FAGPROJEKT
KATEGORIER, DERES NERVE OG DERES (KO)HOMOLOGI.

TOKE NØRGÅRD-SØRENSEN
VEJLEDER: JESPER GRODAL

Resumé. I dette projekt vil jeg introducere homologi og kohomologi af en kategori. Dette er en generalisering af bl.a. (ko)homologien af en gruppe, da enhver gruppe kan opfattes som en kategori. Homologi og kohomologi af en kategori introduceres via de kategoriteoretiske konstruktioner limes og kolimes, og det vises hvordan kohomologien kan opfattes som en gradueret algebra. Desuden gives eksplicitte formler for at udregne homologien og kohomologien.

Herefter skiftes synsvinkel fra det rent algebraiske til det topologiske. Jeg introducerer et topologisk rum tilknyttet en kategori kaldet nerven af kategorien og beskriver sammenhængen mellem (singulær) (ko)homologi af nerven og (ko)homologi af den underliggende kategori. Nerven er en funktor, og jeg viser, hvordan en naturlig transformation $F \Rightarrow G$ giver en homotopi fra nerven af F til nerven af G.

Sidst i opgaven udregner jeg homologien og kohomologien for nogle konkrete tilfælde.

Indhold

Date: 21. november 2008.

I dette projekt betegner R altid en kommutativ ring med 1-element. Og $\mathcal{C}$ betegner altid en lille kategori.

En stor del af projektet er baseret på [4].

1. $\mathcal{C}$-REPRÆSENTATIONER OG $R\mathcal{C}$-MODULER

Lad $\mathcal{A}$ og $\mathcal{B}$ være kategorier. Så defineres en ny kategori $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ som følger: Objekterne er alle funktorer $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ og $\operatorname{Hom}_{\mathcal{B}^{\mathcal{A}}}(F, G)$ er de naturlige transformationer fra F til G. Identitetsafbildningen i $\operatorname{Hom}_{\mathcal{B}^{\mathcal{A}}}(F, F)$ er identitetstransformationen, dvs. transformationen som er identiteten på alle komponenter. Kompositionen af naturlige transformationer er blot komponentvis komposition. Det ses let, at aksiomerne for en kategori er opfyldt for $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$.

En funktor $\mathcal{C} \to R$-mod kaldes en *repræsentation af $\mathcal{C}$ over R*. Her betegner R-mod kategorien af R-moduler.

Lad $\operatorname{Ob}(\mathcal{C})$ betegne mængden af objekter i $\mathcal{C}$ og $\operatorname{Mor}(\mathcal{C})$ mængden af morfier i $\mathcal{C}$. Lad $\operatorname{dom}(\alpha)$ og $\operatorname{cod}(\alpha)$ betegne hhv. domænet og kodomænet af morfien α. Så defineres *kategorialgebraen $R\mathcal{C}$* som følger: Som R-modul er $R\mathcal{C}$ den frie modul med basis $\operatorname{Mor}(\mathcal{C})$: altså $R\mathcal{C} = R\operatorname{Mor}(\mathcal{C})$. For $\alpha, \beta \in \operatorname{Mor}(\mathcal{C})$ defineres produktet

$$\alpha\beta = \begin{cases} \alpha \circ \beta & \text{hvis } \operatorname{dom}(\alpha) = \operatorname{cod}(\beta) \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Produktet på hele $R\mathcal{C}$ fås ved bilineært at udvide dette produkt. Det ses let, at $R\mathcal{C}$ herved bliver en associativ algebra. Hvis $\operatorname{Ob}(\mathcal{C})$ er endelig er $1_{R\mathcal{C}} = \sum_{x \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})} 1_x$ 1-element for $R\mathcal{C}$, da $\left(\sum_{x \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})} 1_x\right)\alpha = 1_{\operatorname{cod}(\alpha)} \circ \alpha = \alpha$ og $\alpha\left(\sum_{x \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})} 1_x\right) = \alpha \circ 1_{\operatorname{dom}(\alpha)} = \alpha$ for alle $\alpha \in \operatorname{Mor}(\mathcal{C})$.

I dette projekt vil jeg kræve, at en (venstre) $R\mathcal{C}$-modul M opfylder, at $M = \sum_{x \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})} 1_x M$. Og $R\mathcal{C}$-mod betegner kategorien af sådanne moduler. Bemærk at kravet til M, i tilfældet hvor $\operatorname{Ob}(\mathcal{C})$ er endelig, er ækvivalent med, at $1_{R\mathcal{C}} m = m$ for alle $m \in M$.

Jeg vil nu definere en funktor $r\colon (R\text{-mod})^{\mathcal{C}} \to R\mathcal{C}\text{-mod}$ og en funktor $s\colon R\mathcal{C}\text{-mod} \to (R\text{-mod})^{\mathcal{C}}$. Som R-modul sættes $r(F) = \bigoplus_{x \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})} F(x)$. For en morfi $\alpha : x \to y$ i $\mathcal{C}$ og et element $(m_z)_{z \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})} \in r(F)$ sættes $\alpha(m_z) = (n_z)$, hvor $n_y = F(\alpha)(m_x)$ og $n_z = 0$ for $z \neq y$. Herved bliver $r(F)$ en $R\mathcal{C}$-modul. For en naturlig transformation $\phi\colon F \Rightarrow G$ defineres $r(\phi)$ ved $r(\phi)((m_x)) = (\phi_x(m_x))$. Så er $r(\phi)$ en R-homomorfi, da alle ϕ_x er det, og naturligheden af ϕ giver, at $r(\phi)$ også er en $R\mathcal{C}$-homomorfi. Det ses let, at r er en funktor.

Lad M være en $R\mathcal{C}$-modul. Definer $s(M)$ ved $s(M)(x) = 1_x M$ og $s(M)(\alpha) = (m \mapsto \alpha m)$. Dette giver mening, da hvis $\alpha\colon x \to y$ og $1_x m \in 1_x M$, så $\alpha(1_x m) = (1_y \circ \alpha \circ 1_x)m = 1_y(\alpha m) \in 1_y M$. Det er klart, at $s(M)(\alpha)$ er en R-homomorfi. Lad $f\colon M \to N$ være en $R\mathcal{C}$-homomorfi. Definer $s(f)\colon s(M) \Rightarrow s(N)$ ved at komponenten $s(f)_x\colon 1_x M \to 1_x N$ er restriktionen af f. Det giver mening, da $f(1_x m) = 1_x f(m) \in 1_x N$.

Naturligheden af $s(f)$ følger af, at $\alpha f(m) = f(\alpha m)$ for alle $\alpha \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ og $m \in M$.

Sætning 1.1. *Funktorerne r og s defineret ovenfor giver en ækvivalens af kategorier. Dvs. $1_{(R\text{-}mod)^{\mathcal{C}}} \simeq sr$ og $rs \simeq 1_{R\mathcal{C}\text{-}mod}$.*

Bevis. Definer den naturlige transformation $\eta\colon 1 \Rightarrow sr$ ved, for en funktor $F\colon \mathcal{C} \to R$-mod og et objekt x i $\mathcal{C}$, at lade $(\eta_F)_x$ være inklusionen af $F(x)$ i $r(F) = \bigoplus_{x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} F(x)$. Der gælder netop, at $1_x \bigoplus_{x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} F(x) = F(x)$ set som undermodul af den direkte sum, så $(\eta_F)_x\colon F(x) \to 1_x r(F)$ er en isomorfi. Naturligheden af η_F tjekkes let. Vi har at η er naturlig, hvis givet en naturlig transformation $\phi\colon F \Rightarrow G$, at $\eta_G \circ \phi = rs(\phi) \circ \eta_F$. Og denne lighed gælder netop hvis $(\eta_G)_x \circ \phi_x = (rs(\phi))_x \circ (\eta_F)_x$ for alle objekter x i $\mathcal{C}$, hvilket let ses gælder.

Definer den naturlige transformation $\epsilon\colon rs \Rightarrow 1$ ved for $\epsilon_M\colon \bigoplus 1_x M \to M$ at sætte $\epsilon((m_x)) = \sum m_x$. Som R-modul er $M = \bigoplus_{x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} 1_x M$ (direkte indre sum), da hvis $\sum 1_x m = 0$, så $1_y m = 1_y \sum 1_x m = 0$ for alle $y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Dette viser, at ϵ_M er en R-isomorfi. Det ses let, at ϵ_M også er en $R\mathcal{C}$-isomorfi. Naturligheden af ϵ tjekkes let. $\square$

Bemærk, at funktoren r ved restriktion giver en bijektion $\widetilde{r}\colon \mathrm{Hom}_{(R\text{-mod})^{\mathcal{C}}}(F,G) \to \mathrm{Hom}_{R\mathcal{C}}(r(F), r(G))$. Dette gælder, da (jævnfør nedenstående kommutative diagram) $\sigma^{-1} sr(\phi) = \phi$ for alle $\phi\colon F \Rightarrow G$ og

$$r\sigma^{-1}s(\psi) = \tau rsr\sigma^{-1}s(\psi) = \tau rs(\psi) = \psi$$

for alle $\psi\colon r(F) \to r(G)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{(R\text{-mod})^{\mathcal{C}}}(F,G) \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\sigma=\eta_G\circ_\circ\eta_F^{-1}"', "\wr"] & \mathrm{Hom}_{R\mathcal{C}}(r(F),r(G)) \arrow[dl, "s"'] \\
\mathrm{Hom}_{(R\text{-mod})^{\mathcal{C}}}(sr(F),sr(G)) \arrow[r, "r"] & \mathrm{Hom}_{R\mathcal{C}}(rsr(F),rsr(G)) \arrow[u, "\wr", "\tau=\epsilon_{r(G)}\circ_\circ\epsilon_{r(F)}^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Da $\mathrm{Hom}_{R\mathcal{C}}(r(F), r(G))$ er en R-modul bliver også $\mathrm{Hom}_{(R\text{-mod})^{\mathcal{C}}}(F,G)$ en R-modul via $\widetilde{r}$. R-modulstrukturen er givet ved $(\phi + \psi)_x = (\phi_x + \psi_x)$ og $(a\phi)_x = (a\phi_x)$ for alle $\phi, \psi\colon F \Rightarrow G$ og $a \in R$. Herved bliver $\mathrm{Hom}_{(R\text{-mod})^{\mathcal{C}}}(\_,\_)\colon ((R\text{-mod})^{\mathcal{C}})^{\mathrm{op}} \times (R\text{-mod})^{\mathcal{C}} \to R$-mod en funktor, der er naturligt isomorf med $\mathrm{Hom}_{R\mathcal{C}}(r(\_), r(\_))$

Bemærkning 1.2. En gruppe G kan opfattes som en kategori med præcis 1 objekt x og en endomorfi $g\colon x \to x$ for hvert $g \in G$. I dette tilfælde er en funktor $F\colon G \to R$-mod en sædvanlig grupperepræsentation $G \to F(x)$ og RG-algebraen er den sædvanlige gruppealgebra. Sætning 1.1 er en generalisering af det velkendte resultat, at repræsentationerne af G over R svarer til modulerne over RG.

