er ækvivalent med kategorien af overlejringer af $|X|$.*

Bevis. Lad $\mathcal{C}$ være kategorien af overlejringer af $|X|$.

Vi definerer først en funktor $\Phi\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Cov}(X)$. Lad en overlejring $p\colon E \to |X|$ være givet. Den simplicielle struktur på $|X|$ inducerer en simpliciel struktur på overlejringsrummet E: Simplekserne i E er simpelthen samtlige løft af simplekser i $|X|$.

Det lokale system $\Phi(p)\colon X \to Set$ defineres på objekterne/elementerne i X ved fiberen af overlejringen:

$$\Phi(p)(x) := p^{-1}(x)$$

hvor vi ser $x \in X$ som et 0-simpleks i $|X|$. Givet en ikke-triviel morfi $x < x'$ i X, dvs. et 1-simpleks i $|X|$, får vi ved at løfte 1-simplekset $(x < x')$ en bijektiv afbildning $\Phi(p)(x < x')\colon p^{-1}(x) \xrightarrow{\cong} p^{-1}(x')$ mellem fibrene. For en identitets-morfi $x = x$ i X defineres $\Phi(p)(x = x)$ naturligvis som identiteten på $p^{-1}(x)$.

For $a \in p^{-1}(x)$ har vi altså at $a' := \Phi(p)(x \leq x')(a)$ er det entydigt bestemte element $a' \in p^{-1}(x')$ så (a, a') er et 1-simpleks i E (degenereret hvis $x = x'$).

Hvis vi har en følge af to morfier $x < x' < x''$ i X, har vi et 2-simpleks i $|X|$ med siderne $(x < x')$, $(x' < x'')$ og $(x < x'')$. Sammensætningen af stierne $(x < x')$ og

$(x' < x'')$ i $|X|$ er således sti-homotop med stien $(x < x'')$ takket være 2-simplekset $(x < x' < x'')$. Homotope stier inducerer samme afbildning mellem fibrene, så vi har $\Phi(p)(x' < x'') \circ \Phi(p)(x < x') = \Phi(p)(x < x'')$. Dermed er $\Phi(p) \colon X \to Set$ en funktor; og per konstruktion er alle afbildninger $\Phi(p)(x \leq x')$ bijektioner, så $\Phi(p) \in \mathrm{Cov}(X)$.

Lad $T \colon p \to p'$ være en morfi/overlejringstransformation mellem overlejringer $p \colon E \to |X|$ og $p' \colon E' \to |X|$, dvs. T er en afbildning $T \colon E \to E'$ så $p' \circ T = p$.

For ethvert simpleks σ i $|X|$, vil et løft af σ i E blive sendt til et løft af σ i E'. Specielt sendes fibre til fibre, så for hvert $x \in X$ får vi en afbildning $T_x \colon p^{-1}(x) \to (p')^{-1}(x)$. Idet T også bevarer løft af 1-simplekser fra $|X|$, vil T desuden give følgende kommutative diagram for fiberafbildningerne $\Phi(p)(x < x')$ og $\Phi(p')(x < x')$ knyttet til et 1-simpleks $(x < x')$ i $|X|$:

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(x) \arrow[r, "T_x"] \arrow[d, "\Phi(p)(x<x')"', "\simeq"] & (p')^{-1}(x) \arrow[d, "\simeq"', "\Phi(p')(x<x')"] \\ p^{-1}(x') \arrow[r, "T_{x'}"'] & (p')^{-1}(x') \end{tikzcd} \tag{1.4}$$

Fra en overlejringstransformation $T \colon p \to p'$ får vi således en naturlig transformation $\Phi(T) \colon \Phi(p) \Rightarrow \Phi(p')$ med $\Phi(T)_x := T_x$. Givet to overlejringstransformationer $p \xrightarrow{T} p' \xrightarrow{T'} p''$, gælder oplagt $(T' \circ T)_x = T'_x \circ T_x$ for alle $x \in X$, og således $\Phi(T' \circ T) = \Phi(T') \circ \Phi(T)$; så $\Phi \colon \mathcal{C} \to \mathrm{Cov}(X)$ er en funktor.

Nu definerer vi så funktoren $\Psi \colon \mathrm{Cov}(X) \to \mathcal{C}$. Givet et lokalt system $F \colon X \to Set$, indfører vi en pomængde X_F: Elementerne i X_F er par (x, a) hvor $x \in X$ og $a \in F(x)$. Elementerne i X_F ordnes ved

$$(x, a) \leq (x', a') \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad x \leq x' \text{ og } a' = F(x \leq x')(a).$$

Vi har da en oplagt ordningsbevarende afbildning $p \colon X_F \to X$ givet ved $(x, a) \mapsto x$; og heraf fås en afbildning $|p| : |X_F| \to |X|$ af simplicielle komplekser. Det er desuden klart at p er strengt voksende idet $(x, a) \leq (x', a')$ med $x = x'$ medfører at $a' = F(x = x')(a) = id_{F(x)}(a) = a$.

Et k-simpleks $((x_0, a_0) < \cdots < (x_k, a_k))$ i $|X_F|$ bliver af $|p|$ sendt til simplekset $(x_0 < \cdots x_k)$ der igen er et k-simpleks (idet p er strengt voksende). Lad nu $\sigma = (x_0 < \cdots < x_k)$ være et k-simpleks i $|X|$. Urbilledet $|p|^{-1}(\sigma)$ består af simplekser $\sigma_{a_0} = ((x_0, a_0) < (x_1, a_1) < \cdots < (x_k, a_k))$ hvor $a_i = F(x_0 < x_i)(a_0)$; ét k-simpleks for hvert $a_0 \in F(x_0)$. Da alle afbildningerne $F(x_0 < x_i) \colon F(x_0) \xrightarrow{\simeq} F(x_i)$ er bijektive (idet F er et lokalt system), ses at simplekserne σ_{a_0} $(a_0 \in F(x_0))$ ikke har nogle hjørner tilfælles. Urbilledet $|p|^{-1}(\sigma)$ er dermed en disjunkt forening af k-simplekserne σ_{a_0} der hver især bliver afbildet homeomorft på σ af $|p|$. Afbildningen $|p| : |X_F| \to |X|$ er altså en overlejring af $|X|$, og vi sætter $\Psi(F) = |p|$.

Givet en naturlig transformation $\tau \colon F \Rightarrow F'$ af lokale systemer F, F', får vi en afbildning $\widehat{\tau} \colon X_F \to X_{F'}$ givet ved $\widehat{\tau}(x, a) := (x, \tau_x(a))$ for $a \in F(x)$. Afbildningen

$\widehat{\tau}$ er ordningsbevarende: For vilkårlige $(x,a) \leq (x',a')$ i X_F har vi per definition at $a' = F(x < x')(a)$. Da τ er en naturlig transformation, får vi så:

$$\begin{array}{ccc} (x,a) & \xmapsto{\quad\widehat{\tau}\quad} & (x,\tau_x(a)) \\ & & \rotatebox{90}{$\leq$} \\ \rotatebox{90}{$\leq$} & & (x',F(x<x')(\tau_x(a))) \\ & & \| \\ (x',F(x<x')(a)) & \xmapsto[\widehat{\tau}]{} & (x',\tau_{x'}(F(x<x')(a))) \end{array} \tag{1.5}$$

Hvis $p\colon X_F \to X$ og $p'\colon X_{F'} \to X$ er projektionerne, ses umiddelbart at $p' \circ \widehat{\tau} = p$. Heraf følger så at $|p'| \circ |\widehat{\tau}| = |p|$, så $|\widehat{\tau}|$ er en overlejringstransformation fra $|p|$ til $|p'|$. Vi sætter derfor $\Psi(\tau) = |\widehat{\tau}|$. Givet to naturlige transformationer $F \xrightarrow{\tau} F' \xrightarrow{\tau'} F''$ gælder umiddelbart

$$\widehat{\tau' \circ \tau}(x,a) = (x, \tau'_x(\tau_x(a))) = \widehat{\tau'}(x,\tau_x(a)) = \widehat{\tau'}(\widehat{\tau}(x,a))$$

for alle $(x,a) \in X_F$; og dermed også $\Psi(\tau' \circ \tau) = \Psi(\tau') \circ \Psi(\tau)$. Dermed er $\Psi\colon \operatorname{Cov}(X) \to \mathcal{C}$ en funktor.

Lad $F \in \operatorname{Cov}(X)$ være et lokalt system. Bemærk først at den simplicielle struktur på $|X_F|$ netop er den der fås ved at løfte strukturen fra $|X|$ via overlejringen $\Psi(F)\colon |X_F| \to |X|$. Anvendes $\Phi\colon \mathcal{C} \to \operatorname{Cov}(X)$ på overlejringen $\Psi(F)\colon |X_F| \to |X|$, gælder for objekterne $x \in X$ at

$$\Phi\Psi(F)(x) = \Psi(F)^{-1}(x) = \{(x,a) \mid a \in F(x)\} \cong F(x).$$

For en morfi $x \leq x'$, og for $(x,a_0) \in \{(x,a) \mid a \in F(x)\}$, er $\Phi\Psi(F)(x < x')(x,a_0)$ defineret som det entydigt bestemte element $(x',a'_0) \in \{(x',a') \mid a' \in F(x')\}$ sådan at $(x,a_0) < (x',a'_0)$ er et simpleks i $|X|_F$, dvs. så $a'_0 = F(x < x')(a_0)$. Afbildningen $\Phi\Psi(F)(x < x')$ genfinder altså blot afbildningen $F(x < x')$.

Ved yderligere overvejelser ses at der faktisk gælder $\Phi\Psi \simeq id_{\operatorname{Cov}(X)}$. Tilsvarende gælder for en overlejring $p\colon E \to |X|$ at det simplicielle kompleks $\left|X_{\Phi(p)}\right|$ har samme simplicielle struktur som E, og at overlejringen $\Psi\Phi(p)\colon \left|X_{\Phi(p)}\right| \to |X|$ stemmer overens med $p\colon E \to |X|$. Der findes tilsvarende en naturlig isomorfi $\Psi\Phi \simeq id_{\mathcal{C}}$. □

Korollar 1.23. *En pomængde X er enkeltsammenhængende hvis og kun hvis alle lokale systemer $F \in \operatorname{Cov}(X)$ er trivielle (naturligt isomorfe med en konstant funktor).*

Bevis. For en overlejring $p\colon M \times |X| \to |X|$ hvor p er projektionen, bliver $\Phi(p)$ den konstante funktor der sender alt i M. Omvendt har vi at hvis $F\colon X \to Set$ er en konstant funktor der sender alt i M, bliver $|X_F| = |X| \times M$ og $\Psi(F)\colon |X| \times M \to |X|$ bliver projektionen på $|X|$.

Da $\Phi\colon \mathcal{C} \to \operatorname{Cov}(X)$ og $\Psi\colon \operatorname{Cov}(X) \to \mathcal{C}$ er ækvivalenser af kategorier, følger at alle $F \in \operatorname{Cov}(X)$ er trivielle (isomorfe med en konstant funktor) hvis og kun hvis alle overlejringer af $|X|$ er trivielle (isomorfe med en overlejring $X \times M \to X$); og alle overlejringer af $|X|$ er trivielle netop når $|X|$ er enkeltsammenhængende. □

2 Pomængderne $\mathcal{S}_p(G)$ og $\mathcal{A}_p(G)$

Vi skal nu se på de to pomængder $\mathcal{S}_p(G)$ og $\mathcal{A}_p(G)$ knyttet til en gruppe G og et primtal p.

Givet en gruppe G og et primtal p, kan vi se på mængden M af p-undergrupper i G. Ordner vi p-undergrupperne ved inklusion, bliver M en pomængde hvis topologiske egenskaber vi kan undersøge. Denne undersøgelse bliver dog ikke synderligt interessant, for M har et mindste element (den trivielle undergruppe $\{1\}$) og er dermed kontraktibel uanset valget af G.

For overhovedet at have mulighed for at få en ikke-kontraktibel pomængde er vi således nødt til at udelade den trivielle p-undergruppe. Dette leder til definitionen af pomængden $\mathcal{S}_p(G)$:

Definition 2.1. Lad G være en gruppe og p et primtal. Pomængden $\mathcal{S}_p(G)$ består af de ikke-trivielle p-undergrupper i G, og $\mathcal{S}_p(G)$ er ordnet ved inklusion.

I stedet for at se på samtlige p-undergrupper af G kan man alternativt vælge af se på andre udvalg af p-undergrupper i G: elementar-abelske p-undergrupper, p-radikale undergrupper, p-centriske undergrupper, fællesmængder af Sylow-p-undergrupper, m.fl. I visse tilfælde vil to samlinger $\mathcal{A}(G)$ og $\mathcal{B}(G)$ af p-undergrupper i G opfylde at $|\mathcal{A}(G)| \simeq |\mathcal{B}(G)|$ uanset gruppen G, og for andre samlinger er dette ikke tilfældet. For en opsummering af resultater omkring homotopiækvivalens af forskellige samlinger af p-undergrupper, henvises til [GS06].

Definition 2.2. I dette projekt vil vi, udover $\mathcal{S}_p(G)$, specielt inddrage pomængden $\mathcal{A}_p(G)$ af ikke-trivielle, elementar-abelske p-undergrupper i G – dvs. abelske p-undergrupper hvor alle elementer har orden 1 eller p. Igen ordnes $\mathcal{A}_p(G)$ ved inklusion.

I denne sammenhæng minder vi desuden om begrebet *p-rang*: Rangen $r_p(A)$ af en elementar-abelsk p-gruppe $A \simeq C_p \times \cdots \times C_p$, er antallet af C_p-faktorer – dvs. A har dimension $r_p(A)$ som vektorrum over $\mathbb{F}_p$. For en generel gruppe G defineres $r_p(G)$ som supremum over $r_p(A)$ for elementar-abelske p-undergrupper $A \leq G$. En endelig gruppe G har oplagt endelig p-rang for ethvert primtal p.

I forhold til $\mathcal{S}_p(G)$ vil $\mathcal{A}_p(G)$ ofte indeholde markant færre elementer, hvilket kan gøre $\mathcal{A}_p(G)$ mere tilgængelig for undersøgelse. Den følgende proposition, 2.3, fortæller endda at det ikke gør nogen forskel om vi betragter $\mathcal{S}_p(G)$ eller $\mathcal{A}_p(G)$ – de to pomængder vil altid være homotopiækvivalente. Vi kan altså hovedsageligt nøjes med at betragte den mindre pomængde $\mathcal{A}_p(G)$.

Proposition 2.3. *Inklusionen $\mathcal{A}_p(G) \subseteq \mathcal{S}_p(G)$ er en homotopiækvivalens.*

Bevis. Lad $i\colon \mathcal{A}_p(G) \hookrightarrow \mathcal{S}_p(G)$ være inklusionen. Vi ønsker at benytte Quillens sætning A, 1.12, til at vise at i er en homotopiækvivalens; derfor ser vi på i/P for $P \in \mathcal{S}_p(G)$. Pomængden i/P består af de elementar-abelske undergrupper fra $\mathcal{A}_p(G)$ der desuden er indeholdt i P. Dette er blot samtlige ikke-trivielle elementar-abelske p-undergrupper i P, så $i/P = \mathcal{A}_p(P)$ for alle $P \in \mathcal{S}_p(G)$.

Sætning 1.12 giver os således det ønskede resultat såfremt $i/P = \mathcal{A}_p(P)$ er kontraktibel for enhver ikke-triviel p-undergruppe P i G. Dette er tilfældet ifølge følgende lemma. $\square$

Lemma 2.4. *Hvis P er en ikke-triviel p-gruppe, så er $\mathcal{A}_p(P)$ kontraktibel.*

Bevis. Den ikke-trivielle p-gruppe P har ikke-trivielt centrum $Z(P)$. Lad nu N bestå af elementerne fra $Z(P)$ af orden 1 eller p. Idet $Z(P)$ er abelsk og ikke-triviel, er N en undergruppe og ligeledes ikke-triviel. Da $N \leq Z(P)$ er $N \lhd P$.

For en undergruppe $A \in \mathcal{A}_p(P)$, ser vi på produktet AN: Idet A og N er abelske, og idet alle $a \in A$ kommuterer med alle $n \in N \leq Z(P)$, er AN abelsk. For ethvert element $an \in AN$ gælder desuden $(an)^p = a^p n^p = 1 \cdot 1$, så AN er endda elementar-abelsk.

For alle $A \in \mathcal{A}_p(P)$ fås hermed at $A \leq AN \geq N$, så pomængden $\mathcal{A}_p(P)$ er konisk kontraktibel. $\square$

Proposition 2.5. *For enhver gruppe G, er $H_i(\mathcal{S}_p(G)) = 0$ for $i \geq r_p(G)$.*

Bevis. Antag at G har endelig p-rang (ellers er påstanden trivielt sand). Idet $\mathcal{A}_p(G)$ ikke indeholder grupper af rang større en $r_p(G)$, vil enhver kæde i $\mathcal{A}_p(G)$ have længde højst $r_p(G) - 1$. Hvis $T \in \mathcal{A}_p(G)$ har rang $r_p(G)$, findes en maksimal kæde

$$A_1 < A_2 < \cdots < A_{r_p(G)} = T$$

af længde $r_p(G) - 1$, hvor A_i har rang i.

Vi ser så på det simplicielle kompleks $|\mathcal{A}_p(G)|$. Da den maksimale længde af kæder i $\mathcal{A}_p(G)$, er $r_p(G) - 1$, vil simplekserne i $|\mathcal{A}_p(G)|$ have dimension højst $r_p(G) - 1$. Heraf følger straks

$$H_i(\mathcal{A}_p(G)) := H_i(|\mathcal{A}_p(G)|) = 0$$

for $i \geq r_p(G)$. Det ønskede resultat gælder dermed idet $\mathcal{S}_p(G) \simeq \mathcal{A}_p(G)$. $\square$

Proposition 2.6. *For grupper G_1 og G_2 gælder*

$$\mathcal{A}_p(G_1 \times G_2) \simeq \mathcal{A}_p(G_1) * \mathcal{A}_p(G_2).$$

Bevis. Lad $T \subseteq \mathcal{A}_p(G_1 \times G_2)$ være del-pomængden bestående af undergrupper på formen $A_1 \times A_2$ hvor A_i er en elementar-abelsk undergruppe i G_i, og hvor A_1, A_2 ikke begge er trivielle.

