HOMOTOPIGRUPPER OG OVERLEJRINGER

KASPER K. S. ANDERSEN & JESPER GRODAL

Date: Fredag d. 10/12 1993.

Contents

Forord

Denne rapport er resultatet af et Matematik 3 projekt i algebraisk topologi, skrevet i efterårssemestret 1993 under vejledning af Jesper Michael Møller. Projektet er udført i fælleskab af Jesper Kragh Grodal (311072) og Kasper Klinkby Sonne Andersen (161272).

1. Notation

Vi vil i det følgende med betegnelsen rum underforstå at der er tale om topologiske rum. I betegner altid det afsluttede enhedsinterval $[0;1]$, vi parametriser alle kurver med dette. En løkke er en kurve, der starter og slutter i samme punkt. Med ϵ_x betegnes den konstante sti givet ved $\epsilon_x(s) = x$. For en sti σ defineres den 'omvendte' sti σ^{-1} ved $\sigma^{-1}(s) = \sigma(1-s)$. For kontinuerte afbildninger $f : X \to Y$ med $f(x_0) = y_0$ bruges notationen $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$. Kardinaliteten af en mængde M skrives $\operatorname{card}(M)$, og den identiske afbildning fra M ind i sig selv skrives id_M. Mængden af kurvesammenhængskomponenter i et topologisk rum X betegnes $\pi_0(X)$.

2. Homotopibegrebet

I dette afsnit indfører vi en ækvivalensrelation på mængden af afbildninger $f : X \to Y$, sådan at vi, løst sagt, identificerer afbildninger der kan deformeres over i hinanden. Specielt vil vi betrage løkker i et rum, startende i et fast punkt. På ækvivalensklasser af disse viser det sig at man kan indføre en gruppestruktur, den såkaldte fundamentalgruppe.

Definition 2.1. Hvis f og g er kontinuerte afbildninger fra X til Y og $A \subseteq X$, siges f og g at være homotope relativt til A hvis $f|_A = g|_A$ og der findes en kontinuert afbildning $F : X \times I \to Y$ sådan at

$$\forall x \in X : F(x,0) = f(x) \wedge F(x,1) = g(x)$$
$$\forall (a,t) \in A \times I : F(a,t) = f(a) = g(a).$$

To afbildninger siges at være homotope, hvis de er homotope relativt til $\emptyset$. At to afbildninger er homotope relativt til A, vil således sige at den ene kan føres kontinuert over i den anden, hvor punkterne i A holdes fast.

Definition 2.2. To kurver siges at være kurvehomotope, hvis de er homotope relativt til $\{0,1\}$.

Sætning 2.3. *Homotopi relativt til en fast delmængde er en ækvivalensrelation. Ækvivalensklassen for en afbildning f betegnes $[f]$.*

Bevis : Lad den faste delmængde være A. Refleksivitet er klar, idet $F(x,t) = f(x)$ er en homotopi mellem f og sig selv relativt til A. Symmetrien er også klar, thi hvis $F : X \times I \to X$ er en homotopi mellem f og g relativt til A, er $G : X \times I \to X$ givet ved $G(x,t) = F(x, 1-t)$ en homotopi mellem g og f relativt til A. Hvis endelig F er en homotopi mellem f og g og G er en homotopi mellem g og h, begge relativt til A, er $H : X \times I \to X$ givet ved

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & \text{for } t \in [0; \frac{1}{2}] \\ G(x, 2t-1) & \text{for } t \in [\frac{1}{2}; 1] \end{cases}$$

en homotopi mellem f og h relativt til A, idet den er kontinuert på hver af de afsluttede delmængder, og stemmer overens på randen. $\square$

Definition 2.4. Lad σ være en sti i X fra x_0 til x_1, og τ en sti fra x_1 til x_2. Så defineres den sammensatte sti $\sigma\tau$ ved

$$\sigma\tau(s) = \begin{cases} \sigma(2s) & \text{for } s \in [0; \frac{1}{2}] \\ \tau(2s-1) & \text{for } s \in [\frac{1}{2}; 1] \end{cases}$$

Dette giver virkelig en sti, da $\sigma(1) = \tau(0)$.