2. Limes og kolimes

Et stort antal konstruktioner i matematik kan karakteriseres ved en såkaldt universel konstruktion. Mange af disse konstruktioner kan defineres som *limes* eller som *kolimes* af en funktor. I dette projekt bruges limes og kolimes til at indføre hhv. kohomologi og homologi af en kategori.

2.1. **Limes.** Lad $\mathcal{A}$ og $\mathcal{B}$ være kategorier. Så definerer vi en funktor $\Delta\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ ved at $\Delta(B)$ er den konstante funktor der afbilder alle objekter i B og alle morfier i identitetsmorfien 1_B. For en morfi f i $\mathcal{A}$ er $\Delta(f)$ den naturlige transformation, hvis komponenter alle er f.

Lad $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ være en funktor. Hvis man forestiller sig $\mathcal{A}$ tegnet som et diagram, kan man tænke på F som et diagram i kategorien $\mathcal{B}$ med form som $\mathcal{A}$. En *kegle over* F er et par (B, η), hvor B er et objekt i $\mathcal{B}$ og $\eta\colon \Delta(B) \to F$ er en naturlig transformation. Dette kan visualiseres som objektet B svævende over "diagrammet" F med en pil fra B til hvert objekt i diagrammet. Antag keglen (B, η) opfylder, at der for enhver anden kegle (C, ζ) findes en entydigt bestemt morfi $f\colon C \to B$, så $\zeta = \eta \circ \Delta(f)$. Så kalder vi B for *limes af* F og skriver $\lim F = B$. Vi har, at $\lim F$ er entydigt bestemt *op til entydigt bestemt isomorfi*: Hvis også (C, ζ) er limes af F, så findes entydigt bestemte morfier $f\colon C \to B$ og $g\colon B \to C$, der kommuterer med keglerne. Dermed er $\zeta = \zeta \circ \Delta(gf)$, så $gf = 1_C$ på grund af entydigheden af denne morfi. Tilsvarende er $fg = 1_B$.

Givet en naturlig transformation $\theta\colon E \to F$ i $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ og kegler $(\lim E, \zeta)$ og $(\lim F, \eta)$ fås en kegle over F som $(\lim E, \theta \circ \zeta)$, så vi kan definere $\lim \theta\colon \lim E \to \lim F$ som den entydigt bestemt morfi, der opfylder $\theta \circ \zeta = \eta \circ \Delta(\lim \theta)$. Hvis $\lim F$ eksisterer for alle funktorer F bliver $\lim$ herved en funktor $\mathcal{B}^{\mathcal{A}} \to \mathcal{B}$: At $\lim(1_F) = 1_{\lim F}$ og $\lim(\theta_1\theta_2) = \lim(\theta_1)\lim(\theta_2)$ følger af entydigheden af disse morfier.

Hvis $\mathcal{A}$ er den tomme kategori – kategorien med 0 objekter – kaldes $\lim F$ for et *terminalt objekt* for $\mathcal{B}$. Så i dette tilfælde er $\lim F$ et objekt, til hvilket der eksisterer en entydig bestemt morfi fra ethvert andet objekt i $\mathcal{B}$.

Sætning 2.1. *Antag* $\lim\colon \mathcal{B}^{\mathcal{A}} \to \mathcal{B}$ *eksisterer. Så er* $\lim$ *højre-adjungeret til* Δ. *Dvs. der eksisterer en naturlig isomorfi mellem de to funktorer* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}^{\mathcal{A}}}(\Delta(\_), \_), \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\_, \lim(\_))\colon (\mathcal{B})^{op} \times (\mathcal{B}^{\mathcal{A}}) \to \mathit{Set}$.

Bevis. Lad $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ og lad $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ med tilhørende kegle $(\lim F, \eta)$. Definer $\Phi\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}^{\mathcal{A}}}(\Delta(B), F) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(B, \lim F)$ som følger: Lad $\zeta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}^{\mathcal{A}}}(\Delta(B), F)$. Så er (B, ζ) en kegle over F. Lad $\Phi(\zeta)$ være den entydigt bestemte morfi, så $\zeta = \eta \circ \Delta(\Phi(\zeta))$. I den anden retning definer $\Psi\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(B, \lim F) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}^{\mathcal{A}}}(\Delta(B), F)$ som $\Psi(f) = \eta \circ \Delta(f)$. Så fås

$$\Psi\Phi(\zeta) = \eta \circ \Delta(\Phi(\zeta)) = \zeta$$

og

$$\Phi\Psi(f) = \Phi(\eta \circ \Delta(f)) = f$$

hvor sidste lighed følger af entydigheden af f. Så Ψ er en bijektion. Lad $g\colon B \to C$ være en morfi, lad E være en funktor med tilhørende kegle

$(\lim E, \zeta)$ og lad $\theta\colon E \Rightarrow F$. Så følger naturligheden af Ψ af følgende diagram:

$$\begin{tikzcd}
\zeta\Delta(f) \arrow[ddd, mapsto] & & & f \arrow[lll, mapsto] \arrow[ddd, mapsto] \\
& \mathrm{Hom}(\Delta(C), E) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(\Delta(g),\theta)"'] & \mathrm{Hom}(C, \lim E) \arrow[l, "\Psi"'] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(g,\lim\theta)"] & \\
& \mathrm{Hom}(\Delta(B), F) & \mathrm{Hom}(B, \lim F) \arrow[l, "\Psi"'] & \\
\theta\zeta\Delta(f)\Delta(g) = \eta\Delta(\lim(\theta)fg) & & & \lim(\theta)fg \arrow[lll, mapsto]
\end{tikzcd}$$

□

Bemærkning 2.2. Når vi beskæftiger os med repræsentationer af kategorier kan man vælge kodomænet for $\mathrm{Hom}_{(R\text{-mod})^{\mathcal{C}}}(\Delta(\_), \_)$ og $\mathrm{Hom}_R(\_, \lim(\_))$ som kategorien R-mod og ikke bare kategorien Set. Det ses let, at den naturlige isomorfi i beviset for sætning 2.1 også giver en naturlig isomorfi i dette tilfælde – altså at bevisets Ψ er en R-isomorfi.

Fremover bruges notationen $\underline{R} = \Delta(R) \in \mathrm{Ob}((R\text{-mod})^{\mathcal{C}})$

Sætning 2.3. *Funktoren* $\lim\colon (R\text{-}mod)^{\mathcal{C}} \to R\text{-}mod$ *er naturligt isomorf med* $\mathrm{Hom}_{(R\text{-}mod)^{\mathcal{C}}}(\underline{R}, \_)$.

Bevis. Vi har

$$\mathrm{Hom}_{(R\text{-mod})^{\mathcal{C}}}(\underline{R}, \_) \simeq \mathrm{Hom}_R(R, \lim(\_)) \simeq \lim$$

Første isomorfi følger af sætning 2.1 plus efterfølgende bemærkning. Anden isomorfi følger af, at vi har en naturlig isomorfi $\Phi\colon 1_{R\text{-mod}} \simeq \mathrm{Hom}_R(R, \_)$, givet ved $\Phi_U(u) = (a \mapsto au)$ for enhver R-modul U.

Jeg har snydt lidt i dette bevis, da jeg ikke har vist, at lim eksisterer. Det kan dog vises eksplicit, for en funktor $F\colon \mathcal{C} \to R$-mod, at keglen $(\mathrm{Hom}_{(R\text{-mod})^{\mathcal{C}}}(\underline{R}, F), \eta)$, hvor $\eta_x(\phi) = \phi_x(1)$, opfylder betingelserne til at være limes af F. Så $\lim F$ eksisterer. □

Fra ovenstående sætning ses det, at $\lim\colon (R\text{-mod})^{\mathcal{C}} \to R$-mod er venstre-eksakt, så lim har højre-deriverede funktorer $\lim^i$ for alle $i \geq 0$ (se [5] for en definition). Per isomorfien $(R\text{-mod})^{\mathcal{C}} \simeq R\mathcal{C}$-mod følger det, at $(R\text{-mod})^{\mathcal{C}}$ har nok injektive moduler (jf. [1] sætning III.4.3), så $\lim^i$ eksisterer. Det ses yderligere, at $\lim^i \simeq \mathrm{Ext}^i_{(R\text{-mod})^{\mathcal{C}}}(\underline{R}, \_)$, (funktoren $\mathrm{Ext}^i_{(R\text{-mod})^{\mathcal{C}}}(\underline{R}, \_)$ er netop defineret som den i-te højre-deriverede funktor af $\mathrm{Hom}_{(R\text{-mod})^{\mathcal{C}}}(\underline{R}, \_)$). Lad M være en repræsentation af $\mathcal{C}$. Så definerer vi *kohomologien af kategorien* $\mathcal{C}$ *med koefficienter i* M *som* $H^*(\mathcal{C}, M) = \mathrm{Ext}^*_{(R\text{-}mod)^{\mathcal{C}}}(\underline{R}, M)$. Vi ser, at $H^*(\mathcal{C}, M)$ er isomorf med $\lim^* M$. Hvis $\underline{R}$ og M ved brug af sætning 1.1 opfattes som $R\mathcal{C}$-moduler, kan $\mathrm{Ext}^*_{(R\text{-mod})^{\mathcal{C}}}(\underline{R}, M)$ identificeres med $\mathrm{Ext}^*_{R\mathcal{C}}(\underline{R}, M)$. Hvis $\mathcal{C}$

er en gruppe ses det, at vores definition af kohomologi stemmer overens med den normale definition af gruppe-kohomologi.

2.2. **Kolimes.** Givet en funktor $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ fås en ny (også kovariant) funktor $F^o\colon \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{B}^{\mathrm{op}}$ som har samme værdi som F på alle objekter og morfier. Så defineres *kolimes af* F som $\operatorname{colim} F = \lim F^o$. Herved bliver også $\operatorname{colim}\colon \mathcal{B}^{\mathcal{A}} \to \mathcal{B}$ en funktor (hvis den eksisterer). En naturlig transformation fra $\Delta\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \to (\mathcal{B}^{\mathrm{op}})^{\mathcal{A}^{\mathrm{op}}}$ til F^o svarer til en naturlig transformation fra F til $\Delta\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}^{\mathcal{A}}$. Dermed kan $\operatorname{colim} F$ beskrives som følger: En *kokegle under* F er et par (B,η), hvor B er et objekt i $\mathcal{B}$ og $\eta\colon F \Rightarrow \Delta(B)$ er en naturlig transformation. Dette kan visualiseres som B hængende under "diagrammet" F med en pil fra hvert objekt i diagrammet til B. Hvis kokeglen (B,η) opfylder, at, der for enhver anden kokegle (C,ζ) findes en entydigt bestemt morfi $f\colon B \to C$, så $\zeta = \Delta(f)\circ\eta$, så er $\operatorname{colim} F = B$.