Med ordningen i T har vi at $A_1 \times A_2 \leq A_1' \times A_2'$ netop når $A_1 \leq A_1'$ og $A_2 \leq A_2'$. Pomængden T er således isomorf med $C\mathcal{A}_p(G_1) \times C\mathcal{A}_p(G_2) \setminus \{(0,0)\}$ – idet $C\mathcal{A}_p(G_i)$ oplagt er isomorf med pomængden af samtlige elementar-abelske p-undergrupper i G_i (inklusive den trivielle).

Fra proposition 1.20 får vi

$$|T| = |C\mathcal{A}_p(G_1) \times C\mathcal{A}_p(G_2) \setminus \{(0,0)\}| \cong |A_p(G_1) * A_p(G_2)|.$$

Det altså tilstrækkeligt hvis vi viser at inklusionen $i\colon T \hookrightarrow A_p(G_1 \times G_2)$ er en homotopiækvivalens.

Lad π_1, π_2 være projektionerne for $G_1 \times G_2$. Vi får da en afbildning $r\colon A_p(G_1 \times G_2) \to T$ givet ved $r(A) := \pi_1(A) \times \pi_2(A)$. Der gælder nu klart at $A \leq \pi_1(A) \times \pi_2(A) = ir(A)$ for alle $A \in \mathcal{A}_p(G_1 \times G_2)$, og samtidig er $ri = id_T$. Af proposition 1.8 følger dermed at i og r er homotopiækvivalenser, hvorved vi får

$$\mathcal{A}_p(G_1 \times G_2) \simeq T \simeq A_p(G_1) * A_p(G_2)$$

som ønsket. □

2.1 Kontraktibilitet af $\mathcal{S}_p(G)$ og $\mathcal{A}_p(G)$

Proposition 2.7. *Hvis G indeholder en ikke-triviel, normal p-undergruppe, så er $\mathcal{S}_p(G)$ kontraktibel.*

Bevis. Hvis $N \in \mathcal{S}_p(G)$ er normal i G, gælder for alle $P \in \mathcal{S}_p(G)$ at PN igen er en p-undergruppe (af orden $|P|\,|N| \,/\, |P \cap N|$). For alle $P \in \mathcal{S}_p(G)$ gælder derfor $P \leq PN \geq N$, så $\mathcal{S}_p(G)$ er konisk kontraktibel. □

Det er uvist hvorvidt den modsatte implikation til proposition 2.7 er sand. Quillen fremsætter i [Qui78] formodningen om at den modsatte implikation gælder for endelige grupper:

Formodning 2.8 (Quillens formodning)**.** *Hvis G er en endelig gruppe for hvilken $\mathcal{S}_p(G)$ er kontraktibel, så indeholder G en ikke-triviel, normal p-undergruppe.*

Formodningen er sand hvis G er opløselig (korollar 5.4), og hvis $r_p(G) \leq 2$ (proposition 2.14).

Bemærkning 2.9. Man kan også fremsætte Quillens formodning for andre systemer af p-undergrupper end $\mathcal{S}_p(G)$. For pomængden $\mathcal{A}_p(G)$ gælder i hvert fald en analog til proposition 2.7:

Hvis der findes $A \in \mathcal{A}_p(G)$ med $A \lhd G$, så er $\mathcal{A}_p(G)$ kontraktibel.

Hvilket følger direkte af proposition 2.7.

Det er derfor oplagt også at overveje Quillens formodning for $\mathcal{A}_p(G)$:

Formodning 2.10 (Quillens formodning for $\mathcal{A}_p(G)$)**.** *Hvis G er en endelig gruppe for hvilken $\mathcal{A}_p(G)$ er kontraktibel, så indeholder G en ikke-triviel, normal, elementar-abelsk p-undergruppe.*

Proposition 2.11. *Quillens formodning for $\mathcal{S}_p(G)$, 2.8, er ækvivalent med Quillens formodning for $\mathcal{A}_p(G)$, 2.10.*

Bevis. Vi ved allerede fra proposition 2.3 at $\mathcal{S}_p(G)$ er kontraktibel hvis og kun hvis $\mathcal{A}_p(G)$ er kontraktibel. De to varianter af Quillens formodning er derfor ækvivalente hvis: Der findes et $P \in \mathcal{S}_p(G)$ der er normal i G hvis og kun hvis der findes et $A \in \mathcal{A}_p(G)$ der er normal i G. Denne biimplikation følger af nedenstående lemma. □

Lemma 2.12. *Hvis G har en ikke-triviel, normal p-undergruppe, har G også en ikke-triviel, normal, elementar-abelsk p-undergruppe.*

Bevis. Antag at $P \in \mathcal{S}_p(G)$ er normal i G. Da p-gruppen P er ikke-triviel, er $Z(P) > 1$. Lad $N > 1$ være undergruppen af elementer af orden 1 eller p i $Z(P)$ (se beviset for lemma 2.4). Undergruppen N er oplagt karakteristisk i $Z(P)$ (en automorfi sender elementer over i elementer af samme orden). Desuden er $Z(P)$ altid karakteristisk i P.

Samlet set fås derfor at N er karakteristisk i P og dermed normal i G. □

Bemærkning 2.13. En virkning af en gruppe G på en pomængde X, er en gruppe homomorfi $G \to \mathrm{Aut}(X)$, hvor $\mathrm{Aut}(X)$ er gruppen af pomængde automorfier for X. Det vil sige at til hvert $g \in G$ svarer en ordningsbevarende bijektion $g\colon X \to X$.

For hvert $g \in G$, får vi således en automorfi/homeomorfi $g\colon |X| \to |X|$ på den simplicielle kompleks $|X|$, så en gruppevirkning af G på X inducerer altså en gruppevirkning af G på $|X|$. Virkningen af et $g \in G$ på et simpleks $(x_0 < \cdots < x_k)$ i $|X|$ er simpelthen blot

$$g.(x_0 < x_1 < \cdots < x_k) := (g.x_0 < g.x_1 < \cdots < g.x_k).$$

Specielt bliver et simpleks $(x_0 < \cdots < x_k)$ i $|X|$ fikset af $g \in G$ hvis og kun hvis alle x_i bliver fikset når g virker på X. Denne iagttagelse giver direkte en karakterisering af fikspunkterne for virkningen af G på $|X|$:

$$|X|^G = \left|X^G\right|. \tag{2.1}$$

Vi betragter nu virkningen af G på $\mathcal{A}_p(G)$ ved konjugering. Fikspunkterne for denne virkning er de normale $A \in \mathcal{A}_p(G)$, så $\mathcal{A}_p(G)^G$ er altså pomængden af de ikke-trivielle, normale, elementar-abelske p-undergrupper i G. Fra (2.1) følger så at $|\mathcal{A}_p(G)|^G \neq \emptyset$ netop når G har en ikke-triviel, normal, elementar-abelsk p-undergruppe.

Proposition 2.7 kan dermed omformuleres til:

$$\textit{Hvis } |\mathcal{A}_p(G)| \textit{ har et } G\textit{-fikspunkt, så er } \mathcal{A}_p(G) \textit{ kontraktibel.} \tag{2.2}$$

Tilsvarende kan Quillens formodning omformuleres:

$$\textit{Hvis } \mathcal{A}_p(G) \textit{ er kontraktibel, så har } |\mathcal{A}_p(G)| \textit{ har et } G\textit{-fikspunkt.} \tag{2.3}$$

Proposition 2.14. *Quillens formodning, 2.8, er sand for grupper med $r_p(G) \leq 2$.*

Bevis. I stedet for at bevise Quillens formodning direkte, beviser vi i stedet omformuleringen (2.3). Antag at G er en endelig gruppe med $r_p(G) \leq 2$, og antag at $\mathcal{A}_p(G)$ er kontraktibel.

Tilfældet $r_p(G) = 0$ kan ikke forekomme idet $\mathcal{A}_p(G)$ i så fald er tom og dermed ikke-kontraktibel.

Hvis $r_p(G) = 1$, er $|\mathcal{A}_p(G)|$ et simplicielt kompleks af dimension $r_p(G) - 1 = 0$; så $|\mathcal{A}_p(G)|$ består af isolerede punkter. Da $|\mathcal{A}_p(G)|$ er antaget kontraktibel, må $|\mathcal{A}_p(G)|$ derfor være netop ét punkt. Dette punkt må da nødvendigvis være fikspunkt for virkningen af G.

Hvis $r_p(G) = 2$, er $|\mathcal{A}_p(G)|$ et simplicielt kompleks af dimension $r_p(G) - 1 = 1$, dvs. en (endelig) graf. En graf er kontraktibel hvis og kun hvis grafen er et træ. Vi får derfor at $|\mathcal{A}_p(G)|$ er et træ. Jævnfør nedenstående grafteoretiske lemma, har grafen $|\mathcal{A}_p(G)|$ har dermed et fikspunkt under G-virkningen. □

Lemma 2.15. *En endelig gruppe der virker på et endeligt træ, har et fikspunkt.*

Bevis. Antag at gruppen G virker på træet T med knudemængde V og kantmængde E.

En virkning af gruppen G på T knytter til ethvert $g \in G$ en grafisomorfi $g\colon T \to T$. Specielt sendes knuder i knuder, og kanter i kanter.

Vi beviser lemmaet ved induktion over antallet af knuder i T. Som basistilfælde har vi:

- Det trivielle træ med én knude har oplagt den entydige knude som fikspunkt for virkningen.
- Træet med to knuder og én kant: Et gruppeelement vil enten fikse hele træet eller ombytte de to knuder. Uanset hvad vil midtpunktet af kanten dog være bevaret, så midtpunktet af kanten er et fikspunkt for virkningen.

Antag nu at T er et træ med mindst 3 knuder. Et ikke-trivielt træ, har et blad, så lad v være et blad i træet T. Gruppeelementerne virker via grafisomorfier, så knuderne i banen $G.v$ må alle sammen være blade i T. Alle knuderne i T kan ikke være blade idet vi så ville have

$$\tfrac{|V|}{2} = |E| = |V| - 1$$

hvilket giver $|V| = 2$ i modstrid med antagelsen $|V| \geq 3$. Specielt kan banen $G.v$ ikke indeholde alle knuderne i T.

Vi kan derfor danne en reduceret graf T', ved at fjerne bladene i $G.v$ (med tilhørende kanter) fra T. Da vi kun har fjernet blade, vil T' igen være et træ. Da vi desuden har fjernet en hel bane $G.v$, restringere gruppevirkningen til en virkning på træet T'. Da T' har strengt færre knuder end T, får vi nu per induktion et fikspunkt for virkningen på T'; men et sådan fikspunkt er også et fikspunkt i T. □

2.2 Symmetriske grupper

I dette underafsnit er samlet nogle resultater om $\mathcal{A}_p(S_n)$ når n er relativt lille i forhold til p.

Proposition 2.16.

(i) *$\mathcal{A}_p(S_n)$ er tom for $n < p$.*

(ii) *$\mathcal{A}_p(S_n)$ består af $(p-2)!\binom{n}{p}$ isolerede punkter for $p \leq n < 2p$. Mængderne $\mathcal{A}_2(S_2)$ og $\mathcal{A}_3(S_3)$ er de eneste af disse tilfælde hvor $\mathcal{A}_p(S_n)$ kun har ét element.*

(iii) *$\mathcal{A}_p(S_n)$ er sammenhængende for $n > 2p$.*

Bevis. (i) For $n < p$ er primtallet p ikke divisor i $|S_n| = n!$, så S_n har ingen elementer af orden p.

(ii) For $p \leq n < 2p$, er p^1 den største potens af p der går op i $n!$. Cykliske grupper af orden p er altså de eneste mulige p-undergrupper i S_n, så $\mathcal{A}_p(S_n)$ er 0-dimensional. De eneste elementer af orden p i S_n er p-cyklerne; så da enhver undergruppe af orden p har $p-1$ frembringere, kan vi bestemme antal elementer i $\mathcal{A}_p(S_n)$:

$$\#\mathcal{A}_p(S_n) = \frac{\#(p\text{-cykler i } S_n)}{p-1} = \frac{(p-1)!\binom{n}{p}}{p-1} = (p-2)!\binom{n}{p}.$$

(iii) Antag $n > 2p$. Enhver elementar-abelsk undergruppe $A \in \mathcal{A}_p(S_n)$ indeholder en undergruppe $\langle\sigma\rangle$ af orden p; så A og $\langle\sigma\rangle$ er stiforbundet i $|\mathcal{A}_p(S_n)|$ med 1-simplekset $(A \geq \langle\sigma\rangle)$. For at vise sammenhæng af $\mathcal{A}_p(S_n)$, skal vi altså blot vise at alle cykliske undergrupper af orden p er forbundne i $|\mathcal{A}_p(S_n)|$. Lad $\sigma = \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_k$ være et element af orden p i S_n, hvor γ_i er en p-cykel. I $|\mathcal{A}_p(S_n)|$ har vi så stien

$$\langle\sigma\rangle \leq \langle\gamma_1,\ldots,\gamma_k\rangle \geq \langle\gamma_1\rangle.$$

Det er således nok at vise at alle $\langle\gamma\rangle$ (hvor γ er en p-cykel) er forbundne.

Lad nu γ_1 og γ_2 være to p-cykler der kun afviger med et enkelt element: Sæt $\gamma_1 = (x_1\ \cdots\ x_{p-1}\ x_p)$ og $\gamma_2 = (x_1\ \cdots\ x_{p-1}\ x'_p)$. Da $n \geq 2p+1$, indgår mindst p af tallene $\{1,\ldots,n\}$ ikke i γ_1 aller γ_2. Vi kan derfor danne en p-cykel δ der er disjunkt med både γ_1 og γ_2. I det simplicielle kompleks $|\mathcal{A}_p(S_n)|$ får vi dermed stien

$$\langle\gamma_1\rangle \leq \langle\gamma_1,\delta\rangle \geq \langle\delta\rangle \leq \langle\gamma_2,\delta\rangle \geq \langle\gamma_2\rangle,$$

så $\langle\gamma_1\rangle$ og $\langle\gamma_2\rangle$ er forbundne.

Ved at udskifte ét tal ad gangen i en p-cykel får vi således et sti fra undergruppen frembragt af en p-cykel, til en vilkårlig anden undergruppe frembragt af en p-cykel. Jævnfør de tidligere overvejelser, er $\mathcal{A}_p(S_n)$ dermed sammenhængende. □

Proposition 2.17.

$\mathcal{A}_2(S_4)$ er kontraktibel (så specielt sammenhængende).

$\mathcal{A}_p(S_{2p})$ er usammenhængende for $p \geq 3$, med $(2p)!/2(p!)^2$ komponenter der hver især er en wedge af $((p-2)!-1)^2$ cirkler/1-sfærer.

Bevis. Lad os først se på $\mathcal{A}_2(S_4)$. Gruppen S_4 har den normale undergruppe $\{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ der er en elementar-abelsk 2-undergruppe. Ifølge proposition 2.7 er $\mathcal{A}_2(S_4)$ dermed kontraktibel.

For $p \geq 3$, er p^2 den største potens af p der går op i $(2p)!$. Undergruppen $\langle(1\ \cdots\ p), ((p+1)\ \cdots\ 2p)\rangle$ i S_{2p} har orden p^2 og er således en Sylow-p-undergruppe i S_{2p}. Alle Sylow-p-undergrupper i S_{2p} er dermed frembragt af to disjunkte p-cykler, og dette er derfor også samtlige elementar-abelske p-undergrupper i S_{2p} af rang 2. Specielt gælder for alle disse (rang 2)-grupper at de fikserer netop én partition af $\{1,\ldots,2p\}$ i to delmængder med hver p elementer. Lad os kalde sådanne partitioner for p-p-partitioner.

Lad $\sigma \in S_{2p}$ have af orden p (dvs. cykeltype p eller p^2). Der gælder da tilsvarende at $\langle\sigma\rangle$ fikserer netop én p-p-partition: Hvis $\sigma = (a_1 \ \cdots \ a_p)(b_1 \ \cdots \ b_p)$, er partitionen $\{a_1, \dots, a_p\} \sqcup \{b_1, \dots, b_p\}$; og hvis $\sigma = (a_1 \ \cdots \ a_p)$ er partitionens to klasser fikspunkterne og ikke-fikspunkterne for σ.

En undergruppe $\langle\sigma\rangle \in \mathcal{A}_p(S_{2p})$ af rang 1 kan kun være indeholdt i $\langle\gamma_1, \gamma_2\rangle \in \mathcal{A}_p(S_{2p})$ af rang 2, hvis de to undergrupper fikserer den samme p-p-partition. Pomængden $A_p(S_{2p})$ spalter dermed op som en disjunkt forening efter hvilken p-p-partition grupperne fikserer.

Lad os nu se på komponenten af $\mathcal{A}_p(S_{2p})$ svarende til en enkelt p-p-partition $X \sqcup Y$. En permutation i S_{2p} der fikserer partitionen $X \sqcup Y$, er en kombination af en permutation af X og en permutation af Y. Komponenten af $\mathcal{A}_p(S_{2p})$ der fikserer $X \sqcup Y$, er dermed isomorf som pomængde med

$$\mathcal{A}_p(S_X \times S_Y) = \mathcal{A}_p(S_p \times S_p) \simeq \mathcal{A}_p(S_p) * \mathcal{A}_p(S_p),$$

hvor vi har gjort brug af proposition 2.6. Fra proposition 2.16(ii) har vi at $|\mathcal{A}_p(S_p)|$ består af $(p-2)!$ isolerede punkter, så $|\mathcal{A}_p(S_X \times S_Y)| \simeq |\mathcal{A}_p(S_p)| * |\mathcal{A}_p(S_p)|$ er en komplet bipartit graf med $(p-2)! \cdot 2$ knuder og $((p-2)!)^2$ kanter.

En sammenhængende graf er som bekendt en wedge af $e - v + 1$ cirkler hvor e er antallet af kanter i grafen, og v er antallet af knuder. Komponenten af $\mathcal{A}_p(S_{2p})$ svarende til partitionen $X \sqcup Y$ er således en wedge af

$$((p-2)!)^2 - (p-2)! \cdot 2 + 1 = ((p-2)! - 1)^2$$

cirkler.

Antallet af p-p-partitioner er $\frac{1}{2}\binom{2p}{p,p}$, så $A_p(S_{2p})$ har altså $\frac{1}{2}\binom{2p}{p,p} = (2p)!/2(p!)^2$ komponenter der hver især er en wedge af $((p-2)! - 1)^2$ cirkler. □

Proposition 2.18. *$\mathcal{A}_2(S_5)$ er en wedge af 16 cirkler.*

Bevis. Undergruppen $\langle(1\ 2\ 3\ 4), (1\ 3)\rangle \simeq D_4$ er en Sylow-2-undergruppe i S_5. Da D_4 er ikke-abelsk, har $\mathcal{A}_2(S_5)$ ingen elementer af rang 3.