Lemma 2.5. *Lad σ og $\tilde{\sigma}$ være kurvehomotope stier fra x_0 til x_1 og lad τ og $\tilde{\tau}$ være kurvehomotope stier fra x_1 til x_2. Så er $\sigma\tau$ og $\tilde{\sigma}\tilde{\tau}$ kurvehomotope.*

Bevis : Lad F være en kurvehomotopi mellem σ og $\tilde{\sigma}$, og G en kurvehomotopi mellem τ og $\tilde{\tau}$. Så er $H : I \times I \to X$ defineret ved

$$H(s,t) = \begin{cases} F(2s,t) & \text{for } s \in [0; \frac{1}{2}] \\ G(2s-1,t) & \text{for } s \in [\frac{1}{2}; 1] \end{cases}$$

en kurvehomotopi mellem $\sigma\tau$ og $\tilde{\sigma}\tilde{\tau}$. Den er nemlig veldefineret, og kontinuert på hver af de to afsluttede delmængder. Desuden holdes endepunkterne fast under homotopien. $\square$

Bemærkning 2.6. Lemmaet gør det muligt at tale om sammensætning af ækvivalensklasser af kurvehomotope stier. For to stier σ, τ i X med $\sigma(1) = \tau(0)$ er tilordningen $[\sigma] * [\tau] = [\sigma\tau]$ altså veldefineret. Nøjes vi med at betragte løkker startende (og sluttende) i et fast punkt, fås altså en komposition. Mængden af ækvivalensklasser af løkker i X startende i x_0 betegnes $\pi_1(X, x_0)$.

Lemma 2.7. *Hvis σ er en sti fra x_0 til x_1 gælder $[\sigma\epsilon_{x_1}] = [\epsilon_{x_0}\sigma] = [\sigma]$, $[\sigma\sigma^{-1}] = [\epsilon_{x_0}]$ og $[\sigma^{-1}\sigma] = [\epsilon_{x_1}]$.*

Bevis : Afbildningen $F : I \times I \to X$ givet ved

$$F(s,t) = \begin{cases} \sigma(\frac{2s}{t+1}) & \text{for } s \in [0; \frac{t+1}{2}] \\ x_1 & \text{for } s \in [\frac{t+1}{2}; 1] \end{cases}$$

en kurvehomotopi mellem $\sigma\epsilon_{x_1}$ og σ. Bemærk at dette er veldefineret og kontinuert, og at x_0 og x_1 holdes fast. På tilsvarende måde ses at $[\epsilon_{x_0}\sigma] = [\sigma]$. Definer $G : I \times I \to X$ ved

$$G(s,t) = \begin{cases} \sigma(2st) & \text{for } s \in [0; \frac{1}{2}] \\ \sigma(2(1-s)t) & \text{for } s \in [\frac{1}{2}; 1] \end{cases}$$

Det ses let at dette er en veldefineret og kontinuert kurvehomotopi mellem $\sigma\sigma^{-1}$ og ϵ_{x_0}. Heraf fås $[\sigma^{-1}\sigma] = [\sigma^{-1}(\sigma^{-1})^{-1}] = [\epsilon_{x_1}]$. $\square$

Sætning 2.8. *$\pi_1(X, x_0)$ er en gruppe med kompositionen $*$. Det neutrale element er $[\epsilon_{x_0}]$, og $[\sigma]^{-1} = [\sigma^{-1}]$. Denne gruppe kaldes fundamentalgruppen for X med hensyn til det udvalgte punkt x_0.*