Hvis $\mathcal{A}$ er den tomme kategori kaldes $\operatorname{colim} F$ for et *initialt objekt* for $\mathcal{B}$.

Som dual til sætning 2.1 gælder der, at colim er venstre-adjungeret til Δ. Men det resultat vil jeg ikke bruge i denne opgave.

Sætning 2.4. *Funktoren* $\operatorname{colim}\colon (R\text{-}mod)^{\mathcal{C}} \to R\text{-}mod$ *er naturligt isomorf med* $\underline{R} \otimes_{R\mathcal{C}} (\_)$. *I* $\underline{R} \otimes_{R\mathcal{C}} (\_)$ *opfattes* $\underline{R}$ *som en højre* $R\mathcal{C}$*-modul (svarende til en kontravariant funktor) og repræsentationen der erstatter* _ *skal opfattes som en venstre* $R\mathcal{C}$*-modul, jævnfør sætning 1.1.*

Bevis. Lad M være en repræsentation af $\mathcal{C}$. Vi har en naturlig transformation $\eta\colon M \to \Delta(\underline{R}\otimes M)$ givet ved $\eta_x(m_x) = 1_x \otimes m_x$. Givet endnu en kokegle (C,ζ) under M defineres $\Phi\colon \underline{R}\otimes M \to T$ ved for $m_x \in M(x)$, at $\Phi(1_x \otimes m_x) = \zeta_x(m_x)$. Φ er veldefineret, da Φ er induceret fra afbildningen $((r_x)_{x\in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}, (m_x)_{x\in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}) \mapsto (\zeta_x(r_x m_x))_{x\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$, som er bilineær på grund af naturligheden af ζ. Vi har $\zeta = \Delta(\Phi)\eta$, og Φ er entydigt bestemt af denne ligning. Så $\underline{R}\otimes M$ er kolimes af M. $\square$

Fra ovenstående sætning ses det, at $\operatorname{colim}\colon (R\text{-mod})^{\mathcal{C}} \to R\text{-mod}$ er højre-eksakt og colim har derfor venstre-deriverede funktorer colim_i for alle $i \geq 0$ (se [5] for definition). Det er velkendt, at $R\mathcal{C}$-mod har nok projektive moduler, så colim_i eksisterer. Det ses yderligere, at $\operatorname{colim}_i \simeq \operatorname{Tor}_i^{R\mathcal{C}}(\underline{R}, \_)$ (funktoren $\operatorname{Tor}_i^{R\mathcal{C}}(\underline{R}, \_)$ er netop defineret som den i-te venstre-deriverede funktor af $\underline{R}\otimes_{R\mathcal{C}}(\_)$). Lad M være en repræsentation af $\mathcal{C}$. Så definerer vi *homologien af kategorien* $\mathcal{C}$ *med koefficienter i* M som $H_*(\mathcal{C}, M) = \operatorname{Tor}_*^{R\mathcal{C}}(\underline{R}, M)$. Det ses, at $H_*(\mathcal{C}, M)$ er isomorf med $\operatorname{colim}_* M$. Hvis $\mathcal{C}$ er en gruppe, ses det, at denne definition af homologi stemmer overens med den normale definition af gruppehomologi.

3. Ext og ekstensioner

Lad A være en algebra over R og lad M og N være moduler over A. En *ekstension af grad* $n \geq 1$ er en eksakt følge

$$0 \to N \to U_{n-1} \to \cdots \to U_0 \to M \to 0$$

hvor $U_0, \ldots, U_{n-1}$ er A-moduler. Denne ekstension er relateret til ekstensionen $0 \to N \to V_{n-1} \to \cdots \to V_0 \to M \to 0$, hvis der eksisterer A-homomorfier $f_i \colon U_i \to V_i$ så følgende diagram kommuterer:

$$\begin{tikzcd}
 & & U_{n-1} \arrow[r] \arrow[dd, "f_{n-1}"] & \cdots \arrow[r] & U_0 \arrow[dd, "f_0"] \arrow[dr] & & \\
0 \arrow[r] & N \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & M \arrow[r] & 0 \\
 & & V_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & V_0 \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Lad E^n betegne mængden af ekstensioner af grad n modulo ækvivalensrelationen frembragt af ovenstående relation.

Jeg vil vise, at $\mathrm{Ext}^n_A(M, N)$ er i bijektion med E^n. Bemærk at jeg har antaget $n \geq 1$, da $\mathrm{Ext}^0_A(M, N)$ ikke nødvendigvis er i bijektion med eksakte følger $0 \to N \to M \to 0$. Som jeg introducerede Ext i foregående afsnit, er $\mathrm{Ext}^*_A(M, N) = H^*(\mathrm{Hom}_A(M, I))$, hvor $N \to I$ er en injektiv resolution af N. Men der gælder, at denne definition er ækvivalent med $\mathrm{Ext}^*_A(M, N) = H^*(\mathrm{Hom}_A(P, N))$, hvor $\cdots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M$ er en projektiv resolution af M (jf. [6]). Lad en sådan resolution være valgt (det er velkendt, at en sådan resolution eksisterer).

Definer $\Phi \colon E^n \to \mathrm{Ext}^n_A(M, N)$ som følger: Lad $\mathcal{E} \in E^n$

$$\mathcal{E} = (0 \to N \xrightarrow{\alpha_n} U_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\alpha_1} U_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \to 0)$$

Da P_0 er projektiv, kan vi vælge $\phi_0 \colon P_0 \to U_0$, så $\alpha_0\phi_0 = d_0$. Antag $\phi_i \colon P_i \to U_i$ er valgt for $i = 0, \ldots, k$, $0 \leq k < n$, sådan at $\alpha_i\phi_i = \phi_{i-1}d_i$, hvor $\phi_{-1} = 1_M$. Så er $\alpha_k\phi_k d_{k+1} = \phi_{k-1}d_k d_{k+1} = 0$, så $\mathrm{Im}(\phi_k d_{k+1}) \subseteq \mathrm{Im}(\alpha_{k+1})$, så da P_{k+1} er projektiv kan vi vælge $\phi_{k+1} \colon P_{k+1} \to U_{k+1}$, så $\alpha_{k+1}\phi_{k+1} = \phi_k d_{k+1}$. Vi får altså følgende kommutative diagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & U_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & U_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P_n \arrow[r] \arrow[u, "\phi_n"] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[u, "\phi_{n-1}"] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[u, "\phi_0"] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd} \tag{3.1}$$

og jeg definerer $\Phi(\mathcal{E}) = [\phi_n]$. Da α_n er injektiv, er $\phi_n d_{n+1} = 0$ hvis og kun hvis $\alpha_n\phi_n d_{n+1} = 0$ og dette er sandt. Så $\phi_n \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_A(d_{n+1}, N))$.

Lad $0 \to N \xrightarrow{\beta_n} V_{n-1} \xrightarrow{\beta_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\beta_1} V_0 \xrightarrow{\beta_0} M \to 0$ være en anden ekstension, der er relateret til $\mathcal{E}$ via en af de frembringende relationer. Dvs. vi har $(f_i \colon U_i \to V_i)_{i=0}^{n-1}$ der kommuterer med α_i'erne og β_i'erne. Lad $\psi_i \colon P_i \to V_i$, $i = 0, \ldots, n$ være valgt som ϕ_i'erne. Så vil jeg finde et $\theta_{n-1}\colon P_{n-1} \to N$, så $\phi_n - \psi_n = \theta_{n-1}d_n$, da det så følger, at Φ er veldefineret. $f\phi$ (hvor $f_n = 1_N$) og ψ er begge kædeafbildninger, der udvider 1_M så der findes en kædehomotopi θ fra $f\phi$ til ψ: Lad nemlig $\theta_k = 0$ for $k < 0$ og lad induktivt θ_k være et løft af $f_k\phi_k - \psi_k - \theta_{k-1}d_k$ langs β_{k+1} (for $k \geq n$ er $\theta_k = 0$). Så er θ_{n-1} den ønskede homomorfi.

Jeg vil nu definere en invers Ψ til Φ. Så lad $[\phi] \in \operatorname{Ext}^n_A(M, N)$, $\phi\colon P_n \to N$. Definer U_{n-1} som push-out'et af d_n og ϕ – dvs. som kolimes af nedenstående diagram med U_{n-1} fjernet:

$$\begin{tikzcd} P_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "\phi"'] & P_{n-1} \arrow[d, dashed, "\phi_{n-1}"] \\ N \arrow[r, dashed, "\alpha_n"] & U_{n-1} \end{tikzcd}$$

Eksplicit definerer jeg $U_{n-1} = (N \oplus P_{n-1})/A\{(\phi(p), -d_n(p)) \mid p \in P_n\}$ og lader $\alpha_n(n) = (n, 0)$ og $\phi_{n-1}(p) = (0, p)$. Så er α_n injektiv: Da $\phi \in \operatorname{Ker}(\operatorname{Hom}(d_{n+1}, N))$ er $\operatorname{Ker} d_n \subseteq \operatorname{Ker} \phi$. Så antag $[(n, 0)] = 0$ i U_{n-1}, dvs. $(n, 0) = (\phi(p), -d_n(p))$ for et $p \in P_n$ (en sum er ikke nødvendig). Så er $-d_n(p) = 0$, så $n = \phi(p) = 0$.

Definer $\alpha_{n-1}\colon U_{n-1} \to P_{n-2}$ (hvor $P_{-1} = M$) ved

$$\alpha_{n-1}(n, p) = d_{n-1}(p)$$

Så er $\alpha_{n-1}(\phi(p), -d_n(p)) = d_{n-1}d_n(p) = 0$, så α_{n-1} er veldefineret. Det er klart, at $\operatorname{Im} \alpha_{n-1} = \operatorname{Im} d_{n-1}$ og at $\operatorname{Im} \alpha_n \subseteq \operatorname{Ker} \alpha_{n-1}$. Og hvis $\alpha_{n-1}(n, p) = 0$, så er $p \in \operatorname{Ker} d_{n-1} = \operatorname{Im} d_n$, lad os sige $p = d_n(p_n)$. Og så $(n, p) = (n - \phi(p_n), 0) \in \operatorname{Im} \alpha_n$. Altså er

$$\mathcal{E} = (0 \to N \to U_{n-1} \to P_{n-2} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0)$$

en ekstension, og jeg definerer $\Psi([\phi]) = \mathcal{E}$.