Enhver undergruppe $A \in \mathcal{A}_2(S_5)$ er altså konjugeret til en af undergrupperne i $\langle(1\ 2\ 3\ 4), (1\ 3)\rangle$. Diedergruppen $\langle(1\ 2\ 3\ 4), (1\ 3)\rangle$ har to elementar-abelske undergrupper af rang 2: $A = \{id, (13), (24), (13)(24)\}$ og $B = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. Undergrupper af S_5 konjugerede til A kalder vi type A, og undergrupper konjugerede til B kalder vi type B.

Fra proposition 2.16(iii), ved vi at $\mathcal{A}_2(S_5)$ er sammenhængende. Så det 1-dimensionale simplicielle kompleks $|\mathcal{A}_2(S_5)|$ er en sammenhængende graf. Lad os derfor tælle knuder og kanter. Gruppen S_5 har 10 transpositioner og 15 dobbelttranspositioner – og dermed i alt 25 undergrupper af orden 2. De elementar-abelske 2-undergrupper af rang 2 er inddelt i type A og type B. Der er én A-undergruppe for hver dobbelttransposition i S_5, dvs. 15 stk.; og der er én B-undergruppe per valg af fikspunkt for undergruppen, dvs. 5 stk.

Hver undergruppe af rang 2 indeholder netop 3 undergrupper af orden 2, så der er 3 kanter i $|\mathcal{A}_2(S_5)|$ per undergruppe af rang 2. Grafen $|\mathcal{A}_2(S_5)|$ har altså samlet $25+15+5 = 45$ knuder og $3(15+5) = 60$ kanter, så $|\mathcal{A}_2(S_5)|$ er en wedge af $60-45+1 = 16$ cirkler. □

Proposition 2.19. *For $p \geq 3$ og $2p < n < 3p$ er $\mathcal{A}_p(S_n)$ en wedge af cirkler.*

Bevis. Undergruppen $\big\langle(1 \ \cdots \ p), ((p+1) \ \cdots \ 2p)\big\rangle$ i S_n har orden p^2 og er derfor en Sylow-p-undergruppe i S_n (idet vi har antaget $2p < n < 3p$ og $p \geq 3$).

Alle elementar-abelske p-undergrupper i S_n af rang 2 er derfor konjugerede til $\big\langle(1 \ \cdots \ p), ((p+1) \ \cdots \ 2p)\big\rangle$ og altså frembragt af to p-cykler. Desuden ser vi at $\mathcal{A}_p(S_n)$ er 1-dimensional. Fra proposition 2.16(iii) ved vi desuden at $\mathcal{A}_p(S_n)$ er sammenhængende; så $|\mathcal{A}_p(S_n)|$ er en sammenhængende graf og dermed en wedge af cirkler.

Antallet af cirkler kan bestemmes som i følgende eksempel. □

Eksempel 2.20. Hvis man ønsker at bestemme antallet af cirkler i wedge-summen fra proposition 2.19, er det som tidligere nok at tæller knuder og kanter i den sammenhængende graf $|\mathcal{A}_p(S_n)|$. Beregningerne bliver dog hurtigt omfattende, så vi illustrerer udregningerne med tilfældet $p = 5$ og $n = 11$:

Antallet af 5-cykler i gruppen S_{11} er $(5-1)!\binom{11}{5} = 11088$. Antallet af (cykel)type-5^2-permutationer er $\frac{((5-1)!)^2}{2}\binom{11}{5,5,1} = 798336$. Det samlede antal elementer af orden 5 er dermed 809424. Da hver undergruppe af orden 5 har 4 frembringere, er antallet af undergrupper af orden 5 i S_{11} lig med $809424/4 = 202356$.

Antallet af undergrupper i $\mathcal{A}_5(S_{11})$ af rang 2, dvs. undergrupper på formen $\big\langle\gamma_1, \gamma_2\big\rangle$ med γ_i en 5-cykel, er lig antallet af par af disjunkte 5-cykler – dvs. antallet af type-5^2-permutationer, 798336.

Hver elementar-abelsk p-undergruppe af rang 2, har $(p+1)$-undergrupper af orden p. Antallet af kanter i $|\mathcal{A}_5(S_{11})|$ er derfor $798336 \cdot (5+1) = 4790016$.

Nu har vi så at $|\mathcal{A}_5(S_{11})|$ er en wedge af

$$4970016 - (202356 + 798336) + 1 = 3789325$$

cirkler.

3 Sfæriske og Cohen-Macaulay pomængder

Definition 3.1. Et simplicielt kompleks K kaldes *d-sfærisk* hvis K er d-dimensionalt og $(d-1)$-sammenhængende. Det tomme kompleks $\emptyset$ er per definition (-1)-sfærisk.

Bemærkning 3.2. At være sfærisk er ikke en homotopi-invariant egenskab. Vi har eksempelvis at $\Delta^2 \sqcup \Delta^2 \simeq S^0$, og S^0 er 0-sfærisk. Det simplicielle kompleks $\Delta^2 \sqcup \Delta^2$ er dog ikke sfærisk, for komplekset er 2-dimensionalt, men ikke engang 0-sammenhængende.

Proposition 3.3. *Hvis et simplicielt kompleks K er d-sfærisk, med $d \geq 0$, så er K homotopiækvivalent med en wedge-sum af d-sfærer.*

Bevis. Hvis K er 0-sfærisk, er K et 0-dimensionalt simplicielt kompleks – dvs. K består af isolerede punkter. Lad r være antallet af punkter i K; da er K en wedge af $r-1$ eksemplarer af S^0.

Hvis K er 1-sfærisk, er K et sammenhængende 1-dimensionalt simplicielt kompleks – altså en sammenhængende graf. Vi ved at enhver sammenhængende graf er homotopiækvivalent til en wedge af cirkler: Hvis K har v knuder og e kanter, er K homotopiækvivalent til en wedge af $e-v+1$ stk. S^1.

Antag nu at K er d-sfærisk med $d \geq 2$. Da K er $(d-1)$-sammenhængende (med $d \geq 2$) giver Hurewicz' sætning at $\widetilde{H}_k(K) = 0$ for $k < d$, og $H_d(K) \simeq \pi_d(K)$. Idet K er d-dimensional gælder desuden at $H_d(K)$ er en fri abelsk gruppe, $H_d(K) \simeq \mathbb{Z}^r$.

Lad $f_i \colon S^d \to K$, $1 \leq i \leq r$ være den i'te frembringer for $\pi_d(K) \simeq H_d(K) \simeq \mathbb{Z}^r$. Vi definerer nu en afbildning $f\colon \bigvee_{i=1}^r S_i^d \to K$ ved at afbilde d-sfæren S_i^d ved afbildningen f_i. Med Hurewicz-homomorfien får vi da et kommutativt diagram:

$$\begin{tikzcd} \pi_d(S_i^d) \arrow[r, "(f_i)_*"] \arrow[d, "h"', "\simeq"] & \pi_d(K) \arrow[d, "\simeq"', "h"] \\ H_d(S_i^d) \arrow[r, "(f_i)_*"'] & H_d(K) \end{tikzcd}$$

Identitetsafbildningen $id_{S_i^d}$ er frembringer for $\pi_d(S_i^d) \simeq \mathbb{Z}$, så $h([id_{S_i^d}])$ frembringer $H_d(S_i^d)$. Vi ser så at

$$(f_i)_*(h([id_{S_i^d}])) = h((f_i)_*([id_{S_i^d}])) = h([f_i])$$

der frembringer den i'te faktor i $H_d(K) \simeq \mathbb{Z}^r$, så $(f_i)_* \colon H_d(S_i^d) \to H_d(K)$ er en bijektion af $H_d(S_i^d)$ på den i'te faktor i $H_d(K)$.

Den samlede afbildning $f\colon \bigvee_{i=1}^r S_i^d \to K$, inducerer dermed en isomorfi

$$H_d\left(\bigvee_{i=1}^r S_i^d\right) = \bigoplus_{i=1}^r H_d(S_i^d) \xrightarrow[\simeq]{f} H_d(K).$$

Både K og $\bigvee_{i=1}^r S_i^d$ har triviel (reduceret) homologi uden for grad d, så f inducerer isomorfier i homologi $f_*\colon H_i(\bigvee_{i=1}^r S_i^d) \xrightarrow{\simeq} H_i(K)$ for alle i. Da $\bigvee_{i=1}^r S_i^d$ og K er enkelt-sammenhængende CW-komplekser, følger per Whiteheads sætning at f er en homotopiækvivalens. $\square$

Proposition 3.4. *Lad X og Y være simplicielle komplekser. Hvis X er d-sfærisk, og Y er d'-sfærisk, da er $X * Y$ et $(d + d' + 1)$-sfærisk kompleks.*

Bevis. Resultatet er oplagt hvis d eller d' er lig -1. For $d' = -1$ fås eksempelvis $X*\emptyset = X$ der er sfærisk af dimension $d = d + (-1) + 1$. Antag derfor i det følgende at $d, d' \geq 0$.

Da X har dimension d, og Y har dimension d', får vi umiddelbart at $X * Y$ har dimension $d + d' + 1$ jævnfør bemærkning 1.18.

Ifølge proposition 3.3, er $X \simeq \bigvee_{i=1}^r S^d$ og $Y \simeq \bigvee_{j=1}^{r'} S^{d'}$ for passende r og r'. Vi benytter så resultaterne fra appendix A til at skrive $X * Y$ som en wedge af $(d + d' + 1)$-sfærer hvorved det følger at $X * Y$ er $(d + d')$-sammenhængende.

$$\begin{aligned}
X * Y &\overset{A.1}{\simeq} \Sigma(X \wedge Y) \overset{A.3}{=} S^1 \wedge X \wedge Y \\
&\simeq S^1 \wedge \left(\bigvee_{i=1}^{r} S^d\right) \wedge \left(\bigvee_{j=1}^{r'} S^{d'}\right) \\
&\overset{A.2}{=} \bigvee_{i=1}^{r} \bigvee_{j=1}^{r'} (S^1 \wedge S^d \wedge S^{d'}) \\
&\overset{A.3}{\simeq} \bigvee_{i=1}^{r} \bigvee_{j=1}^{r'} \Sigma\Sigma^d S^{d'} \simeq \bigvee_{i=1}^{r} \bigvee_{j=1}^{r'} S^{d+d'+1}.
\end{aligned}$$ $\square$

Korollar 3.5. *Hvis $\mathcal{A}_p(G_1)$ og $\mathcal{A}_p(G_2)$ er sfæriske, så er $\mathcal{A}_p(G_1 \times G_2)$ også sfærisk.*

Bevis. Lad $\pi_i\colon G_1 \times G_2 \to G_i$, $i = 1, 2$, være projektionerne. For alle $A \in \mathcal{A}_p(G_1 \times G_2)$ gælder $A \leq \pi_1(A) \times \pi_2(A)$, så de maksimale elementer i $\mathcal{A}_p(G_1 \times G_2)$ er på formen $A_1 \times A_2$ hvor A_i er en maksimal elementar-abelsk p-undergruppe i G_i. Specielt gælder dermed at $r_p(G_1 \times G_2) = r_p(G_1) + r_p(G_2)$.

Fra proposition 2.6 ved vi at $\mathcal{A}_p(G_1 \times G_2) \simeq \mathcal{A}_p(G_1) * \mathcal{A}_p(G_2)$. Da $\mathcal{A}_p(G_i)$ er sfærisk af dimension $r_p(G_i) - 1$, får vi så fra proposition 3.4 at $\mathcal{A}_p(G_1) * \mathcal{A}_p(G_2)$ er sfærisk af dimension

$$(r_p(G_1) - 1) + (r_p(G_2) - 1) + 1 = r_p(G_1 \times G_2) - 1.$$

Pomængden $\mathcal{A}_p(G_1 \times G_2)$ er altså $(r_p(G_1 \times G_2) - 2)$-sammenhængende. Idet $\mathcal{A}_p(G_1 \times G_2)$ desuden har dimension $r_p(G_1 \times G_2) - 1$, ser vi at $\mathcal{A}_p(G_1 \times G_2)$ er sfærisk som ønsket. $\square$

Definition 3.6. For et givet simpleks σ i et simplicielt kompleks K, defineres delkomplekset $\mathrm{Link}(\sigma, K)$: Et simpleks τ fra K ligger i *linket af* σ, $\mathrm{Link}(\sigma, K)$, såfremt τ opfylder følgende: Simplekserne σ og τ er disjunkte, men hjørnerne fra σ og τ udspænder tilsammen et simpleks i K.

Definition 3.7. Et d-dimensionalt simplicielt kompleks K kaldes *Cohen-Macaulay* (forkortes CM) såfremt: K er d-sfærisk, og for ethvert k-simpleks σ i K er $\mathrm{Link}(\sigma, K)$ sfærisk af dimension $d - k - 1$.

Proposition 3.8. *Alle* 0*-dimensionale simplicielle komplekser og alle sammenhængende* 1*-dimensionale komplekser er CM. Det tomme kompleks* $\emptyset$ *er CM af dimension* -1.

Bevis. Det tomme kompleks $\emptyset$ er (-1)-sfærisk per definition, og dermed CM af dimension -1.

Lad X være et 0-dimensionalt simplicielt kompleks. Da er $X \neq \emptyset$ per antagelse, så X er 0-sfærisk. For ethvert 0-simpleks/punkt $x \in X$ er $\mathrm{Link}(x, X) = \emptyset$ der er (-1)-sfærisk. Jævnfør definitionen af CM, er X dermed CM af dimension 0.

Lad nu X være et sammenhængende simplicielt kompleks af dimension 1. Per antagelse er X altså sfærisk af dimension 1. Hvis $\sigma \subseteq X$ er et 1-simpleks, er $\mathrm{Link}(\sigma, X) = \emptyset$ idet X er 1-dimensional. Så $\mathrm{Link}(\sigma, X)$ er sfærisk af dimension $-1 = \dim X - \dim \sigma - 1$. Hvis $x \in X$ er et 0-simpleks, er x forbundet til mindst ét andet 0-simpleks idet X er sammenhængende. Vi har dermed at $\mathrm{Link}(x, X)$ er ikke-tomt af dimension 0, dvs. 0-sfærisk. □

Definition 3.9. Lad X være en pomængde.

- X kaldes naturligvis *d-sfærisk* eller *Cohen-Macaulay* hvis det simplicielle kompleks $|X|$ har den pågældende egenskab.
- For ethvert element $x \in X$, defineres delpomængden $X_{>x} := \{z \in X \mid z > x\}$. Tilsvarende defineres $X_{\geq x}$, $X_{<x}$ og $X_{\leq x}$. Hvis vi har et andet element $y \in X$, defineres desuden

$$(x, y) := X_{>x} \cap X_{<y} = \{z \in X \mid x < z < y\}.$$

- *Højden*, $h(x)$, af et element $x \in X$ er supremum af længden af kæder i X med x som største element. Alternativt siger definitionen at $h(x)$ er dimensionen af pomængden $X_{\leq x}$ – dvs. dimensionen af komplekset $|X_{\leq x}|$.
- Givet en kæde $\sigma = (x_0 < \cdots < x_k)$ i X, defineres $\mathrm{Link}(\sigma, X) \subseteq X$ til at være delmængden af de elementer der ikke ligger i σ, men som tilføjet σ danner en ny kæde.

  Elementerne i $\mathrm{Link}(\sigma, X)$ er da netop 0-simplekserne i $\mathrm{Link}(\sigma, |X|)$ når vi opfatter σ som simpleks i $|X|$. Vi har derfor en naturlig sammenhæng mellem de to link-begreber: $\mathrm{Link}(\sigma, |X|) = |\mathrm{Link}(\sigma, X)|$.

  For kæden $\sigma = (x_0 < \cdots < x_k)$ i X har vi oplagt

$$\mathrm{Link}(\sigma, X) = X_{<x_0} * (x_0, x_1) * \cdots * (x_{k-1}, x_k) * X_{>x_k}. \tag{3.1}$$

Proposition 3.10. *En pomængde X af dimension n er CM hvis og kun hvis følgende betingelser er opfyldt for alle $x, x' \in X$:*

- *X er n-sfærisk,*
- *$X_{>x}$ er $(n - h(x) - 1)$-sfærisk,*
- *$X_{<x}$ er $(h(x) - 1)$-sfærisk,*
- *(x', x) er $(h(x) - h(x') - 2)$-sfærisk hvis $x' < x$.*

Bevis. Antag først at X er CM, og dermed specielt n-sfærisk. Lad $x \in X$ være givet.

Vælg først en kæde $\sigma = (x_0 < \cdots < x_{h(x)})$ i $X_{\leq x}$ af maksimal længde – så $x_{h(x)} = x$. På grund af maksimaliteten af σ er $\mathrm{Link}(\sigma, X) = X_{>x}$, jævnfør (3.1). Idet X er CM, følger straks at $X_{>x} = \mathrm{Link}(\sigma, X)$ er sfærisk af dimension $(n - h(x) - 1)$.

Vælg en kæde $\tau = (y_0 < \cdots < y_r)$ i $X_{\geq x}$ af maksimal længde – så $y_0 = x$. Analogt til ovenstående fås at $X_{<x} = \mathrm{Link}(\tau, X)$ er sfærisk af dimension $n - r - 1$. Da $X_{\leq x}$ har dimension $h(x)$, har $X_{<x}$ dimension $h(x) - 1$. Vi har altså $n - r - 1 = h(x) - 1$, hvorfra vi får $r = n - h(x)$.

Antag nu at vi har $x' \in X$ med $x' < x$. Vælg en kæde $\rho = (z_0 < \cdots < z_{h(x')})$ i $X_{\leq x'}$ af maksimal længde – så $z_{h(x')} = x'$. Vi danner nu en samlet kæde $\rho * \tau = (z_0 < \cdots < z_{h(x')} < y_0 < \cdots < y_r)$ af længde $h(z) + r + 1$. Maksimalitet af τ og ρ samt at X er CM, giver nu at $(x', x) = \mathrm{Link}(\rho * \tau, X)$ er sfærisk af dimension $n - (h(z) + r + 1) - 1 = h(x) - h(z) - 2$.