BEVIS : Lad σ, τ og ρ være løkker startende i x_0. Så er F givet ved

$$F(s,t) = \begin{cases} \sigma(\frac{4s}{t+1}) & \text{for } s \in [0; \frac{t+1}{4}] \\ \tau(4s-t-1) & \text{for } s \in [\frac{t+1}{4}; \frac{t+2}{4}] \\ \rho(\frac{4s-t-2}{2-t}) & \text{for } s \in [\frac{t+2}{4}; 1] \end{cases}$$

en kurvehomotopi mellem $(\sigma\tau)\rho$ og $\sigma(\tau\rho)$. Den er nemlig veldefineret, og kontinuert på hver af de passende afsluttede mængder og dermed kontinuert. Desuden ses let at x_0 holdes fast under homotopien. Dermed er $*$ associativ. Af det foregående lemma ses (med $x_1 = x_0$) at $[\epsilon_{x_0}]$ er venstre- og højreneutralt, og at $[\sigma^{-1}]$ er venstre- og højreinvers til $[\sigma]$. Samlet fås altså at $\pi_1(X, x_0)$ er en gruppe. □

Definition 2.9. Lad α være en sti fra x_0 til x_1. Vi definerer afbildningen

$$\hat{\alpha} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$$
$$\hat{\alpha}([\sigma]) = [\alpha^{-1}] * [\sigma] * [\alpha]$$

Bemærk at dette er veldefineret, idet $\alpha^{-1}\sigma\alpha$ er en løkke startende i x_1.

Sætning 2.10. *$\hat{\alpha}$ er en gruppe isomorfi.*

BEVIS : At $\hat{\alpha}$ er en homomorfi fås direkte af at der for $[\sigma], [\tau] \in \pi_1(X, x_0)$ gælder $\hat{\alpha}([\sigma] * [\tau]) = [\alpha^{-1}\sigma\tau\alpha] = [\alpha^{-1}] * [\sigma] * [\epsilon_{x_0}] * [\tau] * [\alpha] = [\alpha^{-1}] * [\sigma] * [\alpha\alpha^{-1}] * [\tau] * [\alpha] = \hat{\alpha}([\sigma]) * \hat{\alpha}([\tau])$ idet vi har brugt lemma 2.7. Af dette ses også at der gælder $\widehat{\alpha^{-1}}(\hat{\alpha}([\sigma])) = [\alpha] * [\alpha^{-1}] * [\sigma] * [\alpha] * [\alpha^{-1}] = [\sigma]$. Dermed bliver $\widehat{\alpha^{-1}}$ venstreinvers til $\hat{\alpha}$. Heraf fås at $\widehat{(\alpha^{-1})^{-1}} = \hat{\alpha}$ er venstreinvers til $\widehat{\alpha^{-1}}$, dvs $\widehat{\alpha^{-1}}$ er højreinvers til $\hat{\alpha}$. Dermed er $\hat{\alpha}$ bijektiv, altså en isomorfi. □

Korollar 2.11. *Hvis X er kurvesammenhængende og x_0 og x_1 er vilkårlige punkter i X er $\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(X, x_1)$.*

Definition 2.12. Et rum X siges at være enkeltsammenhængende, hvis det er kurvesammenhængende og fundamentalgruppen er den trivielle gruppe $\{0\}$.

Definition 2.13. Lad $h : (X, x_0) \to (Y, y_0)$. Definer afbildningen

$$h_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$
$$h_*([f]) = [h \circ f]$$

Afbildningen h_* kaldes homomorfien induceret af h. Den er veldefineret thi hvis F er en kurvehomotopi mellem σ og $\tilde{\sigma}$, så er $h \circ F$ en kurvehomotopi mellem $h \circ \sigma$ og $h \circ \tilde{\sigma}$. At h_* er en homomorfi følger direkte af definitionen på sammensætning af løkker.