Lad $[\psi] \in \operatorname{Ext}^n_A(M, N)$ og antag $[\phi] = [\psi]$, $\phi - \psi = \theta d_n$, $\theta\colon P_{n-1} \to N$. Lad

$$\Psi([\psi]) = \mathcal{F} = (0 \to N \xrightarrow{\beta_n} V_{n-1} \xrightarrow{\beta_{n-1}} P_{n-2} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0)$$

hvor $V_{n-1} = (N \oplus P_{n-1})/B$. Definer en A-homomorfi $f_{n-1}\colon U_{n-1} \to V_{n-1}$ ved $f_{n-1}(n, p) = (n + \theta(p), p)$. Så er $f_{n-1}(\phi(p), -d_n(p)) = (\phi(p) - \theta d_n(p), -d_n(p)) = (\psi(p), -d_n(p)) \in B$, så f er veldefineret. Det er klart, at $f_{n-1}\alpha_n = \beta_n$ og $\beta_{n-1}f_{n-1} = \alpha_{n-1}$, så hvis vi sætter $f_i = 1_{P_i}$ for $i = 0, \ldots, n-2$ ser vi, at $\mathcal{E} = \mathcal{F}$ i E^n. Så Ψ er veldefineret.

$\Phi\Psi = 1$: Dette er klart: Hvis $\Psi([\phi]) = \mathcal{E}$ givet ovenfor, kan jeg for $i = 0, \ldots, n-2$ vælge løftene $P_i \to P_i$ som identiteten og derefter vælge løftene $P_{n-1} \to U_{n-1}$ og $P_n \to N$ som hhv. ϕ_{n-1} og ϕ_n.

$\Psi\Phi = 1$: Lad $\mathcal{E} \in E^n$ og antag $\Phi(\mathcal{E})$ er givet som diagrammet (3.1) ovenfor. Lad $\Psi(\Phi(\mathcal{E})) = (0 \to N \xrightarrow{\beta_n} (N \oplus P_{n-1})/B \xrightarrow{\beta_{n-1}} P_{n-2} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0)$. Så kan vi definere en A-homomorfi $f_{n-1}\colon (N \oplus P_{n-1})/B \to U_{n-1}$ ved $f_{n-1}(n, p) = \alpha_n(n) + \phi_{n-1}(p)$ (selv om $\phi_0, \ldots, \phi_{n-1}$ ikke er med i billedet $\Phi(\mathcal{E})$ ved jeg, at de eksisterer, og de kan derfor bruges i definitionen af f_i'erne). Vælger jeg $f_i = \phi_i$ for $i = 0, \ldots, n-2$ ses det let, at f_i'erne kommuterer med α_i'erne og β_i'erne. Så $\Psi(\Phi(\mathcal{E})) = \mathcal{E}$ i E^n.

3.1. Ext **som algebra.** Modulerne $\operatorname{Ext}^n_A(M, N)$ kan samles til en enkelt *gradueret* R-modul

$$\operatorname{Ext}_A(M, N) = \bigoplus_{n \geq 0} \operatorname{Ext}^n_A(M, N)$$

Et element i $\operatorname{Ext}^n_A(M, N) \subseteq \operatorname{Ext}_A(M, N)$ kaldes et element af *grad* n.

Givet ekstensioner

$$0 \to N \to U_{n-1} \to \cdots \to U_0 \xrightarrow{\alpha} M \to 0$$

og

$$0 \to M \xrightarrow{\beta} V_{m-1} \to \cdots \to V_0 \to K \to 0$$

kan man danne en ny ekstension

$$0 \to N \to U_{n-1} \to \cdots \to U_o \xrightarrow{\beta\alpha} V_{n-1} \to \cdots \to V_0 \to K \to 0$$

og det er klart, at ækvivalensklassen af den nye ekstension kun afhænger af ækvivalensklasserne af de to første ekstensioner. Så via bijektionen mellem Ext og ekstensioner får vi et veldefineret produkt $\operatorname{Ext}^n_A(M, N) \times \operatorname{Ext}^m_A(K, M) \to \operatorname{Ext}^{n+m}_A(K, N)$. Jeg har her antaget $m, n \geq 1$, men man kan også definere et produkt hvis m eller n er lig 0: Lad $[\phi] \in \operatorname{Ext}^n_A(M, N)$, $\phi\colon P_n \to M$. Da $\phi d_{n+1} = 0$ inducerer ϕ en homomorfi $\overline{\phi}\colon \operatorname{Im}(d_n) \to M$. Hvis man vælger en projektiv resolution $Q_* \to N$, kan man vælge en kædeafbildning $(\phi_k\colon P_k \to Q_{k-n})_{k \geq n}$ der udvider $\overline{\phi}$ (dvs. hvor $d_0\phi_n = \overline{\phi} d_n$). Tilsvarende kan man vælge en projektiv resolution $S_* \to K$ og givet $[\psi] \in \operatorname{Ext}^m_A(K, M)$, $\psi\colon K \to M$ kan man vælge en kædeafbildning ψ_* af grad $-m$ der udvider $\overline{\psi}$. Så kan produktet af $[\phi]$ og $[\psi]$ defineres som $[d^N_0 \phi_n \psi_{n+m}] \in \operatorname{Ext}^{n+m}(K, N)$ – dvs. som elementet svarende til kompositionen $\phi_* \psi_*$ af kædeafbildningerne. Det kan vises, at dette produkt er veldefineret og for $n, m \geq 1$ er lig produktet defineret ovenfor via ekstensioner. Se [6].

Hvis $K = M = N$ fås et produkt på $\operatorname{Ext}_A(M, M)$ og det kan vises, at dette produkt gør $\operatorname{Ext}_A(M, M)$ til en gradueret R-algebra (her er det muligvis nødvendigt at lægge restriktioner på R og A, se [6]). 1-elementet i $\operatorname{Ext}_A(M, M)$ er $[1_M d_0]$.

4. Den lineariserede repræsentable funktor

I dette afsnit vil jeg indføre en projektiv repræsentation af $\mathcal{C}$. Denne repræsentation skal bruges til at give en eksplicit projektiv resolution af repræsentationen $\underline{R}$.

Lad x være et objekt i $\mathcal{C}$. Så defineres den *lineariserede repræsentable funktor* $F_x\colon \mathcal{C} \to$ *R-mod* som følger: På et objekt y er $F_x(y)$ den frie R-modul med basis $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$. Og for en morfi $\beta\colon y \to z$ er $F_x(\beta)$ givet ved $F_x(\beta)(\alpha) = \beta \circ \alpha$ for alle $\alpha \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$. Det ses let, at F_x

er en funktor. For en morfi $\gamma : w \to x$ definerer vi $F_\gamma \colon F_x \Rightarrow F_w$ ved $(F_\gamma)_y(\beta) = \beta \circ \alpha$. Naturligheden af F_γ følger af følgende diagram:

$$\begin{tikzcd}
\alpha \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddd, mapsto] & & & \alpha \circ \gamma \arrow[ddd, mapsto] \\
& F_x(y) \arrow[r, "(F_\gamma)_y"] \arrow[d, "F_x(\beta)"'] & F_w(y) \arrow[d, "F_w(\beta)"] & \\
& F_x(z) \arrow[r, "(F_\gamma)_z"] & F_w(z) & \\
\beta \circ \alpha \arrow[rrr, mapsto] & & & \beta \circ \alpha \circ \gamma
\end{tikzcd}$$

Herved bliver $F\_ : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to (R\text{-mod})^{\mathcal{C}}$ en funktor. Lad M være en repræsentation af $\mathcal{C}$. Så bliver $\mathrm{Hom}_{(R\text{-mod})^{\mathcal{C}}}(F\_, M)$ en (kovariant) funktor $\mathcal{C} \to R$-mod, dvs. en repræsentation af $\mathcal{C}$.

Sætning 4.1 (Yonedas lemma)**.** *M er ækvivalent med* $\mathrm{Hom}_{(R\text{-}mod)^{\mathcal{C}}}(F\_, M)$.

Bevis. Sæt $H = \mathrm{Hom}_{(R\text{-mod})^{\mathcal{C}}}(F\_, M)$. Definer en naturlig transformation $\sigma \colon M \Rightarrow H$ ved $(\sigma_x(m))_y(\alpha) = M(\alpha)(m)$. Naturligheden af $\sigma_x(m)$ følger af, at M er en funktor. Og σ_x er en R-homomorfi: For alle $m, n \in M(x)$ og $\alpha \colon x \to y$, er

$$\begin{aligned}
\sigma_x(m_1 + m_2)_y(\alpha) &= M(\alpha)(m_1 + m_2) \\
&= M(\alpha)(m_1) + M(\alpha)(m_2) \\
&= \sigma_x(m_1)_y(\alpha) + \sigma_x(m_2)_y(\alpha)
\end{aligned}$$

så $\sigma_x(m_1 + m_2)_y = \sigma_x(m_1)_y + \sigma_x(m_2)_y$ for alle objekter y og dermed $\sigma_x(m_1 + m_2) = \sigma_x(m_1) + \sigma_x(m_2)$. Tilsvarende ses $a\sigma_x(m_1) = \sigma_x(am_1)$ for alle $a \in R$. Naturlighed af σ: Lad $\gamma \colon w \to x$, $m \in M(w)$ og $\alpha \colon x \to y$. Så er

$$(\sigma_x(M(\gamma)(m)))_y(\alpha) = M(\alpha)(M(\gamma)(m))$$

og

$$(H(\gamma)(\sigma_w(m)))_y(\alpha) = M(\alpha \circ \gamma)(m)$$

så $\sigma_x \circ M(\gamma) = H(\gamma) \circ \sigma_w$.

Definer nu $\tau_x \colon H(x) \to M(x)$ ved $\tau_x(\phi) = \phi_x(1_x)$ Jeg vil vise τ_x er invers til σ_x:

$$\tau_x(\sigma_x(m)) = \sigma_x(m)(1_x) = 1_{M(x)}(m) = m$$

og

$$\begin{aligned}
(\sigma_x(\tau_x(\phi)))_y(\alpha) &= (\sigma(\phi_x(1_x)))_y(\alpha) \\
&= M(\alpha)(\phi_x(1_x)) \\
&= \phi_y(F_x(\alpha)(1_x)) \\
&= \phi_y(\alpha)
\end{aligned}$$

Altså er σ en naturlig isomorfi. $\square$

Sætning 4.2. *Lad x være et objekt i $\mathcal{C}$. Så er F_x projektiv.*

Bevis. Lad M og N være repræsentationer af $\mathcal{C}$ og lad naturlige transformationer $\phi\colon F_x \Rightarrow N$ og $\theta\colon M \Rightarrow N$ være givet, så θ_y er surjektiv for alle objekter y. Jeg skal så finde en naturlig transformation $\psi\colon F_x \Rightarrow M$, så $\phi = \theta \circ \psi$.