Antag nu omvendt at X opfylder de fire betingelser i 3.10. I så fald er X allerede n-sfærisk per antagelse. Lad $\sigma = (x_0 < \cdots < x_k)$ være en vilkårlig kæde i X. Ved gentagen anvendelse af proposition 3.4 får vi da straks at

$$\mathrm{Link}(\sigma, X) = X_{<x_0} * (x_0, x_1) * \cdots * (x_{k-1}, x_k) * X_{>x_k}$$

er sfærisk af dimension

$$\begin{aligned}(h(x_0) - 1) + \sum_{i=1}^{k} (h(x_i) - h(x_{i-1}) - 2) + (n - h(x_k) - 1) + (k + 1)& \\ = (-1) + k \cdot (-2) + (n - 1) + (k + 1) = n - k - 1.&\end{aligned}$$

Pomængden X er således CM. □

Bemærkning 3.11. Lad X være en pomængde der er CM af dimension n. Med en maksimal kæde i en pomængde, menes en kæde der ikke er indeholdt i en længere kæde i pomængden. En maksimal kæde har altså ikke nødvendigvis maksimal længde; det gælder dog når pomængden er CM:

- Enhver maksimal kæde i X har længde n: Hvis en kæde σ er maksimal, så er $\mathrm{Link}(\sigma, X) = \emptyset$ – altså sfærisk af dimension -1. Da X er CM følger at σ må have længde n.

- Tilsvarende får vi at enhver maksimal kæde σ i $X_{\leq x}$ har længde $h(x)$. Maksimaliteten af σ giver nemlig at $\mathrm{Link}(\sigma, X) = X_{>x}$, der er sfærisk af dimension $n-h(x)-1$.
- Enhver maksimal kæde σ i $X_{\geq x}$ har længde $n - h(x)$, idet $\mathrm{Link}(\sigma, X) = X_{<x}$ er sfærisk af dimension $h(x) - 1$.
- Enhver maksimal kæde σ i $\{z \in X \mid x' \leq z \leq x\}$, hvor $x' \leq x$, har længde $h(x) - h(x')$. Dette skyldes at $\mathrm{Link}(\sigma, X) = X_{<x'} * X_{>x}$ er sfærisk af dimension $n - (h(x) - h(x')) - 1$.

Korollar 3.12. *Hvis X er CM af dimension n gælder endda*

- *$X_{>x}$ er CM af dimension $(n - h(x) - 1)$,*
- *$X_{<x}$ er CM af dimension $(h(x) - 1)$,*
- *(x', x) er CM af dimension $(h(x) - h(x') - 2)$ hvis $x' < x$.*

Bevis. Påstanden følger direkte ved anvendelse af proposition 3.10 på pomængderne $X_{>x}$, $X_{<x}$ og (x', x). Vi gennemgår argumentet for $X_{>x}$ som eksempel:

$X_{>x}$ er for det første $(n - h(x) - 1)$-sfærisk idet X er CM. Lad $d := n - h(x) - 1$ være dimensionen af $X_{>x}$.

Lad $\widehat{h}(x')$ være højde af et element x' i $X_{>x}$. Da alle maksimale kæder i $\{z \in X \mid x \leq z \leq x'\}$ har længde $h(x') - h(x)$, gælder $\widehat{h}(x') = h(x') - h(x) - 1$.

For ethvert $x' \in X_{>x}$ gælder $(X_{>x})_{>x'} = X_{>x'}$ der er sfærisk af dimension

$$n - h(x') - 1 = (n - h(x) - 1) - (h(x') - h(x) - 1) - 1 = d - \widehat{h}(x') - 1$$

da X er CM. Der gælder desuden at $(X_{>x})_{<x'} = (x, x')$ er sfærisk af dimension

$$h(x') - h(x) - 2 = \widehat{h}(x') - 1.$$

For $x', x'' \in X_{>x}$ med $x' < x''$ ser vi til sidst at (x', x'') er sfærisk af dimension

$$h(x'') - h(x') - 2 = \widehat{h}(x'') - \widehat{h}(x') - 2.$$

Pomængden $X_{>x}$ er således CM af dimension $n - h(x) - 1$ som påstået. □

3.1 En spektralfølge

Dette afsnit omhandler sætning 3.16 der gør det muligt at slutte at en pomængde X er sfærisk eller Cohen-Macaulay hvis visse andre pomængder er hhv. sfæriske eller Cohen-Macaulay. Sætningen bygger på eksistensen af en homologi-spektralfølge, 3.15, når man har en afbildning mellem pomængder. Denne spektralfølge benytter en udvidelse af homologi-begrebet $H_i(X, F)$ (for en pomængde X) til situationer hvor F ikke er en gruppe, men i stedet en funktor $F\colon X \to Ab$.

Definition 3.13. Lad X være en pomængde, og lad $F\colon X \to Ab$ være en funktor. Vi definerer da kædekomplekset $C_*(X, F)$ med

$$C_n(X,F) := \bigoplus_{x_0<\cdots<x_n\in X} F(x_0)$$

og differentialet $d\colon C_n(X,F) \to C_{n-1}(X,F)$ defineret som sædvanligt $d = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i$. Hvis elementerne i $C_n(X,F)$ noteres (σ, a) hvor $\sigma = (x_0 < \cdots < x_n)$ er en kæde i X, og $a \in F(x_0)$; så er homomorfien $d_i\colon C_n(X,F) \to C_{n-1}(X,F)$ givet ved

$$d_i(\sigma,a) = \begin{cases} (d_i(\sigma), a) & \text{for } i > 0, \\ (d_0(\sigma), F(x_0 < x_1)(a)) & \text{for } i = 0, \end{cases}$$

hvor $F(x_0 < x_1)\colon F(x_0) \to F(x_1)$ er homomorfien vi får fra funktoren F.

Homologigrupperne $H_i(X,F)$ defineres nu som homologigrupperne for kædekomplekset $C_*(X,F)$.

Bemærkning 3.14. Hvis funktoren $F\colon X \to Ab$ er en konstant funktor med $F(x) = A$, så er homologigrupperne $H_i(X,F)$ blot den sædvanlige homologi $H_i(X,A) = H_i(|X|, A)$ med A som koefficientgruppe. Specielt lader vi stadig $H_i(X)$ betegne homologi med $\mathbb{Z}$-koefficienter.

Proposition 3.15. *Lad $f\colon X \to Y$ være en afbildning af pomængder. Der findes da en førstekvadrants-, homologi-spektralfølge der konvergerer med*

$$E^2_{p,q} = H_p(Y, y \mapsto H_q(f/y)) \Rightarrow H_{p+q}(X).$$

Bevis. Quillen skriver i sin artikel [Qui78] at udledningen er beskrevet i [GZ67, Appendix II]. Alternativt kan spektralfølgen uddeles fra Bousfield-Kan homologi-spektralfølgen for hocolim hvis man benytter at $\operatorname{hocolim}_{y\in Y} N(f/y) \simeq N(X)$ (se appendix B). □

Sætning 3.16. *Lad $f\colon X \to Y$ være en afbildning af pomængder. Antag at Y er n-sfærisk. Antag desuden for alle $y \in Y$ at $Y_{>y}$ er $(n - h(y) - 1)$-sfærisk, og at f/y er $h(y)$-sfærisk.*

I så fald er X sfærisk af dimension n. Der findes desuden en filtration

$$0 = F_{n+1} \leq F_n \leq \cdots \leq F_0 \leq F_{-1} = H_n(X)$$

med kvotienterne

$$\begin{aligned} F_{-1}/F_0 &\simeq H_n(Y), \\ F_q/F_{q+1} &\simeq \bigoplus_{h(y)=q} \widetilde{H}_{n-q-1}(Y_{>y}) \otimes \widetilde{H}_q(f/y) \quad \text{for } 0 \leq q \leq n. \end{aligned}$$

Her tages den direkte sum over elementerne $y \in Y$ af højde q.

Bevis. Hvis $n = -1$, er $Y = \emptyset$. Eksistensen af en afbildning $f\colon X \to \emptyset$ giver så straks at $X = \emptyset$; og vi har dermed $H_{-1}(X) = H_{-1}(Y) = 0$ samt $\widetilde{H}_{-1}(X) = \widetilde{H}_{-1}(Y) = \mathbb{Z}$. Sætningen holder altså for $n = -1$, så antag herefter at $n \geq 0$.

Vi tjekker først at dimensionen af X er n: Enhver kæde $x_0 < \cdots < x_k$ i X er indeholdt i delpomængden f/y for $y = f(x_k)$. Vi kan derfor udregne dimensionen af X ved at se på delmængderne $f/y \subseteq X$. Idet f/y er antaget $h(y)$-sfærisk får vi så

$$\dim(X) = \sup_{y \in Y} \dim(f/y) = \sup_{y \in Y} h(y) = \dim Y = n.$$

For at vise at X er n-sfærisk, mangler vi derfor "kun" at vise at X er $(n-1)$-sammenhængende.

For afbildningen $f\colon X \to Y$ har vi fra proposition 3.15 en spektralfølge:

$$E^2_{p,q} = H_p(Y, y \mapsto H_q(f/y)) \Rightarrow H_{p+q}(X). \tag{3.2}$$

For $q > 0$, har vi $E^2_{p,q} = H_p(Y, y \mapsto \widetilde{H}_q(f/y))$. For $q = 0$, har vi i stedet en korteksakt følge (idet f/y er $h(y)$-sfærisk og dermed ikke-tom)

$$0 \to \widetilde{H}_0(f/y) \to H_0(f/y) \to \mathbb{Z} \to 0$$

der er naturlig i y. Herfra får vi en korteksakt følge af kædekomplekser

$$0 \to C_*(Y, y \mapsto \widetilde{H}_0(f/y)) \to C_*(Y, y \mapsto H_0(f/y)) \to C_*(Y, \mathbb{Z}) \to 0;$$

og en korteksakt følge af kædekomplekser giver som bekendt en langeksakt følge i homologi:

$$\cdots \to H_{p+1}(Y) \to H_p(Y, y \mapsto \widetilde{H}_0(f/y)) \to E^2_{p,0} \to H_p(Y) \to \cdots. \tag{3.3}$$

Der således interessant at forsøge at udregne $H_p(Y, y \mapsto \widetilde{H}_q(f/y))$ for alle $p, q \geq 0$.

Idet f/y er antaget $h(y)$-sfærisk, er $\widetilde{H}_q(f/y) = 0$ med mindre $h(y) = q$, og det forsimpler situationen en hel del. Elementerne af højre q i Y er urelaterede under ordningen i Y (ellers ville de ikke have samme højde). Funktoren $y \mapsto \widetilde{H}_q(f/y)$ er derfor blot den direkte sum (over y med $h(y) = q$) af funktorerne $\widetilde{H}_q(f/y)_{(y)}\colon Y \to Ab$,

$$\widetilde{H}_q(f/y)_{(y)}(y') := \begin{cases} \widetilde{H}_q(f/y) & \text{for } y' = y, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Lemma 3.17. *Lad A være en abelsk gruppe, og lad $A_{(y)}\colon Y \to Ab$ være funktoren givet ved*

$$A_{(y)}(y') := \begin{cases} A & \text{for } y' = y, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

I så fald gælder formlen

$$H_i(Y, A_{(y)}) = \widetilde{H}_{i-1}(Y_{>y}, A).$$

Bevis for lemma. Sæt $U = Y_{\geq y}$ og $V = Y_{>y}$. Lad desuden funktoren $A_U \colon Y \to Ab$ være konstant lig A på delpomængden $U \subseteq Y$ og konstant 0 på resten af Y. Funktoren $A_V \colon Y \to Ab$ defineres tilsvarende. De definerede A_U og A_V er faktisk funktorer – idet U og V er opadtil afsluttede.

Det ses direkte fra definition 3.13 at $C_*(Y, A_U) = C_*(U, A)$ og $C_*(Y, A_V) = C_*(V, A)$ idet $U, V \subseteq Y$ er afsluttet opadtil. I homologi får vi altså straks

$$\begin{aligned} H_i(Y, A_V) &= H_i(V, A) \\ H_i(Y, A_U) &= H_i(U, A) = H_i(pt, A) \end{aligned}$$

hvor vi har benyttet at U er kontraktibel (U har et mindste element).

Den korteksakte følge

$$0 \to A_V(y') \to A_U(y') \to A_{(y)}(y') \to 0$$

der er naturlig i $y' \in Y$, giver en langeksakt følge

$$\cdots \to H_i(pt, A) \to H_i(Y, A_{(y)}) \to H_{i-1}(Y_{>y}, A) \to H_{i-1}(pt, A) \to \cdots$$

Heraf fås straks $H_i(Y, A_{(y)}) = H_{i-1}(Y_{>y}, A) = \widetilde{H}_{i-1}(Y_{>y}, A)$ for $i \geq 2$. Lad os derfor se på slutningen af den langeksakte følge:

$$0 \to H_1(Y, A_{(y)}) \to H_0(Y_{>y}, A) \to H_0(pt, A) \to H_0(Y, A_{(y)}) \to 0. \tag{3.4}$$

Hvis $Y_{>y} = \emptyset$, er $H_0(Y_{>y}, A) = 0$, så vi får

$$\begin{aligned} H_1(Y, A_{(y)}) &= 0 = \widetilde{H}_0(Y_{>y}, A), \\ H_0(Y, A_{(y)}) &= H_0(pt, A) = A = \widetilde{H}_{-1}(Y_{>y}, A). \end{aligned}$$

Hvis omvendt $Y_{>y} \neq \emptyset$, bliver slutningen af kædekomplekset $C_*(Y, A_{(y)})$ til

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & \bigoplus_{y_0 < y_1} A_{(y)}(y_0) \arrow[r, "d"] \arrow[d, equal] & \bigoplus_{y_0} A_{(y)}(y_0) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ \cdots \arrow[r] & \bigoplus_{y < y_1} A \arrow[r, "a \mapsto -a"] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Idet $Y_{>y} \neq \emptyset$, ses at differentialet $d \colon C_1(Y, A_{(y)}) \to C_0(Y, A_{(y)})$ er surjektivt; og heraf sluttes $H_0(Y, A_{(y)}) = 0 = \widetilde{H}_{-1}(Y_{>y}, A)$.

Følgen (3.4) reducerer nu til den korteksakte følge

$$0 \to H_1(Y, A_{(y)}) \to H_0(Y_{>y}, A) \to H_0(pt, A) \to 0$$

der direkte viser $H_1(Y, A_{(y)}) = \widetilde{H}_0(Y_{>y}, A)$. ■

Som tidligere nævnt har vi at funktoren $y \mapsto \widetilde{H}_q(f/y)$ er den direkte sum af $\widetilde{H}_q(f/y)_{(y)}$ summeret over $y \in Y$ med $h(y) = q$. Vi kan så benytte lemma 3.17:

$$H_p(Y, y \mapsto \widetilde{H}_q(f/y)) = \bigoplus_{h(y)=q} H_p(Y, \widetilde{H}_q(f/y)_{(y)}) = \bigoplus_{h(y)=q} \widetilde{H}_{p-1}(Y_{>y}, \widetilde{H}_q(f/y)).$$

Betragt et y med $h(y) = q$. Da f/y er q-sfærisk, er $\widetilde{H}_q(f/y))$ en fri abelsk gruppe; dermed er $\widetilde{H}_{p-1}(Y_{>y}, \widetilde{H}_q(f/y)) = \widetilde{H}_{p-1}(Y_{>y}) \otimes \widetilde{H}_q(f/y)$. Endvidere er $Y_{>y}$ antaget af være $(n - h(y) - 1)$-sfærisk, så $\widetilde{H}_{p-1}(Y_{>y}) = 0$ med mindre $p = n - h(y) = n - q$ (idet $h(y) = q$).

Vi får således at

$$H_p(Y, y \mapsto \widetilde{H}_q(f/y)) = \bigoplus_{h(y)=q} \widetilde{H}_{n-q-1}(Y_{>y}) \otimes \widetilde{H}_q(f/y)$$

hvis $p + q = n$ og $H_p(Y, y \mapsto \widetilde{H}_q(f/y)) = 0$ ellers.

Specielt gælder at $H_p(Y, y \mapsto \widetilde{H}_0(f/y)) = 0$ for $p \neq n$. Betragter vi så den langeksakte følge (3.3) fra tidligere, ser vi at den splitter op med $E^2_{p,0} = H_p(Y)$ for $p \neq n, n+1$ samt en enkelt eksakt følge

$$0 \to E^2_{n+1,0} \to H_{n+1}(Y) \to H_n(Y, y \mapsto \widetilde{H}_0(f/y)) \to E^2_{n,0} \to H_n(Y) \to 0.$$

Idet Y er n-dimensional, følger dog straks $E^2_{n+1,0} = H_{n+1}(Y) = 0$; så følgen reducerer til den korteksakte

$$0 \to H_n(Y, y \mapsto \widetilde{H}_0(f/y)) \to E^2_{n,0} \to H_n(Y) \to 0. \tag{3.5}$$

Vi ser altså at $E^2_{p,0} = H_p(Y)$ for $p \neq n$; og da Y er n-sfærisk, følger $E^2_{p,0} = 0$ for $p > 0$ med $p \neq n$.

For spektralfølgen (3.2) har vi altså at $E^2_{p,q} = 0$ for $p + q \neq n$ (bortset fra $E^2_{0,0} = H_0(Y)$ for $n > 0$). Alle differentialer i spektralfølgen er dermed trivielle, så spektralfølgen degenererer med $E^\infty_{p,q} = E^2_{p,q}$. Fra spektralfølgen har vi nu en filtration

$$0 = F_{n+1} \leq F_n \leq \cdots \leq F_1 \leq H_n(X),$$

hvor kvotienterne står i n-diagonalen af E^∞-siden:

$$\begin{aligned} F_q/F_{q+1} &\simeq E^\infty_{n-q,q} = E^2_{n-q,q} \\ &= H_{n-q}(Y, y \mapsto \widetilde{H}_q(f/y)) \\ &= \bigoplus_{h(y)=q} \widetilde{H}_{n-q-1}(Y_{>y}) \otimes \widetilde{H}_q(f/y) \quad \text{for } 1 \leq q \leq n. \end{aligned}$$

Tilsvarende har vi $H_n(X)/F_1 \simeq E^2_{n,0}$ der har $\mathbb{Z}$-undermodulen $H_n(Y, y \mapsto \widetilde{H}_0(f/y))$ fra (3.5). Denne undermodul svarer til $F_1 \leq F_0 \leq H_n(X)$ med

$$
\begin{aligned}
F_0/F_1 &\simeq H_n(Y, y \mapsto \widetilde{H}_0(f/y)) = \bigoplus_{h(y)=0} \widetilde{H}_{n-1}(Y_{>y}) \otimes \widetilde{H}_0(f/y), \text{ samt} \\
H_n(X)/F_0 &\simeq (H_n(X)/F_1)\big/(F_0/F_1) \simeq E^2_{n,0}\big/H_n(Y, y \mapsto \widetilde{H}_0(f/y)) \\
&\simeq H_n(Y).
\end{aligned}
$$

Vi har nu fundet filtrationen i sætningen, og vi har vist at X har triviel $\widetilde{H}_i(X)$ for $i < n$. For $n = 0, 1$ er dette tilstrækkeligt til at X er $(n-1)$-sammenhængende; men for $n \geq 2$ skal vi vise at X er enkelt-sammenhængende, før vi kan slutte fra homologi at X er $(n-1)$-sammenhængende.