Sætning 2.14. *Hvis $h : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ og $k : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ så er $(k \circ h)_* = k_* \circ h_*$. Hvis $\mathrm{id}_X : (X, x_0) \to (X, x_0)$ er identitetsafbildningen, så er id_{X*} identitetshomomorfien.*

Bevis : Sætningen følger direkte af definitionen på den inducerede homomorfi. □

Bemærkning 2.15. Sætningen siger at π_1 er en funktor mellem kategorien af topologiske rum med et udvalgt punkt med de kontinuerte afbildninger som morfier og kategorien af grupper med gruppehomomorfier som morfier. Til det topologiske rum X med udvalgt punkt x_0 knyttes gruppen $\pi_1(X, x_0)$, og til den kontinuerte afbildning $h : X \to Y$ knyttes gruppehomomorfien $h_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$.

Korollar 2.16. *Fundamentalgruppen er en topologisk invariant, dvs hvis* $h : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *er en homeomorfi så er* $\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(Y, y_0)$.

Bevis : Dette er en direkte konsekvens af bemærkningen. Homeomorfierne er netop de bijektive morfier (for kategorien af topologiske rum med et udvalgt punkt) for hvilke den inverse også er en morfi. Tilsvarende er isomorfierne netop de bijektive morfier (for kategorien af grupper) for hvilke den inverse også er en morfi. □

Sætning 2.17. $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \simeq \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.

Bevis : Lad p og q være projektionerne af $X \times Y$ på hhv X og Y. Da disse er kontinuerte induceres gruppehomomorfier p_* og q_*. Definer

$$\Psi : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0), \Psi([\rho]) = (p_*([\rho], q_*([\rho])$$

Dette er en isomorfi. Det er klart at Ψ er en homomorfi, da p_* og q_* er homomorfier.
Ψ er surjektiv : Lad $([\sigma], [\tau]) \in \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$. Lad $\rho(s) = (\sigma(s), \tau(s))$. Så gælder $[\rho] \in \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ og $\Psi([\rho]) = ([\sigma], [\tau])$, som ønsket.
Ψ er injektiv : Lad $[\rho] \in \ker(\Psi)$, dvs $[p \circ \rho] = [\epsilon_{x_0}]$ og $[q \circ \rho] = [\epsilon_{y_0}]$. Der findes altså en kurvehomotopi F mellem $p \circ \rho$ og ϵ_{x_0} og en kurvehomotopi G mellem $q \circ \rho$ og ϵ_{y_0}. Da er $H(s, t) = (F(s, t), G(s, t))$ en kurvehomotopi mellem ρ og $\epsilon_{(x_0, y_0)}$. □

Sætning 2.18. *Lad* $h : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *og* $k : (X, x_0) \to (Y, y_1)$. *Hvis* h *og* k *er homotope, så findes en sti* α *i* Y *fra* y_0 *til* y_1 *sådan at* $k_* = \hat{\alpha} \circ h_*$. *Hvis* $y_0 = y_1$ *og basispunktet* x_0 *holdes fast under homotopien så er* $k_* = h_*$.

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X, x_0) \arrow[r, "h_*"] \arrow[dr, "k_*"'] & \pi_1(Y, y_0) \arrow[d, "\hat{\alpha}"] \\
 & \pi_1(Y, y_1)
\end{tikzcd}$$

Bevis : Lad $F : X \times I \to Y$ være en homotopi mellem h og k, og definer stien α ved $\alpha(s) = F(x_0, s)$. Vi skal så vise at der for vilkårlige løkker σ i

X startende i x_0 gælder $k_*([\sigma]) = [\alpha^{-1}] * h_*([\sigma]) * [\alpha]$, eller om man vil at $\alpha(k \circ \sigma)\alpha^{-1}$ og $h \circ \sigma$ er kurvehomotope. Definer nu $G : I \times I \to Y$ ved

$$G(s,t) = \begin{cases} \alpha(4st) & \text{for } s \in [0; \frac{1}{4}] \\ F(f(4s-1),t) & \text{for } s \in [\frac{1}{4}; \frac{1}{2}] \\ \alpha(2t)(1-s) & \text{for } s \in [\frac{1}{2}; 1] \end{cases}$$

Så er G en kurvehomotopi mellem $\alpha(k \circ \sigma)\alpha^{-1}$ og $\epsilon_{y_0}(h \circ \sigma)\epsilon_{y_0}$, hvoraf det ønskede følger. □