Vælg et $m \in M(x)$, så $\theta_x(m) = \phi_x(1_x)$. Sæt $\psi = \sigma_x(m)$, hvor σ_x er givet i forrige bevis. Så er

$$\begin{aligned}(\theta \circ \psi)_y(\alpha) &= \theta_y(M(\alpha)(m)) \\ &= N(\alpha)(\theta_x(m)) \\ &= N(\alpha)(\phi_x(1_x)) \\ &= \phi_y(F_x(\alpha)(1_x)) \\ &= \phi_y(\alpha)\end{aligned}$$

så $\theta \circ \psi = \phi$. $\square$

Per sætning 1.1 kan F_x identificeres med en $R\mathcal{C}$-modul og sætning 4.2 giver også, at denne modul er projektiv.

5. Formel for $H_*(\mathcal{C}, M)$ og $H^*(\mathcal{C}, M)$

Lad M være en repræsentation af $\mathcal{C}$. Ligesom $\mathrm{Ext}^n_{R\mathcal{C}}(\underline{R}, M)$ kan udregnes ved brug af en projektiv resolution, kan også $\mathrm{Tor}^{R\mathcal{C}}_*(\underline{R}, M)$ både udregnes ud fra en injektiv resolution af M og – som jeg vil gøre – som $\mathrm{Tor}^{R\mathcal{C}}_*(\underline{R}, M) = H_*(P_* \otimes_{R\mathcal{C}} M)$, hvor $P_* \to \underline{R}$ en en projektiv resolution af $\underline{R}$ som *højre* $R\mathcal{C}$-modul.

Jeg vil give to eksplicitte resolutioner af $\underline{R}$ i $(R\text{-mod})^{\mathcal{C}}$, dvs. resolutioner $\cdots \Rightarrow P_1 \Rightarrow P_0 \Rightarrow \underline{R}$ hvor P_n'erne er funktorer, og randafbildningerne er naturlige transformationer.

Lad $n \geq 0$ og $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Definer $P_n(x)$ som den frie R-modul med basis de lister af morfier $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})^{n+1}$, hvor $\operatorname{cod}\alpha_0 = x$ og $\mathrm{dom}(\alpha_{i-1}) = \mathrm{cod}(\alpha_i)$. For listen $(\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ vil jeg enten bruge notationen $\alpha[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ eller $x \xleftarrow{\alpha} x_0 \xleftarrow{\alpha_1} \cdots \xleftarrow{\alpha_n} x_n$. For en morfi β i $\mathcal{C}$ definer $P_n(\beta)(\alpha[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]) = (\beta\alpha)[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$. Det ses let, at P_n herved bliver en funktor.

Definer R-homomorfien $(d_n)_x\colon P_n(x) \to P_{n-1}(x)$ ved

$$\begin{aligned}(d_n)_x(\alpha[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]) = \alpha\alpha_1[\alpha_2, \ldots, \alpha_n] &+ \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\alpha[\alpha_1, \ldots, \alpha_i\alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n] \\ &+ (-1)^n\alpha[\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}]\end{aligned}$$

Definition kan skrives kortere som

$$(d_n)_x(x \leftarrow x_0 \leftarrow \cdots \leftarrow x_n) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(x \leftarrow x_0 \leftarrow \cdots \leftarrow \widehat{x_i} \leftarrow \cdots \leftarrow x_n)$$

Definer desuden R-homomorfien $\epsilon_x\colon P_0(x) \to R$ ved $\epsilon_x(\alpha[]) = 1$. Det ses let, at $d_n = ((d_n)_x)$ og $\epsilon = (\epsilon_x)$ er naturlige transformationer. Desuden tjekkes det let, at $d_n d_{n+1} = 0$ og $\epsilon d_0 = 0$.

Ved brug af sætning 1.1 kan kædekomplekset $\cdots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} \underline{R} \to 0$ opfattes som et kædekompleks af $R\mathcal{C}$-moduler. Som R-modul er så

$$P_n = \bigoplus_{x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} P_n(x) = \bigoplus_{\alpha[\alpha_1,\ldots,\alpha_n]} R_{\alpha[\alpha_1,\ldots,\alpha_n]}$$

(Her er $R_{\alpha[\alpha_1,\ldots,\alpha_n]} = R$.) For en given kæde $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ (dvs. en kæde $x_0 \xleftarrow{\alpha_1} \ldots \xleftarrow{\alpha_n} x_n$) er undermodulen $\bigoplus_{\alpha \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C}), \mathrm{dom}(\alpha) = x_0} R_{\alpha[\alpha_1,\ldots,\alpha_n]}$ også en $R\mathcal{C}$ undermodul og det ses, at denne undermodul er isomorf med $F_{x_0} = \sum_{y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} F_{x_0}(y)$ ($R\mathcal{C}$-modulen svarende til den lineariserede repræsentable funktor). Som $R\mathcal{C}$-modul er altså

$$P_n = \bigoplus_{[\alpha_1,\ldots,\alpha_n]} F_{\mathrm{cod}(\alpha_1)}$$

og da alle summanderne ifølge sætning 4.2 er projektive er også P_n projektiv.

Definer R-homomorfier $(h_n)_x\colon P_n(x) \to P_{n+1}(x)$ ved for $n \geq 0$ at

$$(h_n)_x(x \leftarrow x_0 \leftarrow \cdots \leftarrow x_n) = (x \xleftarrow{1_x} x \leftarrow x_0 \leftarrow \cdots \leftarrow x_n)$$

og definer $(h_{-1})_x\colon R \to P_0(x)$ ved $h_{-1}(1) = (x \xleftarrow{1_x} x)$. Sæt $h_n = ((h_n)_x)_{x \in \mathrm{Ob}(x)}\colon P_n \to P_{n+1}$. h_n er ikke en $R\mathcal{C}$-homomorfi – kun en R-homomorfi – men det er heller ikke nødvendigt. Det tjekkes let, at $d_{n+1}h_n + h_{n-1}d_n = 1$ for $n \geq 1$ og $d_1 h_0 + h_{-1}\epsilon = 1$ og $\epsilon h_{-1} = 1$. Så h_* er en kontraherende homotopi og det følger, at $P_* \to \underline{R}$ er eksakt. Altså er P_* en projektiv resolution af $\underline{R}$. Jeg vil kalde denne *standard-resolutionen af* $\underline{R}$.

Definer $D_n(x)$ som undermodulen af $P_n(x)$ med basis de degenererede kæder af morfier – dvs. de kæder $\alpha[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ hvor $\alpha_i = 1$ for et $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sæt $\overline{P}_n(x) = P_n(x)/D_n(x)$ og lad $(\overline{d}_n)_x\colon \overline{P}_n \to \overline{P}_{n-1}$ være induceret af $(d_n)_x$. Opfat $\cdots \to \overline{P}_1 \to \overline{P}_0 \to \underline{R} \to 0$ som et kædekompleks af $R\mathcal{C}$-moduler. Så er dette en resolution af $\underline{R}$ – komplekset er eksakt, da h inducerer en kontraherende homotopi på det. Og resolutionen er projektiv, da $\overline{P}_n$ ligesom P_n er en direkte sum af F_x'er. Resolutionen vil jeg kalde den *normaliserede standard-resolution af* $\underline{R}$.

Bemærkning 5.1. Hvis $\mathcal{C}$ er en gruppe er de projektive resolutioner defineret ovenfor resolutioner af R og resolutionerne er faktisk frie, da $F_x \simeq R\mathcal{C}$ (her er x objektet i $\mathcal{C}$). Den første resolution er den såkaldte *bar-resolution* af $\mathcal{C}$ og den anden resolution er den *normaliserede bar-resolution* af $\mathcal{C}$ (jf. [1] I.5).

Lad M være en $R(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$-modul. Så bliver M en højre $R\mathcal{C}$-modul ved at sætte $m\alpha = \alpha m$. Betegnes nemlig kompositionerne i $\mathcal{C}$ og $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ med hhv. $\circ$ og $*$ fås

$$m(\alpha \circ \beta) = (\alpha \circ \beta)m = (\beta * \alpha)m = \beta(\alpha m) = (m\alpha)\beta$$

En projektiv resolution af $\underline{R}$ som højre $R\mathcal{C}$-modul kan altså fås ved at bruge en af definitionerne ovenfor for kategorien $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.

6. Nerven af en kategori

De projektive resolutioner af $\underline{R}$ beskrevet i foregående afsnit er ikke trukket ud af den blå luft, men har en tæt forbindelse til en topologisk konstruktion tilknyttet en kategori – den såkaldte *nerve* af en kategori.

6.1. **Definition af nerven.** Lad

$$\Delta^n = \{(t_0, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} t_i = 1, t_i \geq 0\}$$

være standard simplekset. Lad

$$A_n = A_n^{\mathcal{C}} = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})^n \mid \mathrm{dom}\, \alpha_i = \mathrm{cod}\, \alpha_{i+1}\}$$

for $n \geq 1$ og lad $A_0 = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Giv A_n den diskrete topologi. Lad $n \geq 1$ og $i \in \{0, \ldots, n\}$. Definer $d_{n,i} \colon A_n \to A_{n-1}$ som

$$d_{n,i}(x_0 \leftarrow \cdots \leftarrow x_n) = (x_0 \leftarrow \cdots \leftarrow \widehat{x_i} \leftarrow \cdots \leftarrow x_n)$$

hvor jeg bruger samme notation som i definitionen af randafbildningerne for standard-resolutionen af $\underline{R}$. Definer desuden $\delta^{n,i} \colon \Delta^{n-1} \to \Delta^n$ som

$$\delta^{n,i}(t_0, \ldots, t_{n-1}) = (t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{n-1})$$

Lad nu $n \geq 0$ og $i \in \{0, \ldots, n\}$. Definer $s^{n,i} \colon A_n \to A_{n+1}$ som

$$s^{n,i}(x_0 \leftarrow \cdots \leftarrow x_n) = (x_0 \leftarrow \cdots \leftarrow x_i \xleftarrow{1_{x_i}} x_i \leftarrow \cdots \leftarrow x_n)$$

og definer $\sigma_{n,i} \colon \Delta^{n+1} \to \Delta^n$ som

$$\sigma_{n,i}(t_0, \ldots, t_{n+1}) = (t_0, \ldots, t_i + t_{i+1}, \ldots, t_{n+1})$$

Nu kan *nerven* $|\mathcal{C}|$ *af* $\mathcal{C}$ defineres som

$$|\mathcal{C}| = \left(\coprod_{n \geq 0} A_n \times \Delta^n \right) /\!\sim$$

hvor $\sim$ er ækvivalensrelationen frembragt af relationerne

$$(a, \delta^{n,i}(t)) \sim (d_{n,i}(a), t)$$

for alle $n \geq 1$, $i = 0, \ldots, n$, $a \in A_n$ og $t \in \Delta^{n-1}$ og relationerne

$$(a, \sigma_{n,i}(t)) \sim (s^{n,i}(a), t)$$

for alle $n \geq 0$, $i = 0, \ldots, n$, $a \in A_n$ og $t \in \Delta^{n+1}$.