Resten af beviset går med at bevise at X er enkeltsammenhængende for $n \geq 2$. Jævnfør korollar 1.23 er X enkeltsammenhængende hvis og kun hvis alle lokale systemer på X er trivielle. Lad derfor $F\colon X \to \mathit{Set}$ være et vilkårligt lokalt system på X.

Vi ønsker nu ud fra $F \in \mathrm{Cov}(X)$ at konstruere et lokalt system $E \in \mathrm{Cov}(Y)$. Vi definerer først $E\colon Y \to \mathit{Set}$ på alle $y \in Y$ med $h(y) \geq 1$ ved at sætte

$$E(y) := \operatorname*{colim}_{f/y} F \quad \text{hvis } h(y) \geq 1.$$

Dette giver en funktor på pomængden $Y_{h(y)\geq 1}$ af $y \in Y$ med $h(y) \geq 1$, fordi $y \leq y'$ inducerer en kanonisk afbildning $\operatorname{colim}_{f/y} F \to \operatorname{colim}_{f/y'} F$ via den universelle egenskab for $\operatorname{colim}_{f/y} F$.

Hvis $y \in Y$ med $h(y) \geq 2$, gælder per antagelse i sætningen at f/y er enkeltsammenhængende. Jævnfør korollar 1.23, er det lokale system $F|_{f/y}\colon f/y \to \mathit{Set}$ dermed trivielt, altså isomorft med en konstant funktor $C_M\colon x \mapsto M$. Da f/y desuden er sammenhængende, får vi så

$$E(y) = \operatorname*{colim}_{f/y} F \simeq \operatorname*{colim}_{f/y} C_M = M,$$

og de kanoniske afbildninger $F(x) \to \operatorname{colim}_{f/y} F$ er isomorfier. Vi har altså $F(x) \xrightarrow{\simeq} E(y)$ for alle $x \in f/y$, såfremt $h(y) \geq 2$.

Hvis $h(y) = 1$, ved vi kun at f/y er sammenhængende. Der gælder dog nu at $Y_{>y}$ er sfærisk af dimension $n - h(y) - 1 = n - 2 \geq 0$, så $Y_{>y}$ er ikke-tom. Vi kan derfor vælge et $y' > y$, hvorved $h(y') \geq 2$. Som ovenfor har vi at $F|_{f/y'}$ er isomorf med en konstant funktor; og idet $f/y \subseteq f/y'$ følger dermed også at $F|_{f/y}$ er isomorf med en konstant funktor. Da f/y som bemærket er sammenhængende, får vi igen som ovenfor at de kanoniske afbildninger $F(x) \to \operatorname{colim}_{f/y} F = E(y)$ er isomorfier for $x \in f/y$.

For alle $y, y' \in Y$ med $y \leq y'$ og $h(y) \geq 1$, samt alle $x \in f/y$ og $x \leq x' \in f/y'$, er der følgende kommutative diagram:

$$\begin{tikzcd} F(x) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "F(x \leq x')"', "\simeq"] \arrow[dr] & E(y) \arrow[d, "E(y \leq y')"] \\ F(x') \arrow[r, "\simeq"'] & E(y') \end{tikzcd}$$

Afbildningen længst til højre er den kanoniske afbildning $\operatorname{colim}_{f/y} F \to \operatorname{colim}_{f/y'} F$ induceret af $f/y \hookrightarrow f/y'$, så den øverste trekant kommuterer. Den nederste trekant kommuterer per definition af $\operatorname{colim}_{f/y'} F$ idet $x \leq x'$ er en morfi i f/y'. Vi ser specielt at E er et lokalt system på delmængden $Y_{h(y) \geq 1} \subset Y$ bestående af y med $h(y) \geq 1$.

For alle $x \in X$ med $h(f(x)) \geq 1$, indfører vi τ_x som symbol for den kanoniske afbildning $\tau_x \colon F(x) \xrightarrow{\simeq} E(f(x))$. For alle $x, x' \in X$ med $x < x'$, får vi da fra ovenstående diagram at

$$\begin{tikzcd} F(x) \arrow[r, "\tau_x", "\simeq"'] \arrow[d, "F(x < x')"', "\simeq"] \arrow[dr] & E(f(x)) \arrow[d, "E(f(x) \leq f(x'))"] \\ F(x') \arrow[r, "\simeq", "\tau_{x'}"'] & E(f(x')) \end{tikzcd} \tag{3.6}$$

kommuterer.

Nu udvider vi E til elementerne af højde 0 i Y. Lad $y_0 \in Y$ være et vilkårligt element i Y af højde 0. Først defineres $\widehat{E}(y_0) := \operatorname{colim}_{f/y_0} F$ som tidligere. Pomængden f/y_0 er antaget 0-sfærisk, så f/y_0 er en ikke-tom samling af ikke-relaterede elementer. Vi har således

$$\widehat{E}(y_0) = \coprod_{x \in f/y_0} F(x).$$

For $y > y_0$, får vi en afbildning $\varphi_y \colon \widehat{E}(y_0) \to E(y)$ fra den universelle egenskab for colim, og denne afbildning $\coprod_{x \in f/y_0} F(x) \to E(y)$ er blot den kanoniske afbildning $F(x) \xrightarrow{\simeq} E(y)$ for hvert $x \in f/y_0 \subset f/y$. Specielt bemærker vi at φ_y er surjektiv.

For $y > y_0$, indfører vi en ækvivalensrelation $\sim_y$ på $\widehat{E}(y_0)$ ved

$$a \sim_y a' \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \varphi_y(a) = \varphi_y(a').$$

Hvis vi yderligere har $y_0 < y \leq y'$, gælder $\varphi_{y'} = E(y \leq y') \circ \varphi_y$; og da $E(y \leq y')$ er en isomorfi, ser vi at relationerne $\sim_y$ og $\sim_{y'}$ stemmer overens. Per antagelse er $Y_{>y_0}$ sfærisk af dimension $n - h(y_0) - 1 \geq 1$, så $Y_{>y_0}$ er sammenhængende. Ækvivalensrelationen $\sim_y$ afhænger dermed ikke af valget af $y \in Y_{>y_0}$.

Vi definerer nu $E(y_0)$ som kvotient-mængden $\widehat{E}(y_0)/\sim_y$ for et vilkårligt $y \in Y_{>y_0}$. Den surjektive afbildning φ_y inducerer dermed en bijektion $E(y_0 < y)\colon E(y_0) \to E(y)$; der for alle $y_0 < y \leq y'$ opfylder $E(y_0 < y') = E(y \leq y') \circ E_(y_0 < y)$. Vi får således en udvidelse af E til et lokalt system på hele Y.

For $x \in X$ med $h(f(x)) = 0$, defineres $\tau_x\colon F(x) \xrightarrow{\simeq} E(f(x))$ som kompositionen $F(x) \hookrightarrow \coprod_{z \in f/f(x)} F(z) \twoheadrightarrow E(f(x))$. For ethvert $x' > x$, gælder $f(x') > f(x)$ idet $x' \notin f/f(x)$ – da $f/f(x)$ er 0-dimensional. Dermed får vi

$$\begin{tikzcd} F(x) \arrow[r, "\tau_x"] \arrow[d, "F(x<x')"', "\simeq"] \arrow[dr, "\simeq"] & E(f(x)) \arrow[d, "\simeq"', "E(f(x)<f(x'))"] \\ F(x') \arrow[r, "\simeq", "\tau_{x'}"'] & E(f(x')) \end{tikzcd} \tag{3.7}$$

Den øverste trekant kommuterer idet $E(f(x) < f(x'))$ er induceret af afbildningen $\coprod_{z \in f/f(x)} F(z) \to E(f(x'))$ der er givet ved den kanoniske afbildning $F(x) \to E(f(x'))$ på $F(x)$. Den nederste trekant kommuterer idet $x < x'$ er en morfi i $f/f(x')$. Fra det kommutative diagram (3.7) ser vi at τ_x er en bijektion.

Diagrammerne (3.6) og (3.7) viser tilsammen at $\tau_x\colon F(x) \to E(f(x))$, $x \in X$, kombinerer til en naturlig isomorfi $\tau\colon F \simeq f^*(E)$ af lokale systemer på X. Pomængden Y er antaget sfærisk af dimension $n \geq 2$. Specielt er Y altså enkeltsammenhængende; og korollar 1.23 giver dermed at det lokale system $E \in \mathrm{Cov}(Y)$ er trivielt. Når E er trivielt, følger at $F \simeq f^*(E) \in \mathrm{Cov}(X)$ er trivielt; og da $F \in \mathrm{Cov}(X)$ var valgt vilkårligt, er alle lokale systemer på X trivielle. Korollar 1.23 giver dermed at X er enkeltsammenhængende som ønsket. $\square$

Bemærkning 3.18. Alle filtrationskvotienterne F_i/F_{i+1} i sætning 3.16 er frie abelske grupper – fordi $\widetilde{H}_k(K)$ og $H_k(K)$ er frie hvis K er et k-dimensionalt simplicielt kompleks. Heraf følger så at $\widetilde{H}_n(X)$ faktisk er den direkte sum (dog ikke naturligt) af filtrationskvotienterne.

Bemærkning 3.19. Filtrationen i sætning 3.16 kan hurtigt tilpasses til en filtration af $\widetilde{H}_n(X)$:

$$0 = F_{n+1} \leq F_n \leq \cdots \leq F_0 \leq F_{-1} = \widetilde{H}_n(X)$$

med kvotienterne

$$\begin{aligned} F_{-1}/F_0 &\simeq \widetilde{H}_n(Y), \\ F_q/F_{q+1} &\simeq \bigoplus_{h(y)=q} \widetilde{H}_{n-q-1}(Y_{>y}) \otimes \widetilde{H}_q(f/y) \quad \text{for } 0 \leq q \leq n. \end{aligned}$$

For $n = -1$ fremgår filtrationen $0 \leq \widetilde{H}_{-1}(Y) = \widetilde{H}_{-1}(X)$ allerede af første linje i beviset. For $n = 0$ fjerner vi blot en $\mathbb{Z}$-summand fra både $H_0(X)$ og $H_0(Y)$. For $n > 0$ er $\widetilde{H}_n(X) = H_n(X)$ og $\widetilde{H}_n(Y) = H_n(Y)$, så der står filtrationen urørt.

Korollar 3.20. *Lad* $f: X \to Y$ *være en strengt voksende afbildning af pomængder, dvs.* $x' < x \Rightarrow f(x') < f(x)$*. Hvis* Y *er CM af dimension* n*, og hvis* f/y *er CM af dimension* $h(y)$ *for alle* $y \in Y$*, så er* X *CM af dimension* n*.*

Bevis. Vi viser at X er CM ved at vise at X opfylder betingelserne i proposition 3.10.

Ifølge korollar 3.12 er $Y_{>y}$ CM af dimension $n - h(y) - 1$ idet Y er antaget CM. Den netop beviste sætning 3.16 giver da straks at X er n-sfærisk.

Alle mængderne f/y er afsluttet nedadtil i X, så højden af et element x i f/y er den samme som højden af x i X. Hvis vi betragter pomængden $X_{<x}$ for et $x \in X$ eller pomængden (x', x) for $x' < x \in X$, ser vi at både $X_{<x}$ og (x', x) er delmængder af $f/f(x)$. Pomængden $f/f(x)$ er antaget CM, så proposition 3.10 giver at $X_{<x}$ er $(h(x) - 1)$-sfærisk, og at (x', x) er $(h(x) - h(x') - 2)$-sfærisk.

Vi mangler således blot at vise at $X_{>x}$ er sfærisk af dimension $n - h(x) - 1$. Da f er strengt voksende, får vi ved restriktion en afbildning $f': X_{>x} \to Y_{>y}$ hvor $y = f(x)$; og desuden får vi at x er maksimal i f/y, så $h(x) = h(y)$ ifølge bemærkning 3.11 (anvendt på f/y der er CM af dimension $h(y)$). Hvis vi kan vise at f' opfylder betingelserne i korollar 3.20, kan vi slutte at $X_{>x}$ er sfærisk ud fra den del af korollaret vi allerede har bevist.

Pomængden $Y_{>y}$ er som tidligere nævnt CM af dimension $n - h(y) - 1$ idet Y er CM. For ethvert $y' \in Y_{>y}$ har vi

$$f'/y' = \{x' \in X \mid x' > x \text{ og } f(x') \leq y'\} = (f/y')_{>x}.$$

Da f/y' er CM af dimension $h(y')$, får vi fra korollar 3.12 at $(f/y')_{>x}$ er CM af dimension $h(y') - h(x) - 1 = h(y') - h(y) - 1$. Idet Y er CM, giver bemærkning 3.11 at en maksimal kæde i (y, y') har længde $h(y') - h(y) - 2$; en maksimal kæde i $Y_{>y}$ med y' som største element vil derfor have længde $h(y') - h(y) - 1$. Højden af y' i $Y_{>y}$ er altså $h(y') - h(y) - 1$, og f'/y' er CM af dimension $h(y') - h(y) - 1$. Afbildningen f' opfylder altså betingelserne i 3.20, så den allerførste del af beviset givet at $X_{>x}$ er sfærisk af dimension $n - h(y) - 1 = n - h(x) - 1$. □

4 Cohen-Macaulay-egenskaben for $\mathcal{A}_p(G)$

Proposition 4.1. *Lad V være et n-dimensionalt vektorrum ($n \geq 1$) over et legeme k. Pomængden, $T(V)$, af alle ikke-trivielle, ægte underrum af V (ordnet ved inklusion) er da CM af dimension $n-2$.*

Bevis. For $n = 1$ er $T(V) = \emptyset$ der er CM af dimension -1. Antag herefter at $n = \dim V \geq 2$.

Vi ser på de 1-dimensionale underrum ℓ i V, og danner et simplicielt kompleks $\mathcal{L}$: Komplekset $\mathcal{L}$ indeholder et k-simpleks for hvert sæt $\{\ell_0, \dots, \ell_k\}$ af 1-dimensionale underrum ℓ_i hvor $\ell_0 + \cdots + \ell_k < V$.

Tilbage i bemærkning 1.10 så vi at $\mathcal{L} = |S(\mathcal{L})|$ hvor $S(\mathcal{L})$ er pomængden af simplekser i $\mathcal{L}$. Elementerne i $S(\mathcal{L})$ er altså sæt $L = \{\ell_0, \dots, \ell_k\}$ med $\ell_0 + \cdots + \ell_k < V$, og $S(\mathcal{L})$ er ordnet ved inklusion.

Lad nu $f \colon S(\mathcal{L}) \to T(V)$ være pomængde-afbildningen givet ved

$$f(L) := \ell_0 + \cdots + \ell_k \in T(V)$$

hvor $L = \{\ell_0, \dots, \ell_k\}$. Vi ønsker at vise at f er en homotopiækvivalens. For et vilkårligt ikke-trivielt, ægte underrum $U < V$, er

$$\begin{aligned} f/U &= \{\{\ell_0, \dots, \ell_k\} \in S(\mathcal{L}) \mid \ell_0 + \cdots + \ell_k \leq U\} \\ &= \{\{\ell_0, \dots, \ell_k\} \in S(\mathcal{L}) \mid \ell_i \leq U\}. \end{aligned}$$

Vælg nu et fast 1-dimensional underrum $\ell \leq U$. I pomængden f/U gælder da umiddelbart for alle $L \in f/U$:

$$L \leq L \cup \{\ell\} \geq \{\ell\}.$$

Pomængden f/U er altså konisk kontraktibel; og da $U \in T(V)$ var vilkårlig, giver Quillens sætning A, 1.12, at f er en homotopiækvivalens.

Vi har således $\mathcal{L} = |S(\mathcal{L})| \simeq |T(V)|$. For vilkårlige $\ell_0, \dots, \ell_k$ med $k \leq n-2$, er $\ell_0 + \cdots + \ell_k < V$, og $\{\ell_0, \dots, \ell_k\}$ er således et simpleks i $\mathcal{L}$. Det simplicielle kompleks $\mathcal{L}$ indeholder altså alle samtlige mulige simplekser $\{\ell_0, \dots, \ell_k\}$ med $k \leq n-2$. Dermed er $(n-2)$-skelettet i $\mathcal{L}$ det samme som $(n-2)$-skelettet i det fulde simpleks Δ med samtlige 1-dimensionale underrum ℓ som hjørner. Simplekset Δ er kontraktibelt og altså speciel $(n-3)$-sammenhængende; $(n-2)$-skelettet i Δ er derfor også $(n-3)$-sammenhængende. Idet $(n-2)$-skelettet i $\mathcal{L}$ er $(n-3)$-sammenhængende, følger at $\mathcal{L} \simeq |T(V)|$ er $(n-3)$-sammenhængende.

Pomængden $T(V)$ er oplagt $(n-2)$-dimensional, så vi ser at $T(V)$ er $(n-2)$-sfærisk.

Hvis $U', U \in T(V)$ med $U' < U$, svarer underrum i (U', U) til ikke-trivielle, ægte underrum af U/U'. Vi har altså $(U', U) = T(U/U')$. For enhver kæde $\sigma = (U_0 < \cdots < U_k)$ i $T(V)$, gælder dermed

$$\mathrm{Link}(\sigma, T(V)) = T(U_0) * T(U_1/U_0) * \cdots * T(U_k/U_{k-1}) * T(V/U_k).$$

Fra det allerede beviste (samt proposition 3.4) følger nu at $\mathrm{Link}(\sigma, T(V))$ er sfærisk af dimension

$$\begin{aligned}&(\dim U_0 - 2) + \sum_{i=1}^{k}(\dim U_i - \dim U_{i-1} - 2) + (\dim V - \dim U_k - 2) + (k+1)\\ &= \dim V - k - 3 = \dim T(V) - k - 1.\end{aligned}$$

Pomængden $T(V)$ opfylder således definitionen, 3.7, af at være CM af dimension $\dim T(V) = n - 2$. $\square$

Bemærkning 4.2. Lad A være en elementar-abelsk p-gruppe, og lad os betragte pomængden $\mathcal{A}_p(A)$. Undergrupperne i A er netop underrummene i A set som vektorrum over $\mathbb{F}_p$, og $\mathcal{A}_p(A)$ er pomængden af de ikke-trivielle underrum i A. Højden af et underrum $A' \in \mathcal{A}_p(A)$ er $\dim_{\mathbb{F}_p} A' - 1 = r_p(A') - 1$ idet $\mathcal{A}_p(A)$ ikke indeholder det trivielle underrum.