Korollar 2.19. *Lad $h : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ og $k : (X, x_0) \to (Y, y_1)$. Antag at h og k er homotope. Hvis k_* er injektiv (eller surjektiv eller den trivielle homomorfi) så er h_* det også.*

Bevis : Klart ifølge sætning 2.18 da $\hat{\alpha}$ er en isomorfi. □

Definition 2.20. En kontinuert afbildning $f : X \to Y$ kaldes en homotopi ækvivalens, hvis der findes en kontinuert afbildning $g : Y \to X$ således at $g \circ f$ er homotop til identitetsafbildningen id_X på X og $f \circ g$ er homotop til identitetsafbildningen id_Y på Y. Afbildningen g siges at være homotopi invers til f. Rummene X og Y siges at være homotopi ækvivalente. Det er let at se at dette virkelig er en ækvivalensrelation.

Sætning 2.21. *Lad $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$. Hvis f er en homotopi ækvivalens så er $(f_{x_0})_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ en isomorfi.*

Bevis : Lad $g : Y \to X$ være en homotopi invers til f. Betragt afbildningerne

$$(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{g} (X, x_1) \xrightarrow{f} (Y, y_1)$$

hvor $x_1 = g(y_0)$ og $y_1 = f(x_1)$. Så har vi de inducerede afbildninger

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{(f_{x_0})_*} \pi_1(Y, y_0) \xrightarrow{g_*} \pi_1(X, x_1) \xrightarrow{(f_{x_1})_*} \pi_1(Y, y_1)$$

Vi ved at $g \circ f : (X, x_0) \to (X, x_1)$ er homotop til identiteten på X, så der findes en sti α fra x_0 til x_1 så $(g \circ f)_* = \hat{\alpha} \circ (\mathrm{id}_X)_* = \hat{\alpha}$, så $(g \circ f)_* = g_* \circ (f_{x_0})_*$ er en isomorfi. Heraf ses at g_* er surjektiv. Tilsvarende fås at $(f \circ g)_* = (f_{x_1})_* \circ g_*$ er en isomorfi, så g_* er injektiv. Samlet fås at g_* er en isomorfi, så også $(f_{x_0})_* = (g_*)^{-1} \circ \hat{\alpha}$ er en isomorfi. Bemærk at g_* ikke nødvendigvis bliver den inverse til f_{x_0}. Dette vil dog gælde hvis basispunktet holdes fast under homotopien. Dette er grunden til at man nogle gange vil begrænse begrebet homotopi ækvivalens, så man betragter homotopier relativt til de udvalgte punkter. □

Bemærkning 2.22. Sætningen viser at fundamentalgruppen er en homotopi invariant, jævnfør korollar 2.16. Dette viser at man ved at anvende fundamentalgruppen højst kan opnå resultater op til homotopi ækvivalens. Homotopi ækvivalens er et svagere krav end homeomorfi, fx vil $\mathbb{R}$ og $\{0\}$ være homotopiækvivalente, men de er ikke homeomorfe. I den nuværende algebraisk topologi træder homotopi ækvivalens således i stedet for homeomorfi, idet man endnu ikke har fundet tilstrækkelig stærke algebraiske invarianter for topologiske rum.

3. Overlejringer

Vi vil i dette afsnit betragte de såkaldte overlejringsrum, som er nyttige i beregningen af fundamentalgrupper. Det vil desuden vise sig at der er en nær sammenhæng mellem undergrupper af fundamentalgruppen og overlejringer af et givet rum. Dette vil være emnet for det næste afsnit. I dette afsnit vil vi undersøge hvornår det er muligt at 'løfte' en afbildning via overlejringsrummet.

Definition 3.1. Lad $p : E \to B$ være en kontinuert afbildning. En åben mængde U i B siges at være jævnt overlejret af p hvis mængden $p^{-1}(U)$ kan skrives som en disjunkt forening af åbne mængder (V_α), således at $p|_{V_\alpha}$ er en homeomorfi mellem V_α og U. Mængderne V_α kaldes en lagdeling af $p^{-1}(U)$.