For alle $n \geq 0$ og $a \in A_n$ har vi en afbildning $\phi_a \colon \Delta^n \to |\mathcal{C}|$ givet ved $\phi_a(t) = (a, t)$ og $\phi_a(\Delta^n)$ betegnes blot "simplekset a". Hvis $a = s^{n-1,i}(b)$ for et b kaldes a for et degenereret simpleks og eller kaldes a ikke-degenereret. ϕ_a restringeret til det indre af Δ^n er en indlejring hvis og kun hvis a ikke er degenereret. Det kan tjekkes, at $|\mathcal{C}|$ er et CW-kompleks med celler alle de ikke-degenererede simplekser, og ϕ_a'erne er de karakteristiske afbildninger for disse celler.

En delmængde $U \subseteq |\mathcal{C}|$ er åben hvis og kun hvis $\{t \in \Delta^n \mid (x,t) \in U\}$ er åben for alle $n \geq 0$ og $x \in A_n$.

Lad $\mathcal{D}$ være endnu en lille kategori og lad $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ være en funktor. Definer en afbildning $|F|\colon |\mathcal{C}| \to |\mathcal{D}|$ ved

$$|F|((\alpha_1,\ldots,\alpha_n),t) = ((F(\alpha_1),\ldots,F(\alpha_n)),t)$$

Dette er veldefineret, da F er en funktor. Givet $U \subseteq |\mathcal{D}|$, og $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in A_n$ er

$$\phi^{-1}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}(|F|^{-1}(U)) = \phi^{-1}_{(F(\alpha_1),\ldots,F(\alpha_n))}(U)$$

hvilket viser, at $|F|$ er kontinuert.

Det ses let, at $|1_{\mathcal{C}}| = 1_{|\mathcal{C}|}$ og $|G \circ F| = |G| \circ |F|$, hvor $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ er endnu en funktor. Så $|\_|$ er en funktor fra kategorien af små kategorier til kategorien af topologiske rum.

Sætning 6.1. *Nerven af $\mathcal{C}$ er homeomorf med nerven af $\mathcal{C}^{op}$.*

Bevis. Definer $f\colon |\mathcal{C}| \to |\mathcal{C}^{\mathrm{op}}|$ ved $f(a,t) = (f_1(a), f_2(t))$ hvor

$$f_1(\alpha_0,\ldots,\alpha_n) = (\alpha_n,\ldots,\alpha_0)$$

og

$$f_2(t_0,\ldots,t_n) = (t_n,\ldots,t_0)$$

Så gælder der

$$\begin{aligned} f_1(d_{n,i}(a)) &= d_{n,n-i}(f_1(a)) \\ f_2(\delta^{n,i}(t)) &= \delta^{n,n-i}(f_2(t)) \\ f_1(s^{n,i}(a)) &= s^{n,n-i}(f_1(a)) \\ f_2(\sigma_{n,i}(t)) &= \sigma_{n,n-i}(f_2(t)) \end{aligned}$$

Ved brug af disse ligninger følger det, at f er veldefineret. Det ses let, at f er en homeomorfi. $\square$

6.2. **Kædekompleks for nerven.** For alle $n \geq 0$ lad D_n betegne de degenererede simplekser i A_n. Lad $\Delta_n = RA_n/RD_n \simeq R(A_n - D_n)$ og definer en randafbildning $\partial_n\colon \Delta_n \to \Delta_{n-1}$ ved

$$\partial_n([a]) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [d_{n,i}(a)]$$

Det tjekkes let, at ∂_n er veldefineret og at $\partial_n \partial_{n+1} = 0$. Hvis $\cdots \to C_1 \to C_0 \to 0$ betegner det singulære kædekompleks for $|\mathcal{C}|$, så har vi en kædeafbildning $f_n\colon \Delta_n \to C_n$ givet ved for $a \in A_n - D_n$, at $f_n(a) = \phi_a$. I [3] afsnit 2.1 introduceres såkaldte delta-komplekser og det vises, at en kædeafbildning svarende til f_* inducerer en isomorfi på homologien af kædekomplekserne. Man kan lave et tilsvarende bevis for, at $H_n(f)\colon H_n(\Delta) \to H_n(C)$ er en isomorfi. Tilsvarende er $H^n(f)\colon H^n(\Delta) \to H^n(C)$ en isomorfi (her er H^n givet ved først at anvende $\mathrm{Hom}(\_, R)$ før man tager homologi). Jeg vil definere $H_n(|\mathcal{C}|, R) := H_n(\Delta)$ og $H^n(|\mathcal{C}|, R) := H^n(\Delta)$.

Sætning 6.2. *Vi har $H_*(\mathcal{C}, \underline{R}) \simeq H_*(|\mathcal{C}|, R)$ og $H^*(\mathcal{C}, \underline{R}) \simeq H^*(|\mathcal{C}|, R)$.*

Bevis. Første isomorfi: Lad $\overline{P} \to \underline{R}$ være den normaliserede standard-resolution af $\underline{R}$ som højre $R\mathcal{C}$-modul. Dvs. $\overline{P}_n = R\{x_n \leftarrow \cdots \leftarrow x_0 \leftarrow x\}$ som R-modul. Så er $\overline{P}_n \otimes \underline{R}$ en R-modul med basis

$$\{([\alpha_n, \dots, \alpha_1]1_x) \otimes 1_x \mid [\alpha_n, \dots, \alpha_1] \in A_n - D_n, \mathrm{dom}(\alpha_1) = x\}$$

Dette svarer til at sige, at $g_n\colon \overline{P}_n \otimes \underline{R} \to \Delta_n$ givet ved

$$g_n([\alpha_n, \dots, \alpha_1]1_x) \otimes 1_x) = [\alpha_n, \dots, \alpha_1]$$

er en veldefineret isomorfi, hvilket let ses – g_n er veldefineret, da g_n er induceret af en bilineær afbildning. For $n \geq 1$ er desuden $\partial_n g_n = (-1)^n g_{n-1}(\overline{d}_n \otimes 1)$ – dette vises ved at bruge, at

$$\begin{aligned} &g_n((x_n \leftarrow \cdots \leftarrow x_1 \xleftarrow{\alpha_1} \widehat{x}_0 \xleftarrow{1} x_0) \otimes 1_{x_0}) \\ =\ &g_n((x_n \leftarrow \cdots \leftarrow x_1 \xleftarrow{1} x_1) \otimes 1_{x_1}) \\ =\ &(x_n \leftarrow \cdots \leftarrow x_1) \end{aligned}$$

Så g_* inducerer en isomorfi $H_*(\mathcal{C}, \underline{R}) \to H_*(|\mathcal{C}|, R)$.

Anden isomorfi: Lad nu i stedet $\overline{P} \to \underline{R}$ betegne den normaliserede standard-resolution af $\underline{R}$ som venstre $R\mathcal{C}$-modul. Så har vi en isomorfi $h^n\colon \mathrm{Hom}_{R\mathcal{C}}(\overline{P}_n, \underline{R}) \to \mathrm{Hom}_r(\Delta_n, R)$ givet ved

$$h^n(\phi)(x_0 \leftarrow \cdots \leftarrow x_n) = \phi(x_0 \xleftarrow{1} x_0 \leftarrow \cdots \leftarrow x_n)$$

og det tjekkes på en tilsvarende måde som for g_*, at h^* inducerer en isomorfi $H^*(\mathcal{C}, \underline{R}) \to H^*(|\mathcal{C}|, R)$. □

Ovenfor definerede jeg den normaliserede standard-resolution af $\underline{R}$ ud fra eksakte følger $\cdots \to \overline{P}_1(x) \to \overline{P}_0(x) \to R \to 0$ for hvert $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. $\overline{P}_*(x)$ er faktisk kædekomplekset for nerven af en bestemt kategori – nemlig overkategorien over x: Dette er kategorien $\mathcal{E}_x$ hvis objekter er morfierne $y \to x$ og hvis morfier $\mathrm{Hom}(y \xrightarrow{\alpha} x, z \xrightarrow{\beta} x)$ er morfierne $y \xrightarrow{\gamma} z$, der opfylder $\alpha = \beta\gamma$. Denne kategori har det terminale objekt $x \xrightarrow{1} x$, og nerven $|\mathcal{E}_x|$ er derfor kontraktibel (se eksempel 6.5 nedenfor). Dette er en anden måde at se, at kædekomplekset $\cdots \to \overline{P}_1(x) \to \overline{P}_0(x) \to R \to 0$ for $|\mathcal{E}_x|$ er eksakt.

6.3. **Nerven og produkter.** Næste bevis er temmeligt teknisk selv om ideen til beviset er simpel nok. Det er en variant af sætning 3.7 i [2] (bemærk at der i beviset i [2] er en lille fejl i dets definition af p_k).

Sætning 6.3. *Lad $\mathcal{C}$ og $\mathcal{D}$ være små kategorier. Så eksisterer der en kontinuert bijektion $\Phi\colon |\mathcal{C} \times \mathcal{D}| \to |\mathcal{C}| \times |\mathcal{D}|$.*

Bevis. Vi har en bijektion $A_n^{\mathcal{C}\times\mathcal{D}} \to A_n^{\mathcal{C}} \times A_n^{\mathcal{D}}$ givet ved $((f_1, g_1), \dots, (f_n, g_n)) \mapsto ((f_1, \dots, f_n), (g_1, \dots, g_n))$ for $n \geq 1$ og $(x, y) \mapsto (x, y)$ for $n = 0$, og jeg vil tillade mig at skrive elementerne i første mængde som elementer i den anden mængde. Bijektionen harmonerer med $d_{n,i}$ og $s^{n,i}$. Definitionen af Φ kommer nu naturligt:

$$\Phi((a, b), t) = ((a, t), (b, t))$$

Det ses let, at Φ er veldefineret og kontinuert.