- Pomængden $\mathcal{A}_p(A)$ har dimension $r_p(A) - 1 = h(A)$. Hvis $A = 1$, er $\mathcal{A}_p(A) = \emptyset$ der er sfærisk af dimension -1; og hvis $A > 1$, er $\mathcal{A}_p(A)$ kontraktibel (A er et største element). Dermed er $\mathcal{A}_p(A)$ sfærisk af dimension $r_p(A) - 1 = h(A)$.

- For $A' \in \mathcal{A}_p(A)$, svarer elementerne i $\mathcal{A}_p(A)_{>A'}$ til de ikke trivielle underrum af A/A'. Vi har derfor $\mathcal{A}_p(A)_{>A'} \simeq \mathcal{A}_p(A/A')$. Hvis $A' = A$, er $\mathcal{A}_p(A/A') = \emptyset$ og dermed sfærisk af dimension $-1 = r_p(A) - r_p(A') - 1 = h(A) - h(A') - 1$. Hvis $A' < A$, får vi

  $$\dim \mathcal{A}_p(A/A') = r_p(A/A') - 1 = r_p(A) - r_p(A') - 1 = h(A) - h(A') - 1.$$

  Desuden har $\mathcal{A}_p(A/A')$ et største element A/A' og er derfor kontraktibel. Pomængden $\mathcal{A}_p(A/A')$ er således sfærisk af dimension $h(A) - h(A') - 1$.

- Pomængden $\mathcal{A}_p(A)_{<A'}$ er lig pomængden $T(A')$ af ikke-trivielle, ægte underrum i A'. Fra proposition 4.1 har vi at $\mathcal{A}_p(A)_{<A'}$ derfor er sfærisk af dimension $r_p(A') - 2 = h(A') - 1$.

- Antag at $A'' < A'$ i $\mathcal{A}_p(A)$. Pomængden (A'', A') svarer da til $T(A'/A'')$. Per proposition 4.1 er (A'', A') således sfærisk af dimension

  $$r_p(A'/A'') - 2 = r_p(A') - r_p(A'') - 2 = h(A') - h(A'') - 2.$$

Pomængden $\mathcal{A}_p(A)$ er altså CM af dimension $h(A) = r_p(A) - 1$.

Proposition 4.3. *Lad G være en gruppe med endelig p-rang. Pomængden $\mathcal{A}_p(G)$ er da CM (af dimension $r_p(G) - 1$) hvis og kun hvis $\mathcal{A}_p(G)_{>B}$ er sfærisk af dimension $r_p(G) - r_p(B) - 1$ for enhver elementar-abelsk p-undergruppe B i G (inklusive $B = 1$).*

Bevis. Antag først at $\mathcal{A}_p(G)$ er CM. I så fald gælder specielt at $\mathcal{A}_p(G)_{>1} = \mathcal{A}_p(G)$ er sfærisk af dimension $r_p(G) - 1$. For $B \in \mathcal{A}_p(G)$ får vi fra proposition 3.10 at $\mathcal{A}_p(G)_{>B}$ er sfærisk af dimension $(r_p(G) - 1) - (r_p(B) - 1) - 1 = r_p(G) - r_p(B) - 1$ idet B har højde $r_p(B) - 1$ i $\mathcal{A}_p(G)$.

Antag nu omvendt at $\mathcal{A}_p(G)_{>B}$ er sfærisk af dimension $r_p(G) - r_p(B) - 1$ for enhver elementar-abelsk p-undergruppe B i G (inklusive $B = 1$). Vi ser da straks at $\mathcal{A}_p(G) = \mathcal{A}_p(G)_{>1}$ er sfærisk af dimension $r_p(G) - 1$. Derudover har vi for enhver kæde $\sigma = (A_0 < \cdots < A_k)$ i $\mathcal{A}_p(G)$ at

$$\mathrm{Link}(\sigma, \mathcal{A}_p(G)) = T(A_0) * (A_0, A_1) * \cdots * (A_{k-1}, A_k) * \mathcal{A}_p(G)_{>A_k}.$$

Fra 4.1, 4.2, og antagelsen om $\mathcal{A}_p(G)_{>A_k}$, får vi nu at $\mathrm{Link}(\sigma, \mathcal{A}_p(G))$ er sfærisk af dimension

$$\begin{aligned}&(r_p(A_0) - 2) + \sum_{i=1}^{k}(r_p(A_i) - r_p(A_{i-1}) - 2) + (r_p(G) - r_p(A_k) - 1) + (k+1)\\ =&r_p(G) - k - 2 = (r_p(G) - 1) - k - 1.\end{aligned}$$

Dermed har vi at $\mathcal{A}_p(G)$ er CM af dimension $r_p(G) - 1$. $\square$

Proposition 4.4. *Hvis $\mathcal{A}_p(G_1)$ og $\mathcal{A}_p(G_2)$ er CM, så er $\mathcal{A}_p(G_1 \times G_2)$ også CM.*

Bevis. Lad $G = G_1 \times G_2$; vi ved da (eksempelvis fra korollar 3.5) at $r_p(G) = r_p(G_1) + r_p(G_2)$. Lad desuden $\pi_i\colon G \to G_i$, hvor $i = 1, 2$, være projektionerne.

Ifølge proposition 4.3 er det nok hvis vi kan vise at $\mathcal{A}_p(G)_{>B}$ er $(r_p(G) - r_p(B) - 1)$-sfærisk for enhver elementar-abelsk p-undergruppe $B \leq G$.

Jævnfør beviset for korollar 3.5 er alle maksimale $A \in \mathcal{A}_p(G)$ på formen $A_1 \times A_2$ med $A_i \in \mathcal{A}_p(G_i)$ maksimal. Idet $\mathcal{A}_p(G_i)$ er antaget CM og har dimension $r_p(G_i) - 1$, vil enhver maksimal $A_i \in \mathcal{A}_p(G_i)$ have rang $r_p(G_i)$, for i så fald vil $\mathcal{A}_p(G_i)_{>A_i} = \emptyset$ nemlig være sfærisk af dimension $-1 = r_p(G) - r_p(A_i) - 1$.

Det følger nu at $\mathcal{A}_p(G)_{>B}$ har dimension $r_p(G_1) + r_p(G_2) - r_p(B) - 1 = r_p(G) - r_p(B) - 1$. Vi skal altså blot vise at $\mathcal{A}_p(G)_{>B}$ er $(r_p(G) - r_p(B) - 2)$-sammenhængende.

Sæt $B_i = \pi_i(B)$ og $T_i = \mathcal{A}_p(G_i)_{>B_i}$. Bemærk at $CT_i = \mathcal{A}_p(G_i)_{\geq B_i}$ hvis $B_i > 1$ og $CT_i = \mathcal{A}_p(G_i) \cup \{1\}$ hvis $B_i = 1$. Sæt desuden

$$T = \{A_1 \times A_2 \in \mathcal{A}_p(G)_{>B} \mid A_i \leq G_i\} = \{A_1 \times A_2 \in \mathcal{A}_p(G)_{>B} \mid A_i \in CT_i\}.$$

Som i beviset for proposition 2.6 har vi homotopiækvivalenser $i\colon T \hookrightarrow \mathcal{A}_p(G)_{>B}$, og $r = \pi_1 \times \pi_2\colon \mathcal{A}_p(G)_{>B} \to T$ med $ri = id_T$ og $ir(A) \geq A$. Det er således nok at vise at $T \simeq \mathcal{A}_p(G)_{>B}$ er $(r_p(G) - r_p(B) - 2)$-sammenhængende.

Hvis $B < B_1 \times B_2$, er $B_1 \times B_2 \in T$; og så er $T = CT_1 \times CT_2$ kontraktibel med $B_1 \times B_2$ som mindste element. Hvis i stedet vi har $B = B_1 \times B_2$, er $B_1 \times B_2 \notin T$; og i så fald er $T = CT_1 \times CT_2 \setminus \{0, 0\} \simeq T_1 * T_2$ jævnfør proposition 1.20. Pomængden $T_i = \mathcal{A}_p(G_i)_{>B_i}$ er ifølge proposition 4.3 sfærisk af dimension $r_p(G_i) - r_p(B_i) - 1$. Takket være proposition 3.4 er $T_1 * T_2$ dermed sfærisk af dimension

$$r_p(G_1) + r_p(G_2) - (r_p(B_1) + r_p(B_2)) - 1 = r_p(G) - r_p(B) - 1.$$

Specielt er $T \simeq T_1 * T_2$ således $(r_p(G) - r_p(B) - 2)$-sammenhængende. $\square$

4.1 To hurtige eksempler på grupper hvor $\mathcal{A}_p(G)$ er CM

Proposition 4.5. *Hvis G er en abelsk gruppe, så er $\mathcal{A}_p(G)$ CM for alle p.*

Bevis. Lad $A \subseteq G$ være mængden af elementer i G af orden 1 eller p. Da G er abelsk, er A en undergruppe i G. Enhver elementar-abelsk p-undergruppe i G er oplagt indeholdt i A, så der gælder $\mathcal{A}_p(G) = \mathcal{A}_p(A)$. Da alle elementer i A har orden 1 eller p, er A endda en elementar-abelsk p-gruppe, og fra bemærkning 4.2 har vi så at $\mathcal{A}_p(A)$ er CM af dimension $r_p(A) - 1 = r_p(G) - 1$. □

Proposition 4.6. *$\mathcal{A}_p(S_n)$ er CM for alle $n < 3p$, bortset fra $n = p \geq 3$.*

Bevis. Resultatet følger umiddelbart fra resultaterne i afsnit 2.2 samt proposition 3.8. For $n = p \geq 3$ går det galt idet $\mathcal{A}_p(S_n)$ i så fald er 1-dimensional men usammenhængende, og dermed ikke sfærisk. □

5 Endelige opløselige grupper

I løbet af beviset for nedenstående sætning benyttes et antal resultater om unikt p-delelige moduler. Beviser for disse resultater står opført i appendix C.

Sætning 5.1. *Lad G være en endelig gruppe med en kæde af normale undergrupper $N = N_0 \geq N_1 \geq \cdots \geq N_s = 1$. Antag at G/N er en elementar-abelsk p-gruppe af rang r, og at N_i/N_{i+1} er en unikt p-delelig abelsk gruppe for $0 \leq i < s$.*

I så fald gælder:

(i) $\mathcal{A}_p(G)$ er CM af dimension $r-1$.

(ii) Hvis G ikke har nogle centrale elementer af orden p, så er

$$\widetilde{H}_{r-1}(\mathcal{A}_p(G)) \neq 0.$$

Bevis. At N_i/N_{i+1} er unikt p-delelig, er ækvivalent med at N_i/N_{i+1} har orden primisk med p. Heraf følger så at N har orden primisk med p – specielt indeholder N ingen elementer af orden p.

Fordi $|G| = |N| \cdot |G/N| = |N| \cdot p^r$, vil en Sylow-$p$-undergruppe i G have orden p^r. Lad H være en Sylow-p-undergruppe i G. Da $N \lhd G$, og da vi per ordensbetragtninger har $NH = G$ og $H \cap N = \{1\}$, ser vi at $G = NH$ er et semidirekte produkt $N \rtimes H$. Bemærk desuden at $H = (N \rtimes H)/N = G/N$ er en elementar-abelsk p-gruppe af rang r.

Lad $\rho\colon H \to \mathrm{Aut}(N)$ være givet ved $\rho_h(n) = hnh^{-1}$ for $h \in H$ og $n \in N$ – dvs. multiplikationen i $G = N \rtimes H$ er $nh \cdot n'h' = n\rho_h(n') \cdot hh'$.

For et element $nh \in Z(G)$, gælder $nh = nh \cdot hh^{-1} = h(nh)h^{-1} = hn$. Hvis $nh \in Z(G)$ har orden p gælder dermed $n^p = n^p h^p = (nh)^p = 1$, hvoraf vi kan slutte $n = 1$. Hvis vi indfører ${}_pZ(G)$ som undergruppen af elementer i $Z(G)$ med orden 1 eller p, ser vi således at

$$\begin{aligned} {}_pZ(G) &= Z(G) \cap H \\ &= \{h \in H \mid h \text{ virker trivielt på } N\} \\ &= \ker \rho. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Specielt er hypotesen i (ii) ækvivalent med at $\rho\colon H \to \mathrm{Aut}(N)$ er injektiv.

Vi beviser sætningen ved induktion over s, og vi lægger ud med induktionsskridtet. Antag derfor $s > 1$ og at sætningen gælder for lavere værdier af s.

Sæt $G' = G/N_{s-1}$, og lad $\pi\colon G \to G/N_{s-1}$ være kvotienthomomorfien. Vi har $A \xrightarrow{\cong} \pi A$ for enhver elementar-abelsk p-gruppe i G, idet ikke-trivielle $a \in A$ har orden p, så $a \notin N_{s-1}$. Homomorfien π inducerer hermed en strengt voksende afbildning $f\colon \mathcal{A}_p(G) \to \mathcal{A}_p(G')$ på hvilken vi anvender korollar 3.20 med $n = r-1$.

Kvotienten $G' = G/N_{s-1}$ opfylder betingelserne i sætning 5.1 med kæden $N_0/N_{s-1} \geq \cdots \geq N_{s-1}/N_{s-1} = 1$, så per induktion er $\mathcal{A}_p(G')$ CM af dimension $r-1$. For $B \in \mathcal{A}_p(G')$ har vi

$$f/B = \{A \in \mathcal{A}_p(G) \mid \pi A \leq B\} = \{A \in \mathcal{A}_p(G) \mid A \leq \pi^{-1}B\} = \mathcal{A}_p(\pi^{-1}B).$$

Vi har $\pi^{-1}B/N_{s-1} = B$ der er elementar-abelsk; så da vi har antaget at sætningen gælder for $s = 1$, er $f/B = \mathcal{A}_p(\pi^{-1}B)$ CM af dimension $r_p(B) - 1$ hvilken er højden af B i $\mathcal{A}_p(G')$. Fra korollar 3.20 følger dermed at $\mathcal{A}_p(G)$ er CM af dimension $r - 1$, så (i) er vist.

For at vise (ii) antager vi at ${}_pZ(G) = 1$. Vi sætter desuden $B = {}_pZ(G')$ og $t = r_p(B)$. Hvis $B = 1$, giver sætningen at $\widetilde{H}_{r-1}(\mathcal{A}_p(G')) \neq 0$ per induktion. Benytter vi nu sætning 3.16 (samt bemærkning 3.19) på afbildningen f, får vi at $\widetilde{H}_{r-1}(\mathcal{A}_p(G)) \neq 0$ idet filtrationskvotienten $F_{-1}/F_0 \simeq \widetilde{H}_{r-1}(\mathcal{A}_p(G'))$ er ikke-triviel.

Antag i det følgende at $B > 1$, så $B \in \mathcal{A}_p(G')$. Planen er nu at vise

(a) ${}_pZ(\pi^{-1}B) = 1$,

(b) $\widetilde{H}_{r-t-1}(\mathcal{A}_p(G')_{>B}) \neq 0$.

I så fald kan vi på grund af (a) benytte (ii) til at slutte $\widetilde{H}_{t-1}(f/B) \neq 0$. Sætning 3.16 (samt 3.19) anvendt på f giver så at $\widetilde{H}_{r-1}(\mathcal{A}_p(G)) \neq 0$ idet vi får en filtrationskvotient F_{t-1}/F_t med den direkte summand $\widetilde{H}_{r-t-1}(\mathcal{A}_p(G')_{>B}) \otimes \widetilde{H}_{t-1}(f/B)$ der er en ikke-triviel fri abelsk gruppe (jf. bemærkning 3.18). Dermed er (ii) vist hvis vi kan vise (a) og (b).

Sæt $A = {}_pZ(\pi^{-1}B)$. Fra konjugering har vi en homomorfi $\psi\colon A \to \operatorname{Aut}(G)$. Idet $A \subseteq Z(\pi^{-1}B)$ og $N_{s-1} \subseteq \pi^{-1}B$, virker A trivielt på N_{s-1} ved konjugering. Samtidig er $\pi A \subseteq B \subseteq Z(G')$, så virkningen af A på $G' = G/N_{s-1}$ ved konjugering, er også triviel. Lad $T \subseteq \operatorname{Aut}(G)$ være undergruppen af automorfier der inducerer identiteten på N_{s-1} og G'; homomorfien ψ afbilder dermed $\psi\colon A \to T$. Proposition C.3 siger at T er en unikt p-delelig abelsk gruppe. For alle $a \in A$ gælder så

$$\psi(a)^p = \psi(a^p) = \psi(1) = 1,$$

hvorfra vi får $\psi(a) = 1$ for alle $a \in A$. Homomorfien ψ er altså triviel, så $A \leq Z(G)$. Vi har dermed $A \leq {}_pZ(G) = 1$, hvorved vi kan slutte (a).

Fra starten af beviset har vi at $G' = G/N_{s-1} = (N \rtimes_\rho H)/N_{s-1}$ er det semidirekte produkt $G' = N' \rtimes_{\rho'} H$ hvor $N' = N/N_{s-1}$ og $\rho'\colon H \to \operatorname{Aut} N'$ er induceret af $\rho\colon H \to \operatorname{Aut} N$. Jævnfør (5.1) har vi desuden $B = \ker \rho'$.

Da $B \leq Z(G')$, er $B \lhd G'$. Vi kan derfor se på kvotienten $G'/B = N' \rtimes_{\widetilde{\rho}'} (H/B)$, hvor vi får at $\widetilde{\rho}'\colon H/B \hookrightarrow \operatorname{Aut}(N)$ er injektiv. Gruppen $G'/B = N' \rtimes_{\widetilde{\rho}'} (H/B)$ opfylder betingelserne i sætning 5.1 med kæden $N' = N_0/N_{s-1} \geq \cdots \geq N_{s-1}/N_{s-1} = 1$ af normale undergrupper. Konklusionerne i sætningen gælder dermed for G'/B per induktion. Idet vi har ${}_pZ(G'/B) = \ker \widetilde{\rho}' = 1$, giver (ii) at

$$\widetilde{H}_{r_p(H/B)-1}(\mathcal{A}_p(G'/B)) \neq 0.$$

Der gælder nu $\mathcal{A}_p(G'/B) \simeq \mathcal{S}_p(G'/B) = \mathcal{S}_p(G')_{>B} \simeq \mathcal{A}_p(G')_{>B}$, så vi får

$$\widetilde{H}_{r-t-1}(\mathcal{A}_p(G')_{>B}) \neq 0.$$

Vi har således vist (b), og dermed er induktionsskridtet færdiggjort.