Bemærkning 3.2. Generelt er der ikke en entydig lagdeling af originalmængden til en jævnt overlejret mængde, giv fx både E og B den diskrete topologi. Hvis mængden U er åben og sammenhængdende gælder er lagdelingen entydigt bestemt, jvf lemma 4.21. Disse bliver faktisk sammenhængskomponenterne af $p^{-1}(U)$.

Definition 3.3. Lad $p : E \to B$ være en kontinuert afbildning. Hvis hvert punkt i B har en åben omegn U, som er jævnt overlejret af p, så siges p at være en overlejring.

Bemærkning 3.4. Det er klart at enhver overlejring er surjektiv. Overlejringer er lokale homeomorfier, forstået på den måde at der for alle $e \in E$ findes en åben omegn, som afbildes homeomorft på en åben mængde i B. Det er så klart at enhvert punkt i E har vilkårligt små omegne, som afbildes homeomorft på en åben mængde. Lad nemlig $e \in E$, og vælg en jævnt overlejret omegn U af $p(e)$. Lad (V_α) være en lagdeling af $p^{-1}(U)$, og lad V være det lag, som indeholder e. Så er V og U homeomorfe. Dette betyder at B og E vil have de samme lokale egenskaber, fx vil E være lokalt kurvesammenhængende netop hvis B er det. Enhver lokal homeomorfi er en åben afbildning, så enhver overlejring er en åben afbildning og dermed en kvotientafbildning. Lad nemlig $U \subseteq E$ være åben. For hvert punkt i U, findes så en åben omegn liggende i U, som afbildes homeomorft på en åben mængde. Dermed bliver $p(U)$ skrevet som en forening af åbne mængder.

Definition 3.5. For et punkt $b \in B$ kaldes $p^{-1}(b)$ fiberen over b.

Bemærkning 3.6. Fiberen over b betragtet som topologisk delrum er diskret. Vi kan nemlig finde en åben omegn U af b, som er jævnt overlejret, dvs vi kan finde åbne disjunkte mængder (V_α), så $p^{-1}(b) = p^{-1}(b) \cap (\bigcup_\alpha V_\alpha)$.

Sætning 3.7. *Lad $p : E \to B$ være en overlejring med $p(b_0) = e_0$. Hvis B er sammenhængende har alle fibre samme kardinalitet.*

BEVIS : Sæt $A = \{b \in B | \operatorname{card}(p^{-1}(b)) = \operatorname{card}(p^{-1}(b_0))\}$. Vi har $b_0 \in A$, så $A \neq \emptyset$. Vi viser at A er både åben og afsluttet, så $A = B$ da B er sammenhængende.
A er åben : Lad $b \in B$. Så findes en omegn U af b, som er jævnt overlejret. For $b' \in U$ gælder $\operatorname{card}(p^{-1}(b')) = \operatorname{card}(p^{-1}(b))$, så da $b \in A$ fås $b' \in A$, dvs $U \subseteq A$.
A er afsluttet : Lad $b \in \bar{A}$. Så findes en omegn U af b, som er jævnt overlejret. Desuden findes $b' \in U \cap A$. Heraf ses direkte $\operatorname{card}(p^{-1}(b)) = \operatorname{card}(p^{-1}(b'))$, så da $b' \in A$ fås $b \in A$, dvs $\bar{A} \subseteq A$. □

Bemærkning 3.8. Hvis $p : E \to B$ er en overlejring af et sammenhængende rum, så kan man således definere antallet af lag i overlejringen som kardinaliteten af fibrene. Hvis antallet af lag er n siges overlejringen at være en n-fold overlejring.