Jeg vil nu definere en afbildning Ψ og vise, at Ψ er invers til Φ: Lad $((a, t), (b, u)) \in |\mathcal{C}| \times |\mathcal{D}|$, hvor $a = x_0 \xleftarrow{f_1} \dots \xleftarrow{f_n} x_n$ og $b = y_0 \xleftarrow{g_1} \dots \xleftarrow{g_m} y_m$, og $t = (t_1, \dots, t_n)$ og $u = (u_1, \dots, u_m)$. Punktet $((a, t), (b, u))$ ligger altså i produktet af et n-simpleks og et m-simpleks, men hvis $n \neq 0$ og $m \neq 0$ deles dette produkt op i mere end et $n + m$-simplekser gennem Φ. Så jeg skal, ud fra t og u, bestemme hvilket $n+m$-simpleks, som $((a, t), (b, u))$ ligger i Φ's billede af. Definer $T_i = \sum_{j=0}^{i} t_j$ og $U_i = \sum_{j=0}^{i} u_j$. Ordn $T_0, \dots, T_n, U_0, \dots, U_m$ efter størrelse, kald det k-te tal for C_{k-1} og smid C_{n+m+1} væk:

$$C_0 \leq \dots \leq C_{n+m}$$

Jeg kan nu definere en kæde af morfier $z_0 \leftarrow \dots \leftarrow z_{n+m}$ ved $z_k = (x_{\alpha(k)}, y_{\beta(k)})$, hvor $\alpha(k)$ (hhv. $\beta(k)$) er antallet af T_j-er (hhv. U_j-er) blandt $C_0, \dots, C_{k-1}$. Morfierne fås ud fra $(f_1, \dots, f_n)$ og $(g_1, \dots, g_m)$ ved at indskyde identitetsmorfier, når et x_i eller y_i gentages. Definer $v = (v_0, \dots, v_{n+m})$ ved $v_k = C_k - C_{k-1}$ (så $v_0 = C_0$). Så er $v \in \Delta^{n+m}$. Definer

$$\Psi((a, t), (b, u)) = (z_0 \leftarrow \dots \leftarrow z_{n+m}, v)$$

Det kan nu tjekkes, at Ψ er veldefineret, og er invers til Φ.

□

Bemærkning 6.4. I de tilfælde, jeg vil bruge sætning 6.3 i resten af dette projekt, er afbildningen Φ faktisk en homeomorfi. Φ er en homeomorfi, hvis enten $\mathcal{C}$ eller $\mathcal{D}$ kun har endeligt mange ikke-degenererede celler, eller hvis både $\mathcal{C}$ og $\mathcal{D}$ kun har tælleligt mange ikke-degenererede celler. Se appendix A i [3].

Lad $F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ være funktorer mellem to små kategorier og lad $\eta\colon F \Rightarrow G$ være en naturlig transformation. Jeg vil vise, at η giver anledning til en homotopi mellem afbildningerne $|F|$ og $|G|$. Til dette formål vil jeg indføre kategorien $\mathcal{I}$ som kategorien med præcis to objekter 0 og 1 og præcis en ikke-identitetsmorfi $0 \xrightarrow{\iota} 1$.

Fra F, G og η kan man definere en funktor $H\colon \mathcal{C}\times\mathcal{I} \to \mathcal{D}$ som følger: Sæt $H(x,0) = F(x)$ og $H(x,1) = G(x)$. For en morfi $\alpha\colon x \to y$ sæt $H(\alpha, 1_0) = F(\alpha)$, $H(\alpha, 1_1) = G(\alpha)$ og $H(\alpha, \iota) = \eta_y F(\alpha)$ $(= G(\alpha)\eta_x)$. At H er en funktor følger af, at F og G er det, og af naturligheden af η.

Sæt nu $h = |H| \circ \Phi^{-1}\colon |\mathcal{C}| \times [0,1] \to |\mathcal{D}|$, hvor Φ er afbildningen i sætning 6.3 og hvor $|\mathcal{I}|$ er identificeret med $[0,1]$ ved $((\iota),(t_0,t_1)) \mapsto t_0$. I dette tilfælde er Φ en homeomorfi, så h er kontinuert.

Lad $(a,t) \in |\mathcal{C}|$, $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ og $t = (t_0, \dots, t_n)$. Så er

$$\begin{aligned} h((a,t),0) &= |H|(\Phi^{-1}((a,t),((\iota),(0,1)))) \\ &= |H|(\Phi^{-1}((a,t),(0,(1)))) \\ &= |H|((a,0),t) \\ &= |F|(a,t) \end{aligned}$$

Tilsvarende gælder der, at $h((a,t),1) = |G|(a,t)$. Altså er h en homotopi fra $|F|$ til $|G|$.

Det kan måske virke mærkeligt, at en naturlig transformation giver anledning til en "symmetrisk" størrelse som en homotopi h – h giver jo en homotopi fra $|G|$ til $|F|$ ved $((a,t),v) \mapsto h((a,t),1-v)$, hvorimod der ikke nødvendigvis er en naturlig transformation fra $|G|$ til $|F|$. Men η giver en en naturlig transformation $\eta^o\colon G^o \to F^o$ hvor $F^o, G^o\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ er funktorerne som har samme værdier på objekter og morfier som hhv. F og G – sæt blot $\eta^o_x = \eta_x$ for alle $x \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$. Og η^o giver en homotopi : $|\mathcal{C}^{\mathrm{op}}| \times [0,1] \to |\mathcal{D}^{\mathrm{op}}|$. Sætning 6.1 giver homeomorfier $|\mathcal{C}| \simeq |\mathcal{C}^{\mathrm{op}}|$ og $|\mathcal{D}| \simeq |\mathcal{D}^{\mathrm{op}}|$ og ved brug af disse fås en homotopi $|\mathcal{C}| \times [0,1] \to |\mathcal{D}|$ fra $|G|$ til $|F|$. Denne homotopi er netop $((a,t),v) \mapsto h((a,t),1-v)$.

Eksempel 6.5. Antag at $\mathcal{C}$ har et terminalt objekt T. For funktoren $\Delta(T)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ gælder der

$$|\Delta(T)|((\alpha_1, \dots, \alpha_n), t) = ((1_T, \dots, 1_T), t) = (T, 1)$$

så det ses, at $|\Delta(T)|$ er konstant. Man kan nu definere en naturlig transformation $\eta\colon 1_{\mathcal{C}} \to \Delta(T)$ ved at lade η_C være den entydigt bestemte afbildning fra C til T. Entydigheden af disse afbildninger giver, at η er naturlig. Som beskrevet ovenfor giver η anledning til en homotopi fra $|1_{\mathcal{C}}| = 1_{|\mathcal{C}|}$ til den konstante afbildning $|\Delta(T)|$. Altså er $|\mathcal{C}|$ kontraktibel.

Antag nu i stedet, at $\mathcal{C}$ har et initialt objekt. Da et initialt objekt i $\mathcal{C}$ er det samme som et terminalt objekt i $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, er $|\mathcal{C}^{\mathrm{op}}|$ kontraktibel, så per sætning 6.1 er også $|\mathcal{C}|$ kontraktibel.

7. Konkrete udregninger

7.1. **Homologi og kohomologi i dimension 0.** Lad $P_* \to \underline{R}$ være standard-resolutionen af $\underline{R}$ som enten højre- eller venstre-modul. Så er $P_0 \simeq R\mathcal{C}$. Så hvis M er en $R\mathcal{C}$-modul er $P_0 \otimes_{R\mathcal{C}} M \simeq M$. Da tensorproduktet er højreeksakt er $\operatorname{Tor}_{R\mathcal{C}}(\underline{R}, M) \simeq \underline{R} \otimes_{R\mathcal{C}} M \simeq M_{\mathcal{C}}$, hvor $M_{\mathcal{C}} =$

$M/R\{(\alpha - 1_{\mathrm{cod}(\alpha)})m\}$ er den største kvotient af M hvor $R\mathcal{C}$ virker trivielt. Den sidste isomorfi er induceret af den bilineære afbildning $f\colon \underline{R} \times M \to M/R\{(\alpha - 1_{\mathrm{cod}(\alpha)})m\}$ givet ved $f(\sum_{x\in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}} r_x, \sum_{x\in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}} m_x) = \sum_x r_x m_x$.

Generelt gælder $\mathrm{Hom}_{R\mathcal{C}}(P_0, M) \simeq \prod_{x\in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} 1_x M$. Så antag $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ er endelig; så er $\mathrm{Hom}_{R\mathcal{C}}(P_0, M) \simeq M$. Da kontravariant Hom er venstreeksakt, er $\mathrm{Ext}^0_{R\mathcal{C}} \simeq \mathrm{Hom}_{R\mathcal{C}}(\underline{R}, M) \simeq M^{\mathcal{C}}$, hvor $M^{\mathcal{C}} = \{m \in M \mid \alpha m = 1_{\mathrm{cod}(\alpha)} m\}$ er største undermodul af M, hvor $R\mathcal{C}$ virker trivielt. Sidste isomorfi er givet ved $\phi \mapsto \phi(\sum_x 1_x)$.

7.2. **Kategorier med initialt eller terminalt objekt.** Lad M være en vilkårlig $R\mathcal{C}$-modul. Så er der en asymmetri i den projektive resolution for $\underline{R}$ som gør at (ko)homologien af $\mathcal{C}$ ikke nødvendigvis er lig (ko)homologien af $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ – i modsætning til hvis $M = \underline{R}$, jf. sætning 6.2. Så lad mig starte med at antage, at $\mathcal{C}$ har et initialt objekt a. Lad $P_* \to \underline{R}$ være standard-resolutionen af $\underline{R}$. For $n \geq 0$ definer $h_n\colon P_n \to P_{n+1}$ ved

$$h_n(x \leftarrow x_0 \leftarrow \cdots \leftarrow x_n) = (x \leftarrow x_0 \leftarrow \cdots \leftarrow x_n \leftarrow a)$$

Dette giver mening, da det eksisterer netop 1 morfi $a \to x_n$. Og h_n er en $R\mathcal{C}$-homomorfi. Det ses let, at $d_{n+1}h_n + h_{n-1}d_n = 1$ for $n \geq 1$, så h er en kontraherende homotopi, bortset fra i dimension 0. Givet $n \geq 1$ og $\phi \in \mathrm{Hom}_{R\mathcal{C}}(P_n, M)$ er

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{Hom}(h_n, M) \circ \mathrm{Hom}(d_{n+1}, M) + \mathrm{Hom}(d_n, M) \circ \mathrm{Hom}(h_{n-1}, M))(\phi) \\
&= \phi \circ d_{n+1} \circ h_n + \phi \circ h_{n-1} \circ d_n \\
&= \phi \circ (d_{n+1}h_n + h_{n-1}d_n) \\
&= \phi
\end{aligned}$$

Så $\mathrm{Hom}_{R\mathcal{C}}(h_*, M)$ er en kontraherende homotopi i dimension ≥ 1 og $H^n(\mathcal{C}, M) = 0$ for $n \geq 1$.