Til induktionsstarten skal vi klare tilfældene $s = 0, 1$. For $s = 0$ er $G = H$ der er elementar-abelsk. Bemærkning 4.2 giver da straks at $\mathcal{A}_p(H)$ er CM af dimension $r - 1$. Hvis der desuden gælder $1 = {}_pZ(H)$, er $H = {}_pZ(H) = 1$ af rang 0, og der gælder $\widetilde{H}_{-1}(\mathcal{A}_p(1)) = \widetilde{H}_{-1}(\emptyset) = \mathbb{Z} \neq 0$. Så sætningen er sand for $s = 0$.

I tilfældet $s = 1$ er $G = N \rtimes_\rho H$ hvor H er en elementar-abelsk p-gruppe, og N er en unikt p-delelig abelsk gruppe. Via virkningen $\rho\colon H \to \mathrm{Aut}(N)$ af H på N, bliver N til en modul over grupperingen $\mathbb{Z}H$. Ved at benytte opspaltningen i proposition C.6, kan vi finde en kæde $N = N_0 \geq \cdots \geq N_s = 1$ af $\mathbb{Z}H$-undermoduler med unikt p-delelige kvotienter der opfylder: Enten virker H trivielt på N_i/N_{i+1}; eller også er $N_i/N_{i+1} > 1$, og der findes en hyperplan $H_0 < H$ så $H/H_0 \simeq C_p$ virker frit på de ikke-trivielle elementer i N_i/N_{i+1}.

Da N_i er $\mathbb{Z}H$-undermodul i N, er alle N_i normale undergrupper af $G = N \rtimes_\rho H$. Ved hjælp af det allerede beviste induktionsskridt, kan vi reducere til tilfældene $s = 0, 1$ (hvor vi allerede har vist $s = 0$). For $s = 1$ er der nu to deltilfælde:

1. Gruppen H virker trivielt på N. I så fald er $G = N \times H$, og $\mathcal{A}_p(G) = \mathcal{A}_p(H)$. Pomængden $\mathcal{A}_p(H)$ er CM af dimension $r - 1$ ifølge bemærkning 4.2, så (i) gælder. Hvis G ikke har centrale elementer af orden p, er $H = 1$ og $r = 0$. Dermed er $\widetilde{H}_{-1}(\mathcal{A}_p(H)) = \widetilde{H}_{-1}(\emptyset) = \mathbb{Z} \neq 0$, så (ii) gælder.

2. Der gælder $N > 1$, og der findes en hyperplan $H_0 < H$ så H/H_0 virker frit på $N \setminus \{1\}$. Vælg et vilkårligt 1-dimensionalt underrum $H_1 \leq H$ med $H_1 \not\leq H_0$. Vi har så $H = H_1 \times H_0$, og ydermere $G = N \rtimes H = (N \rtimes H_1) \times H_0$. Siden alle elementar-abelske p-undergrupper i $N \rtimes H_1$ har rang ≤ 1, er $\mathcal{A}_p(N \rtimes H_1)$ af dimension 0 (idet $\mathcal{A}_p(N \rtimes H_1) \neq \emptyset$ fordi H_1 er indeholdt). Alle 0-dimensionale pomængder er CM, så $\mathcal{A}_p(N \rtimes H_1)$ er CM. Bemærkning 4.2 giver at $\mathcal{A}_p(H_0)$ er CM af dimension $r - 2$. Takket være proposition 4.4, kan vi så slutte at $\mathcal{A}_p((N \rtimes H_1) \times H_0)$ er CM af dimension $r - 1$ hvilket viser (i).

   Hvis $G = (N \rtimes H_1) \times H_0$ ikke har noget centralt element af orden p, er $H_0 = 1$. Pomængden $\mathcal{A}_p(N \rtimes H_1)$ er som bemærket 0-dimensional og indeholder $H_1 \simeq C_p$. Undergruppen H_1 er ikke normal, for i så fald ville $G = N \times H_1$ i modstrid med H_1 ikke-central af orden p. Ved konjugering nH_1n^{-1} med elementer $n \in N$ fås derfor mindst én anden undergruppe af orden p. Pomængden $\mathcal{A}_p(N \rtimes H_1)$ indeholder altså mindst to elementer, så $\widetilde{H}_0(\mathcal{A}_p(N \rtimes H_1)) \neq 0$ hvilket viser (ii). □

Korollar 5.2. *Lad G være en endelig gruppe med en kæde af normale undergrupper $N = N_0 \geq N_1 \geq \cdots \geq N_s = 1$ sådan at N_i/N_{i+1} er en unikt p-delelig abelsk gruppe for $0 \leq i < s$. Hvis $\mathcal{A}_p(G/N)$ er CM, så er $\mathcal{A}_p(G)$ CM af den samme dimension.*

Bevis. Lad $\pi\colon G \to G/N$ være kvotienthomomorfien. Som i beviset for sætning 5.1 induceres en strengt voksende afbildning $f\colon \mathcal{A}_p(G) \to \mathcal{A}_p(G/N)$ med $A \overset{\simeq}{\mapsto} \pi A$ og $f/B = \mathcal{A}_p(\pi^{-1}B)$. For $B \in \mathcal{A}_p(G/N)$ har gruppen $\pi^{-1}B$ den normale kæde $N = N_0 \geq N_1 \geq \cdots \geq N_s = 1$ af undergrupper, og $\pi^{-1}B/N = B$ der er en elementar-abelsk p-gruppe. Sætning 5.1 giver dermed at $f/B = \mathcal{A}_p(\pi^{-1}B)$ er CM af dimension $r_p(B) - 1$. Ved anvendelse af korollar 3.20 på $f\colon \mathcal{A}_p(G) \to \mathcal{A}_p(G/H)$ følger så at $\mathcal{A}_p(G)$ er CM af samme dimension som $\mathcal{A}_p(G/H)$. □

Sætning 5.3. *Lad G være en endelig opløselig gruppe uden ikke-trivielle normale p-undergrupper. Hvis H er en maksimal elementar-abelsk p-undergruppe i G, så er $\widetilde{H}_{r-1}(\mathcal{A}_p(G)) \neq 0$ hvor $r = r_p(H)$.*

Bevis. Lad N være den største normale undergruppe i G af orden primisk med p. Ifølge Hall og Higmans lemma 1.2.3 i [HH56] gælder i så fald at $C_G(N) \leq N$. Idet N er opløselig, terminerer følgen af højere kommutator-undergrupper i N:

$$N = N^{(0)} \geq N^{(1)} \geq \cdots \geq N^{(s)} = 1.$$

Dette er en følge af karakteristiske undergrupper i N, og følgen opfylder at $N^{(i)}/N^{(i+1)}$ er en abelsk gruppe af orden primisk med p (og dermed unikt p-delelig jf. C.2). Da undergrupperne $N^{(i)}$ er karakteristiske i $N \lhd G$, er de desuden normale i G.

Vi betragter produktet NH, hvor vi således har kæden $N = N^{(0)} \geq \cdots \geq N^{(s)} = 1$ af normale undergrupper, og $NH/N \simeq H$. Idet $C_G(N) \leq N$, har NH desuden ingen centrale elementer af orden p. Sætning 5.1 giver dermed at $\widetilde{H}_{r-1}(Y) \neq 0$ hvor $Y := \mathcal{A}_p(NH)$.

Sæt $X := \mathcal{A}_p(G)$, og lad $Z \subseteq X$ være den nedadtil afsluttede delmængde der består af maksimale $A \in \mathcal{A}_p(G)$ hvor $A \nleq NH$ samt alle elementer af $\mathcal{A}_p(G)$ der er indeholdt i et af disse maksimale A'er. Vi har således $X = Y \cup Z$.

Vi viser nu at $Y \cap Z$ har dimension $< r - 1$, dvs. at ethvert $A \in Y \cap Z$ har rang $< r$. Lad $A \in Y \cap Z$ være vilkårligt. Da H er en Sylow-p-undergruppe i NH, og da $A \leq NH$, findes et $x \in NH$ så $xAx^{-1} \leq H$. Desuden findes et maksimalt $A_0 \in Z$ med $A \leq A_0 \nleq NH$, og idet $A \leq NH$ følger at $A < A_0$. Hvis der nu gjaldt $xAx^{-1} = H$, ville vi have $H < xA_0x^{-1}$ i modstrid med maksimaliteten af H. Der gælder derfor $xAx^{-1} < H$, så A har rang mindre end r.

Da både Y og Z er afsluttede nedadtil, gælder $|X| = |Y \cup Z| = |Y| \cup |Z|$; og desuden er $|Y| \cap |Z| = |Y \cap Z|$. Vi har derfor en Mayer-Vietoris-følge for reduceret homologi:

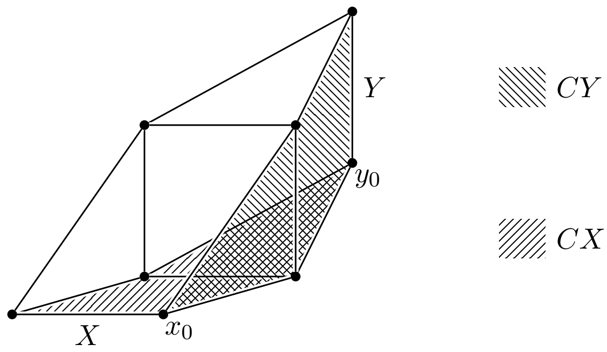
$$\cdots \to \widetilde{H}_{r-1}(Y \cap Z) \to \widetilde{H}_{r-1}(Y) \oplus \widetilde{H}_{r-1}(Z) \to \widetilde{H}_{r-1}(X) \to \cdots$$

Idet $\widetilde{H}_{r-1}(Y \cap Z) = 0$ og $\widetilde{H}_{r-1}(Y) \neq 0$, ser vi at $\widetilde{H}_{r-1}(X) \neq 0$. □

Korollar 5.4 (Quillens formodning for endelige opløselige grupper)**.** *Lad G være en endelig opløselig gruppe uden ikke-trivielle normale p-undergrupper.*

Da er $\widetilde{H}_{r-1}(\mathcal{A}_p(G)) \neq 0$ hvor $r = r_p(G)$.

Bevis. Lad $H \leq G$ være en elementar-abelsk p-undergruppe i G af størst mulig orden. Per definition af $r_p(G)$ har vi da $r_p(H) = r_p(G) = r$, så sætning 5.3 giver $\widetilde{H}_{r-1}(\mathcal{A}_p(G)) \neq 0$. □



Figur A.1: En illustration af $X * Y$. Kollapses det skraverede, fås $\Sigma(X \wedge Y)$.

Appendices

A Join, smashprodukt og suspension

Proposition A.1. *For ikke-tomme CW-komplekser X og Y gælder*

$$X * Y \simeq \Sigma(X \wedge Y).$$

Bevis. Lad x_0 og y_0 være basispunkter hhv. X og Y.

Joinet $X * Y$ er defineret som kvotienten

$$X * Y := X \times Y \times I \Big/ \begin{matrix} x \times Y \times 0, \\ X \times y \times 1. \end{matrix}$$

hvor $x \in X$ og $y \in Y$.

Linjestykket $x_0 \times y_0 \times I$ mellem basispunkterne $x_0 \in X \subset X * Y$ og $y_0 \in Y \subset X * Y$, er et kontraktibelt delkompleks i $X * Y$; så $X * Y$ er homotopiækvivalent med det reducerede join $X *_R Y$ hvor vi har kollapset $x_0 \times y_0 \times I$:

$$X *_R Y := X * Y / x_0 \times y_0 \times I = X \times Y \times I \Big/ \begin{matrix} x \times Y \times 0, \quad X \times y \times 1, \\ x_0 \times y_0 \times I. \end{matrix}$$

Delkomplekset $X \times y_0 \times I$ i $X *_R Y$ er en kopi af den reducerede kegle $CX/(x_0 \times I)$. Tilsvarende har vi en kopi af den reducerede kegle $CY/(y_0 \times I)$ liggende som $x_0 \times Y \times I \subset X *_R Y$. Situationen er illustreret i figur A.1. De reducerede kegler er begge kontraktible og har kun basispunktet $x_0 \times y_0 \times I$ i $X *_R Y$ til fælles. Vi ændrer derfor ikke på homotopitypen ved at kollapse begge de reducerede kegler:

$$
\begin{aligned}
Z :&= X *_R Y \Big/ \begin{matrix} X \times y_0 \times I, \\ x_0 \times Y \times I \end{matrix} \\
&= X \times Y \times I \Big/ \begin{matrix} x \times Y \times 0, & X \times y_0 \times I, \\ X \times y \times 1, & x_0 \times Y \times I \end{matrix} && \text{(A.1)} \\
&= X \times Y \times I \Big/ \begin{matrix} X \times Y \times 0, & X \times y_0 \times I, \\ X \times Y \times 1, & x_0 \times Y \times I \end{matrix} && \text{(A.2)} \\
&= X \times Y \times I \Big/ \begin{matrix} X \times Y \times 0, & (X \times y_0 \cup x_0 \times Y) \times I, \\ X \times Y \times 1 & \end{matrix} \\
&= (X \wedge Y) \times I \Big/ \begin{matrix} (X \wedge Y) \times 0, & (X \times y_0 \cup x_0 \times Y) \times I, \\ (X \wedge Y) \times 1 & \end{matrix} \\
&= \Sigma(X \wedge Y).
\end{aligned}
$$

Identifikationerne i (A.2) følger af identifikationerne i (A.1) fordi der i (A.1) gælder

$$(x, y, 0) \sim (x, y_0, 0) \sim (x', y_0, 0) \sim (x', y', 0)$$

for alle $x, x' \in X$ og $y, y' \in Y$, og tilsvarende gælder: $(x, y, 1) \sim (x', y', 1)$.

Vi har altså fundet en følge af homotopiækvivalenser: $X * Y \simeq X *_R Y \simeq Z = \Sigma(X \wedge Y)$. □

Proposition A.2. *Smash-produkt distribuerer over wedge-sum:*

$$A \wedge (X \vee Y) \cong (A \wedge X) \vee (A \wedge Y)$$

for alle ikke-tomme topologiske rum A, X, Y.

Bevis. Lad a_0, x_0, y_0 være basispunkter for hhv. A, X, Y.

Påstanden ses direkte ud fra definitionerne af smash og wedge:

$$
\begin{aligned}
&A \wedge (X \vee Y) \\
=&A \times (X \vee Y) \Big/ \begin{matrix} a_0 \times (X \vee Y), \\ A \times (x_0 \times y_0) \end{matrix} \\
=&A \times (X \times y_0 \cup x_0 \times Y) \Big/ \begin{matrix} a_0 \times (X \times y_0 \cup x_0 \times Y), \\ A \times (x_0 \times y_0) \end{matrix} \\
=&A \times X \times y_0 \cup A \times x_0 \times Y \Big/ \begin{matrix} a_0 \times X \times y_0, & a_0 \times x_0 \times Y, \\ A \times x_0 \times y_0 & \end{matrix} \\
=&\left(A \times X \times y_0 \Big/ \begin{matrix} a_0 \times X \times y_0, \\ A \times x_0 \times y_0 \end{matrix} \right) \cup \left(A \times x_0 \times Y \Big/ \begin{matrix} a_0 \times x_0 \times Y, \\ A \times x_0 \times y_0 \end{matrix} \right) \\
\cong&\left(A \times X \Big/ \begin{matrix} a_0 \times X, \\ A \times x_0 \end{matrix} \right) \vee \left(A \times Y \Big/ \begin{matrix} a_0 \times Y, \\ A \times y_0 \end{matrix} \right) \\
=&(A \wedge X) \vee (A \wedge Y).
\end{aligned}
$$

□

Proposition A.3. *For et ikke-tomt topologisk rum X gælder*

$$S^n \wedge X \simeq \Sigma^n X$$

for alle $n \geq 0$.

Bevis. Lad x_0 være basispunkt for X, og lad $\{0,1\}$ være basispunktet for $S^1 = I/(0 \sim 1)$.
Hvis $n = 0$ er $S^0 \wedge X = X = \Sigma^0 X$. Hvis $n = 1$ får vi:

$$\begin{aligned} X \wedge S^1 &= X \times S^1 / (x_0 \times S^1) \cup (X \times \{0,1\}) \\ &= X \times I / (x_0 \times I) \cup (X \times 0 \cup X \times 1) \\ &= X \times I / (x_0 \times I) \cup (X \times 0) \cup (X \times 1) \\ &= \Sigma X. \end{aligned}$$

Antag nu at $n \geq 2$, og at der per induktion gælder $S^{n-1} \wedge X \simeq \Sigma^{n-1} X$. Ved hjælp at tilfældet $n = 1$, kan vi så skrive

$$S^n \wedge X \simeq \Sigma S^{n-1} \wedge X = S^1 \wedge S^{n-1} \wedge X \simeq S^1 \wedge \Sigma^{n-1} X = \Sigma^n X. \qquad \square$$

B Bousfield-Kan-spektralfølgen

Lemma B.1. *For enhver afbildning $f\colon X \to Y$ af pomængder gælder at*

$$\operatorname*{hocolim}_{y \in Y} N(f/y) \simeq N(Y \textstyle\int (f/y)) \simeq N(X),$$

hvor $Y \int (f/y)$ er Grothendieck-konstruktionen for funktoren $y \mapsto f/y$, $Y \to Cat$.

Bevis. Den første ækvivalens $\operatorname{hocolim}_{y \in Y} N(f/y) \simeq N(Y \int (f/y))$ får vi direkte fra Thomasons sætning, [Tho79, Theorem 1.2].

Grothendieck-konstruktionen $Y \int (f/y)$ har objekter (y,x) hvor $y \in Y$ og $x \in f/y$. Morfierne i $Y \int (f/y)$ fra (y,x) til (y',x') er par af morfier (α,β) hvor $\alpha\colon y \to y'$ i Y og $\beta\colon \alpha(x) \to x'$ i f/y'. Da X og Y er pomængder, ser vi at der er en unik morfi $(y,x) \to (y',x')$ netop hvis $y \leq y'$ i Y og $x \leq x'$ i f/y'. Kategorien $Y \int (f/y)$ er altså en pomængde (en delpomængde af $Y \times X$).