Sætning 3.9. *Lad $p : X \to Y$ og $q : Y \to Z$ være overlejringer, så $q^{-1}(z)$ er endelig for alle $z \in Z$, da er $q \circ p : X \to Z$ en overlejring.*

BEVIS : Det er klart at $q \circ p$ er kontinuert. Lad $z \in Z$. Da q er en overlejringsafbildning kan vi vælge en åben omegn U af z, så U er jævnt overlejret af q, $q^{-1}(U) = V_1 \cup \cdots \cup V_n$. Vælg for hver $v_i \in q^{-1}(z)$ en åben omegn V_i' af v_i så V_i' er jævnt overlejret af p og $V_i' \subseteq V_i$, $p^{-1}(V_i') = \bigcup_j W_{ij}$. Nu vil $U' = \bigcap_{i=1}^n q^{-1}(V_i')$ være en åben omegn af z og

$$(q \circ p)^{-1}(U') = (q \circ p)^{-1}(U') \cap \left(\bigcup_{i,j} W_{ij} \right) = \bigcup_{i,j} \left((q \circ p)^{-1}(U') \cap W_{ij} \right)$$

hvor $(q \circ p)^{-1}(U') \cap W_{ij}$ er åbne disjunkte mængder, og restriktionen af $q \circ p$ til disse er en homeomorfi på U', idet restriktionen af $q \circ p$ til mængderne W_{ij} er en homeomorfi på $q(V_i')$, og homeomorfi bevares ved restriktion. □

Bemærkning 3.10. Man kan vise at der ikke generelt gælder at sammensætningen af to overlejringer, igen er en overlejring. Vi giver senere et andet krav som ligeledes medfører at sammensætningen er en overlejring, se korollar 4.26.

Eksempel 3.11. Hvis Y er et diskret rum, så er projektionen på første koordinat, $p : X \times Y \to X$ en overlejring.

Eksempel 3.12. Afbildningen $p : \mathbb{R} \to S^1$ givet ved $p(x) = e^{2\pi i x}$ er en uendelig overlejring.

Eksempel 3.13. Lad $p : E \to B$ og $p' : E' \to B'$ være to overlejringer. Afbildningen $p \times p' : E \times E' \to B \times B'$ givet ved $(p \times p')(e, e') = (p(e), p'(e'))$ er en overlejring. At $(p \times p')$ er kontinuert er klart, og at ethvert punkt i $B \times B'$

har en jævnt overlejret åben omegn, følger af at $B \times B'$ har produkttopologien. Hvis $p : E \to B$ er en n-fold og $p' : E' \to B'$ en m-fold overlejring er $p \times p' : E \times E' \to B \times B'$ en nm-fold overlejring (gælder også med kardinaltal). Dog gælder der ikke at produktet af uendelig mange overlejringer igen er en overlejring. Tag fx et ikke endeligt produkt af overlejringen $p : \mathbb{R} \to S^1$ fra før med sig selv. Dette er ikke en overlejring, da en vilkårlig åben mængde vil indeholde en mængde af formen $U_1 \times \cdots \times U_n \times S^1 \times \cdots$, da disse er en basis for produkttopologien. Denne er dog ikke jævnt overlejret, da hele S^1 ikke er jævnt overlejret af p.

Eksempel 3.14. Afbildningen $p : S^1 \to S^1$ givet ved $p(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$, er en n-fold overlejring.

Definition 3.15. Lad $p : E \to B$ være en overlejring, og $f : X \to B$ en kontinuert afbildning. En kontinuert afbildning $f' : X \to E$ siges at være et løft af f, hvis $p \circ f' = f$.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "f'"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Lemma 3.16 (Lebesgue's tal lemma)**.** *Lad $\mathfrak{A}$ være en åben overdækning af et kompakt metrisk rum (X, d). Så findes et $\delta > 0$ (Lebesgue's tal), så der for alle delmængder Y af X med diameter mindre end δ findes et element i $\mathfrak{A}$ indeholdende Y.*

Bevis : Beviset kan findes skjult i Berg [1, side 6.8]. $\square$

Lemma 3.17 (Tube lemmaet)**.** *Lad X og Y være topologiske rum, hvor Y er kompakt. Hvis $\{x_0\} \times Y \subseteq A$, A åben findes en åben omegn W af x_0, så tuben $W \times Y \subseteq A$.*