Bemærk at hvis t er et terminalt objekt for $\mathcal{C}$ at $g_n(x \leftarrow x_0 \leftarrow \cdots \leftarrow x_n) = (t \leftarrow x \leftarrow x_0 \leftarrow \cdots \leftarrow x_n)$ definerer en R-homomorfi, *men ikke en $R\mathcal{C}$-homomorfi*, så $\mathrm{Hom}_{R\mathcal{C}}(g_n, M)$ eksisterer ikke. Derfor kan ovenstående argument ikke modificeres til at fungere i tilfældet hvor $\mathcal{C}$ har et terminalt, men ikke et initialt objekt. Her er et eksempel på en sådan kategori:

Eksempel 7.1. Antag $\mathcal{D}$ er kategorien med tre objekter x, y og z og præcis to ikke-identitets-morfier $f\colon x \to z$ og $g\colon y \to z$. Så er z terminalt objekt, men der er intet initialt objekt. Lad $(\overline{P}, d)$ være den normaliserede standard-resolution af $\underline{R}$. Så er $\overline{P}_n = 0$ for $n \geq 2$, så kun $d_1 \neq 0$. Sæt $\delta = \mathrm{Hom}_{R\mathcal{D}}(d_1, M)$. Vi har $\overline{P}_0 = R\mathcal{D}$ og $\overline{P}_1 = F_z\{[f], [g]\}$. Lad $\phi \in \mathrm{Hom}(\overline{P}_0, M)$ og $m = \Phi_0(\phi)$, $m = 1_x m_x + 1_y m_y + 1_z m_z$. Så er

$$\begin{aligned}
\delta(\phi)([f]) &= (f - 1_z)m = 1_z(fm_x - m_z) \\
\delta(\phi)([g]) &= (g - 1_z)m = 1_z(gm_x - m_z)
\end{aligned}$$

Vi har en R-isomorfi $\Phi_1\colon \operatorname{Hom}(P_1, M) \simeq 1_z M \oplus 1_z M$ givet ved $\Phi_1(\psi) = (\psi([f]), \psi([g]))$.

Antag nu, at $1_z M \neq 0$, men $fm = gm = 0$ for alle $m \in M$. Så er $\operatorname{Im}(\Phi_1 \delta) = \{(m, m) \mid m \in 1_z M\}$. Dermed er $H^1(\mathcal{D}, M) \simeq (1_z M \oplus 1_z M)/\operatorname{Im}(\Phi_1\delta) \simeq 1_z M$.

Antag nu, at $\mathcal{C}$ har et terminalt objekt og lad nu $P_* \to \underline{R}$ betegne standard-resolutionen af $\underline{R}$ som højre-modul – altså standardresolutionen over $R\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$. Så har $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ et initialt objekt, så en kontraherende homotopi h kan defineres akkurat som h ovenfor, blot er nu h_n en $R\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$-homomorfi. Det tjekkes nu let, at $h \otimes 1_M$ giver en kontraherende homotopi på $P \otimes M$ (stadig bortset fra dimension 0), så $H_n(\mathcal{C}, M) = 0$ for $n \geq 1$.

Eksempel 7.2. Dette eksempel er en fortsættelse af eksempel 7.1. $\mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ er et initialt, men ikke noget terminalt, objekt. Jeg vil vise, at $H_1(\mathcal{D}^{\mathrm{op}}, \underline{R}) \neq 0$. $\overline{P}$ er en resolution af $\underline{R}$ som højremodul over $R\mathcal{D}^{\mathrm{op}}$. Vi har $P_0 \otimes M \simeq M$ og $P_1 \otimes M \simeq 1_z M \oplus 1_z M$ via isomorfien $([f]1_z \otimes m_1 + [g]1_z \otimes m_2) \mapsto (1_z m_1, 1_z m_2)$. Homomorfien $\partial_1\colon 1_z M \oplus 1_z M \to M$ induceret af d_1 er givet som $\partial_1(1_z m_1, 1_z m_2) = (f - 1_z)m_1 + (g - 1_z)m_2 = 1_z m_1 + 1_z m_2$. Så $H_1(\mathcal{D}^{\mathrm{op}}, \underline{R}) \simeq \operatorname{Ker}(\partial_1) \simeq 1_z M$.

7.3. **Den cykliske gruppe af orden 2.** Antag $\mathcal{C}$ er kategorien svarende til den cykliske gruppe af orden to – kald objektet x og den frembringende morfi f, $f^2 = 1_x$. Så er $|\mathcal{C}| \simeq \mathbb{R}P^\infty$, det uendeligtdimensionale reelle projektive rum.

Jeg vil udregne $\operatorname{Ext}_{\mathbb{F}_2\mathcal{C}}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$, hvor $\mathbb{F}_2$ er legemet af orden to. Jeg vil bruge Φ og Ψ i samme betydning som i afsnit 3. Den normaliserede standard-resolution af $\mathbb{F}_2$ har formen

$$\cdots \to \mathbb{F}_2\mathcal{C} \xrightarrow{d_2} \mathbb{F}_2\mathcal{C} \xrightarrow{d_1} \mathbb{F}_2\mathcal{C} \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{F}_2 \to 0$$

da der kun er 1 ikke-degenereret kæde af morfier i hver dimension. Vi har $d_n(1_x) = d_n(f) = 1_x + f_x$ (her er det rart, at vores basisring $\mathbb{F}_2$ har karakteristik 2) og $\epsilon(1_x) = \epsilon(f) = 1$. For et $\phi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}_2\mathcal{C}}(\mathbb{F}_2\mathcal{C}, \mathbb{F}_2)$ er $\phi(1_x) = \phi(f)$, så $\phi d_n = 0$ for alle $n \geq 1$. Da desuden $\mathbb{F}_2 \simeq \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}_2\mathcal{C}}(\mathbb{F}_2\mathcal{C}, \mathbb{F}_2)$ fås, at $\operatorname{Ext}^n_{\mathbb{F}_2\mathcal{C}}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) \simeq \mathbb{F}_2$ for alle $n \geq 0$ så som R-modul er

$$\operatorname{Ext}_{\mathbb{F}_2\mathcal{C}}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) \simeq \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{F}_2$$

Lad de to elementer i grad n være betegnet $0x^n$ og $1x^n$.

$\Psi(0x^n)$, $n \geq 1$: Push-outet af $0\colon \mathbb{F}_2\mathcal{C} \to \mathbb{F}_2$ og $d_n\colon \mathbb{F}_2\mathcal{C} \to \mathbb{F}_2\mathcal{C}$ er $(\mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2\mathcal{C})/\mathbb{F}_2(0, 1_x + f) \simeq \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2$. Så ekstensionen bliver

$$0 \to \mathbb{F}_2 \xrightarrow{\alpha_n} \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2 \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \mathbb{F}_2\mathcal{C} \xrightarrow{d_{n-2}} \cdots \to \mathbb{F}_2\mathcal{C} \to \mathbb{F}_2 \to 0$$

hvor $\alpha_n(a) = (a, 0)$ og $\alpha_{n-1}(a, b) = b(1_x + f)$.

$\Psi(1x^n)$, $n \geq 1$: Elementet $1x^n$ svarer til homomorfien $\epsilon\colon \mathbb{F}_2\mathcal{C} \to \mathbb{F}_2$ og push-outet af ϵ og d_n er $(\mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2\mathcal{C})/\mathbb{F}_2(1, 1_x + f) \simeq \mathbb{F}_2\mathcal{C}$. Så ekstensionen bliver

$$0 \to \mathbb{F}_2 \xrightarrow{\beta_n} \mathbb{F}_2\mathcal{C} \xrightarrow{d_{n-1}} \mathbb{F}_2\mathcal{C} \xrightarrow{d_{n-2}} \cdots \to \mathbb{F}_2\mathcal{C} \to \mathbb{F}_2 \to 0$$

hvor $\beta_n(a) = a(1_x + f)$.

Da $\beta_n \epsilon = d_n$ følger det, at produktet af $\Psi(1x^n)$ og $\Psi(1x^m)$ er $\Psi(1x^{n+m})$. Så $(1x^n)(1x^m) = 1x^{n+m}$ – og dette gælder også hvis $n = 0$ eller $m = 0$. Produktet af $\Psi(ax^n)$ og $\Psi(bx^m)$ hvor $a = 0$ eller $b = 0$ vil have formen

$$\mathcal{E} = \cdots \to \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2\mathcal{C} \xrightarrow{d_{k-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} \mathbb{F}_2\mathcal{C} \to \mathbb{F}_2 \to 0$$

Jeg vil finde $\Phi(\mathcal{E})$, så antag der for $\mathcal{E}$ er valgt løft ϕ_i for $i = 0, \ldots, k$ (som i diagram 3.1). Så er $\phi_k(1_x + f) = (1_x + f)\phi_k(1_x) = 2\phi_k(1_x) = 0$, så $\phi_k d_{k+1} = 0$. Dermed kan løftene $\phi_{k+1}, \ldots, \phi_{n+m}$ vælges lig 0, og $\Phi(\mathcal{E}) = 0x^{n+m}$.

Altså er $(ax^n)(bx^m) = abx^{n+m}$ – også hvis $n = 0$ eller $m = 0$. Dermed er produktet på $\mathrm{Ext}_{\mathbb{F}_2\mathcal{C}}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ fastlagt, og det ses, at

$$\mathrm{Ext}_{\mathbb{F}_2\mathcal{C}}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) \simeq \mathbb{F}_2[x]$$

hvor $\mathbb{F}_2[x]$ er polynomiumsalgebraen over $\mathbb{F}_2$ i en variabel.

Litteratur

1. K. S. Brown. *Cohomology of Groups.* Springer-Verlag, New York. 1982.
2. W. G. Dwyer and J. Spalinski. *Homotopy theories and model categories.* University of Notre Dame, Indiana.
3. A. Hatcher. *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, New York. 2001.
4. P. Webb. *An Introduction to the Representations and Cohomology of Categories.* University of Minnesota, Minneapolis.
5. Wikipedia. *Derived functor.* 28. maj 2008. `http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Derived_functor&oldid=215576056`
6. Wikipedia. *Ext functor.* 30. juli 2008. `http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Ext_functor&oldid=228814550`