Lad nu $\pi\colon Y \int (f/y) \to X$ være afbildningen $\pi(y,x) := x$, og lad $i\colon X \to Y \int (f/y)$ være givet ved $i(x) := (f(x), x)$ der er et element i $Y \int (f/y)$ idet $x \in f/f(x)$. Begge afbildninger er oplagt ordningsbevarende, og vi ser umiddelbart at $\pi i = id_X$. For alle $(y,x) \in Y \int (f/y)$ gælder

$$i(\pi(y,x)) = i(x) = (f(x), x) \leq (y,x)$$

hvor $f(x) \leq y$ gælder idet $(y,x) \in Y \int (f/y)$. Vi har således $i\pi \leq id_{Y \int (f/y)}$ og dermed $N(i)N(\pi) \simeq N(id_{Y \int (f/y)})$. Afbildningerne i og π giver altså en homotopiækvivalens $N(Y \int (f/y)) \simeq N(X)$ som ønsket. $\square$

Proposition B.2. *Lad $f\colon X \to Y$ være en afbildning af pomængder. Bousfield-Kan-spektralfølgen for homologi af* hocolim*, giver da en førstekvadrants-, homologi-spektralfølge der konvergerer med*

$$E^2_{p,q} = H_p(Y, y \mapsto H_q(f/y)) \Rightarrow H_{p+q}(X).$$

Bevis. Bousfield-Kan-spektralfølgen for $\operatorname{hocolim}_{y\in Y} N(f/y)$ har E^2-siden

$$E^2_{p,q} = \operatorname{colim}_p H_q(N(f/y)) = H_p(C_*),$$

hvor C_* er kædekomplekset med

$$C_n := \bigoplus_{\substack{\sigma\in N(Y)_n\\ \sigma=(y_0<\cdots<y_n)}} H_q(N(f/y_0)) = \bigoplus_{\substack{\sigma\in N(Y)_n\\ \sigma=(y_0<\cdots<y_n)}} H_q(f/y_0),$$

og differentiale $d := \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i$ hvor d_i kommer fra side-afbildningen d_i i $N(Y)$.

Sammenholder vi dette kædekompleks med definition 3.13, ser vi at C_* er kædekomplekset $C_*(Y, y \mapsto H_q(f/y))$ til beregning af $H_*(Y, y \mapsto H_q(f/y))$. Bousfield-Kan-spektralfølgen har altså E^2-side med

$$E^2_{p,q} = H_p(Y, y \mapsto H_q(f/y)).$$

Bousfield-Kan-spektralfølgen konvergerer med $E^2_{p,q} \Rightarrow H_{p+q}(\operatorname{hocolim} N(f/y))$. Fra lemma B.1 får vi at $\operatorname{hocolim} N(f/y) \simeq N(X)$, og dermed

$$H_{p+q}(\operatorname{hocolim} N(f/y)) = H_{p+q}(N(X)) = H_{p+q}(X). \qquad \square$$

C Unikt p-delelige moduler

Definition C.1. En abelsk gruppe/$\mathbb{Z}$-modul, A, kaldes *p-delelig* hvis endomorfien $a \mapsto pa$ er surjektiv, dvs. hvis $px = a$ har en løsning i A for alle $a \in A$.

Gruppen A kaldes ydermere *unikt p-delelig* hvis $a \mapsto pa$ er en isomorfi, så løsningen til $px = a$ er entydigt bestemt.

En abelsk gruppe A er unikt p-delelig hvis og kun hvis A er en modul over $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ – hvor $\frac{1}{p}a$ netop er den entydige løsning til $px = a$.

Bemærkning C.2. Hvis en abelsk gruppe A er endelig, er $a \mapsto pa$ bijektiv hvis og kun hvis kernen er triviel, dvs. såfremt A ikke har noget element af orden p. Vi har dermed at en endelig abelsk gruppe A er unikt p-delelig hvis og kun hvis $|A|$ er primisk med p.

Proposition C.3. *Lad $N \lhd G$ være endelige, og antag at N er en unikt p-delelig abelsk gruppe. Lad $T \subseteq \operatorname{Aut}(G)$ være undergruppen af automorfier der inducerer identiteten på N og G/N. Gruppen T er da en unikt p-delelig abelsk gruppe.*

Bevis. Først bemærker vi at idet G er endelig, er $\mathrm{Aut}(G)$ og dermed T også endelige.

Lad $\varphi \in T$. For ethvert $g \in G$ gælder så $[\varphi(g)]_N = [g]_N$, så der findes et $n_{\varphi,g} \in N$ med $\varphi(g) = n_{\varphi,g}g$. Da $\varphi(n_{\varphi,g}) = n_{\varphi,g}$ (idet $n_{\varphi,g} \in N$), fås ved simpel induktion at $\varphi^k(g) = n_{\varphi,g}^k g$.

Antag nu at $\varphi^p = 1$. Vi har da for alle $g \in G$ at

$$g = \varphi^p(g) = n_{\varphi,g}^p g.$$

Heraf følger at $n_{\varphi,g}^p = 1$; og da N er unikt p-delelig, sluttes $n_{\varphi,g} = 1$ for alle $g \in G$. Derfor må φ være identiteten, så T indeholder ingen elementer af orden p.

For at vise at T er unikt p-delelig, skal vi således blot vise at T er abelsk (jævnfør bemærkning C.2). Dette følger dog straks hvis vi husker at N er antaget abelsk: For alle $\varphi, \psi \in T$ og $g \in G$ gælder nemlig

$$\varphi\psi(g) = \varphi(n_{\psi,g}g) = \varphi(n_{\psi,g})\varphi(g) = n_{\psi,g}n_{\varphi,g}g = n_{\varphi,g}n_{\psi,g}g = \cdots = \psi\varphi(g). \qquad \square$$

Definition C.4. Lad A være en elementar-abelsk p-gruppe. Antag at A virker på en unikt p-delelig $\mathbb{Z}$-modul M, dvs. M er modul over grupperingen $\mathbb{Z}A$ – endda modul over $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]A$.

Fikspunkterne for A-virkningen udgør en undermodul i M betegnet

$$M^A = \{m \in M \mid am = m \text{ for alle } a \in A\},$$

og A virker oplagt trivielt på M^A.

Hvis $B < A$ er en hyperplan i A, dvs. $A/B \simeq C_p$, så defineres undermodulen $M_{(B)}$ som undermodulen af M frembragt af elementerne $m - am = (1-a)m$ for $a \in A$ og $m \in M^B$. Per konstruktion virker B trivielt på $M_{(B)}$; vi får derfor en virkning af A/B på $M_{(B)}$ induceret fra A-virkningen.

Lad x være et element i $M_{(B)}$, så kan x skrives som $x = \sum_{i=1}^n r_i \cdot (m_i - a_i m_i)$ med $r_i \in \mathbb{Z}$, $a_i \in A$ og $m_i \in M^B$. Hvis x er fikspunkt for hele A-virkningen, gælder

$$\begin{aligned}
|A|\,x &= \sum_{a\in A} ax = \sum_{i=1}^n \sum_{a\in A} a \cdot r_i(m_i - a_i m_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{a\in A} r_i a m_i - \sum_{i=1}^n \sum_{a\in A} r_i (a a_i) m_i \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{a\in A} r_i a m_i - \sum_{i=1}^n \sum_{a'\in A} r_i a' m_i \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Idet $|A|$ er en p-potens, og idet M er antaget unikt p-delelig, får vi så $x = 0$. Dermed er $M_{(B)} \cap M^A = 0$. Kvotienten $A/B \simeq C_p$ virker derfor frit på $M_{(B)} \setminus \{0\}$.

Lemma C.5. *Lad A være en elementar-abelsk p-gruppe. Antallet af hyperplaner i A er lig med $(|A|-1)/(p-1)$.*

Bevis. Lad $P(A)$ være mængden af hyperplaner i A, og lad $L(A)$ være mængden af 1-dimensionale underrum i A (som vektorrum over $\mathbb{F}_p$). Ethvert 1-dimensionalt $\ell \in L(A)$ indeholder og er udspændt af netop $p-1$ ikke-trivielle elementer. Mængden $L(A)$ giver altså en partition af $A \setminus \{1\}$ i mængder af størrelse $p-1$, så $\#L(A) = (|A|-1)/(p-1)$.

Vi viser nu ved induktion over rangen $r = r_p(A)$ af A, at $\#P(A) = \#L(A) = (|A|-1)/(p-1)$. Påstanden er oplagt sand for $r = 0$ hvor $P(A) = L(A) = \emptyset$, og for $r = 1$ hvor $P(A) = \{\{1\}\}$ og $L(A) = \{A\}$. Antag derfor at $r > 1$ og at påstanden gælder for lavere r. Bemærk desuden at $\#L(A) \neq 0$ når $r > 0$.

Lad os tælle antallet, n, af par $(\ell, B) \in L(A) \times P(A)$ som opfylder $\ell \leq B$. For et fast ℓ er antallet af hyperplaner B med $\ell \leq B$, lig med antallet af hyperplaner i A/ℓ. Vi har derfor per symmetri i ℓ at $n = \#L(A) \cdot \#P(A/\ell)$ hvor A/ℓ har rang $r-1$. Omvendt gælder for en fast hyperplan B at underrummene $\ell \in L(A)$ med $\ell \leq B$, netop er elementerne i $L(B)$. Vi har således også (per symmetri i B) at $n = \#P(A) \cdot \#L(B)$ hvor B har rang $r-1$. Samlet set har vi altså per induktion (idet A/ℓ og B begge har rang $r-1$)

$$\#P(A) = \frac{n}{\#L(B)} = \frac{\#P(A/\ell)}{\#L(B)} \cdot \#L(A) = \#L(A) = \frac{|A|-1}{p-1} \qquad \square$$

Proposition C.6. *Lad A være en elementar-abelsk p-gruppe, og antag at A virker på en unikt p-delelig $\mathbb{Z}$-modul M. Vi har da en opsplitning af M som direkte sum*

$$M = M^A \oplus \bigoplus_{B \in P(A)} M_{(B)}$$

hvor $P(A)$ er mængden af hyperplaner i A.

Bevis. Lad $\varphi_A \colon M \to M^A$ være givet ved

$$\varphi_A(m) := \frac{1}{|A|}\left(\sum_{a \in A} a\right) m$$

der er en $\mathbb{Z}A$ homomorfi idet A er abelsk, og divisionen med $|A|$ er veldefineret idet $|A|$ er en p-potens.

Hvis $m \in M^A$, gælder oplagt $\varphi_A(m) = \frac{1}{|A|}|A|\, m = m$, så $\varphi_A|_{M^A} = id_{M^A}$. Ser vi i stedet for på en frembringer $m - a_0 m \in M_{(B)}$ får vi

$$\varphi_A(m - a_0 m) = \frac{1}{|A|}\sum_{a \in A} am - \frac{1}{|A|}\sum_{a \in A} a_0 a m = \frac{1}{|A|}\sum_{a \in A} am - \frac{1}{|A|}\sum_{a' \in A} a' m = 0,$$

så $\varphi_A|_{M_{(B)}} = 0$.

For en hyperplan $B \in P(A)$ defineres tilsvarende $\varphi_B \colon M \to M^B$ ved

$$\varphi_B(m) := \frac{1}{|B|}\left(\sum_{b \in B} b\right) m.$$

For $m \in M^B \geq M^A$ har vi som før $\varphi_B(m) = m$. For en frembringer $m - am \in M_{(B)}$ gælder derfor også

$$\varphi_B(m - am) = \varphi_B(m) - a\varphi_B(m) = m - am$$

fordi $m \in M^B$. Dermed er $\varphi_B|_{M_{(B)}} = id_{M_{(B)}}$.

Lad nu $B, B' \in P(A)$ være to forskellige hyperplaner. Da $B + B' = A$, får vi af Noethers første isomorfisætning at $B/(B \cap B') \simeq B + B'/B' = A/B'$ der virker på $M_{(B')}$. Lad $b_1, \ldots, b_p$ være repræsentanter for $B/(B \cap B')$, og dermed også repræsentanter for A/B'. For ethvert $x \in M_{(B')}$ gælder så

$$\begin{aligned}
\varphi_B(x) &= \frac{1}{|B|}\left(\sum_{b \in B} b\right) x = \frac{1}{|B|}\sum_{i=1}^{p}\sum_{b \in B \cap B'} b_i b x \\
&= \frac{|B \cap B'|}{|B|}\sum_{i=1}^{p} b_i x = \frac{|B'|}{|A|}\sum_{i=1}^{p} b_i x \\
&= \frac{1}{|A|}\sum_{i=1}^{p}\sum_{b \in B'} b_i b x = \frac{1}{|A|}\left(\sum_{a \in A} a\right) x \\
&= \varphi_A(x) = 0.
\end{aligned}$$

Dermed er $\varphi_B|_{M_{(B')}} = 0$ for $B' \neq B$.

Lad $a_1, \ldots, a_p$ være repræsentanter for A/B hvor $B \in P(A)$. Vi definerer da en homomorfi $\psi_B \colon M \to M_{(B)}$ ved

$$\begin{aligned}
\psi_B(m) :=& \varphi_B(m) - \varphi_A(m) \\
=& \varphi_B(m) - \frac{1}{|A|}\left(\sum_{a \in A} a\right) m \\
=& \varphi_B(m) - \frac{1}{p\,|B|}\sum_{i=1}^{p}\sum_{b \in B} a_i b m \\
=& \varphi_B(m) - \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} a_i \varphi_B(m) \\
=& \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}(\varphi_B(m) - a_i\varphi_B(m)).
\end{aligned}$$

Billedet ligger i $M_{(B)}$ idet $\varphi_B(m) \in M^B$.

Homomorfien $\psi_B = \varphi_B - \varphi_A$ har følgende egenskaber (hvor $B' \neq B$):

$$\begin{aligned}
m \in M_{(B)} &\Rightarrow \psi_B(m) = m - 0 = m, \\
m \in M^A &\Rightarrow \psi_B(m) = m - m = 0, \\
m \in M_{(B')} &\Rightarrow \psi_B(m) = 0 - 0 = 0.
\end{aligned}$$

Lad nu $i_A\colon M^A \hookrightarrow M$ og $i_B\colon M_{(B)} \hookrightarrow M$ være inklusionerne. Vi har en homomorfi $\pi\colon M \to M^A \oplus \bigoplus_{B\in P(A)} M_{(B)}$ givet ved $\pi = \varphi_A \oplus \bigoplus_{B\in P(A)} \psi_B$, og vi har en homomorfi $i\colon M^A \oplus \bigoplus_{B\in P(A)} M_{(B)} \to M$ givet ved $i = i_A + \sum_{B\in P(A)} i_B$. De viste egenskaber for φ_A og ψ_B giver med det samme at $\pi i = id$.

Hvis vi kan vise at $i\pi = id$, følger så $M = M^A \oplus \bigoplus_{B\in P(A)} M_{(B)}$. For ethvert $m \in M$ gælder

$$\begin{aligned}
i\pi(m) &= \varphi_A(m) + \sum_{B\in P(A)} \psi_B(m) = \varphi_A(m) + \sum_{B\in P(A)} (\varphi_B(m) - \varphi_A(m)) \\
&= \left(\frac{1}{|A|}\sum_{a\in A} a + \sum_{B\in P(A)} \left(\frac{1}{|B|}\sum_{b\in B} b\right) - \sum_{B\in P(A)} \left(\frac{1}{|A|}\sum_{a\in A} a\right)\right) m \\
&= \frac{1}{|A|}\left(\sum_{a\in A} a + \sum_{B\in P(A)} p\sum_{b\in B} b - \#P(A)\sum_{a\in A} a\right) m.
\end{aligned}$$

Hvis vi kan vise at udtrykket i parentesen reducerer til $|A|$, er vi færdige.

Antallet af hyperplaner som $1 \in A$ indgår i, er $\#P(A)$; og antallet af hyperplaner som et $a \in A\setminus\{1\}$ indgår i, er $\#P(A/C_p)$. Lad $r = r_p(A)$, så $|A| = p^r$. Antallene $\#P(A)$ og $\#P(A/C_p)$ beregner vi så ud fra lemma C.5.

Deler vi parentesen ovenfor op med 1 og $a \in A\setminus\{1\}$ hver for sig, får vi så

$$\begin{aligned}
&\sum_{a\in A} a + \sum_{B\in P(A)} p\sum_{b\in B} b - \#P(A)\sum_{a\in A} a \\
=&(1 + \#P(A)\cdot p - \#P(A)) + (1 + \#P(A/C_p)\cdot p - \#P(A))\sum_{a\neq 1} a \\
=&\left(1 + \frac{p^r-1}{p-1}\cdot p - \frac{p^r-1}{p-1}\right) + \left(1 + \frac{p^{r-1}-1}{p-1}\cdot p - \frac{p^r-1}{p-1}\right)\sum_{a\neq 1} a \\
=&p^r + 0\sum_{a\neq 1} a = p^r = |A|
\end{aligned}$$

□

Litteratur

[Gra03] D. R. GRAYSON: "Algebraic K-theory". Apr. 2003. URL: `http://www.math.uiuc.edu/~dan/Courses/2003/Spring/416/GraysonKtheory.pdf`. Course notes for a course in algebraic K-theory.

[GS06] J. GRODAL AND S. D. SMITH: "Propagating sharp group homology decompositions". *Adv. in Math.*, vol. 200(2), (2006), pp. 525–538. ISSN 0001-8708.

[GZ67] P. GABRIEL AND M. ZISMAN: *Calculus of fractions and homotopy theory*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 35 (Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1967).

[HH56] P. HALL AND G. HIGMAN: "On the p-length of p-soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem". *Proc. London Math. Soc. (3)*, vol. 6, (1956), pp. 1–42. ISSN 0024-6115.

[Qui73] D. QUILLEN: "Higher algebraic K-theory. I". In "Algebraic K-theory, I: Higher K-theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972)", pp. 85–147. Lecture Notes in Math., Vol. 341 (Springer, Berlin, 1973).

[Qui78] D. QUILLEN: "Homotopy properties of the poset of nontrivial p-subgroups of a group". *Adv. in Math.*, vol. 28(2), (1978), pp. 101–128. ISSN 0001-8708.

[Tho79] R. W. THOMASON: "Homotopy colimits in the category of small categories". *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, vol. 85(1), (1979), pp. 91–109. ISSN 0305-0041.