Bevis : Vælg for hvert $y \in Y$ en åben omegn $U_y \times V_y$ af (x_0, y) indeholdt i A. Da $x_0 \times Y$ er kompakt kan vi udtynde til endelig mange mængder $U_i \times V_i, i = 1, \dots, n$ som overdækker $x_0 \times Y$. Sæt $W = \cap_{i=1}^n U_i$. Så er W en åben omegn af x_0 så $W \times Y \subseteq A$. $\square$

Sætning 3.18 (Eksistens og entydighed af løft af stier)**.** *Lad $p : E \to B$ være en overlejring med $b_0 = p(e_0)$. Enhver sti $\sigma : I \to B$ i B startende i b_0 kan entydigt løftes til en sti σ' i E, startende i e_0. I det følgende vil denne blot blive betegnet σ'_{e_0}.*

Bevis : Overdæk B med åbne mængder, som er jævnt overlejret af p. Originalmængderne ved σ til disse er en åben overdækning af I, som er et kompakt metrisk rum. Ifølge Lebesgue's tal lemma findes et $\delta > 0$, så alle delmængder af I med diameter mindre end δ er indeholdt i en af originalmængderne. Hvis $N > 1/\delta$ vil en inddeling af I i N lige lange delintervaller medføre at hvert delinterval ligger i en af originalmængderne. Vi definerer nu σ' trin for trin. Sæt først $\sigma'(0) = e_0$, og antag at σ' er defineret på intervallet $[0; \frac{i}{N}]$. Mængden $\sigma([\frac{i}{N}; \frac{i+1}{N}])$ er per antagelse indeholdt i en åben mængde U, som er jævnt overlejret af p. Lad (V_α) være en lagdeling af $p^{-1}(U)$. Vi ved at $\sigma'(\frac{i}{N})$ må ligge i en af disse mængder, fx V_0. Definer nu $\sigma'(s)$ for $s \in [\frac{i}{N}; \frac{i+1}{N}]$ ved $\sigma'(s) = (p|_{V_0})^{-1}(\sigma(s))$. Da $p|_{V_0} : V_0 \to U$ er en homeomorfi vil værdien i $\frac{i}{N}$ være entydigt bestemt, og σ' vil være kontinuert i $[\frac{i}{N}; \frac{i+1}{N}]$. Fortsættes på denne måde vil σ' være defineret i hele I, og da den er kontinuert på hver af de afsluttede delintervaller og værdien i endepunkterne stemmer overens, vil σ' være kontinuert på hele I. Desuden er det klart at σ' er et løft af σ, på grund af definitionen af σ'. Entydigheden af σ' bevises også trin for trin. Antag at $\hat{\sigma}$ er et løft af σ. Så gælder $\hat{\sigma}(0) = e_0 = \sigma'(0)$. Antag nu at $\hat{\sigma}(s) = \sigma'(s)$ for alle $s \in [0; \frac{i}{N}]$. Lad V_0 være valgt som før. Da $\hat{\sigma}$ er et løft af σ må $\hat{\sigma}([\frac{i}{N}; \frac{i+1}{N}])$ ligge i mængden $p^{-1}(U) = \bigcup V_\alpha$. Men $\hat{\sigma}([\frac{i}{N}; \frac{i+1}{N}])$ er en sammenhængende mængde, så da mængderne V_α er åbne og disjunkte må $\hat{\sigma}([\frac{i}{N}; \frac{i+1}{N}])$ være helt indeholdt i en af disse. Men vi har $\hat{\sigma}(\frac{i}{N}) = \sigma'(\frac{i}{N}) \in V_0$, så vi får $\hat{\sigma}([\frac{i}{N}; \frac{i+1}{N}]) \in V_0$. For $s \in [\frac{i}{N}; \frac{i+1}{N}]$ er $\hat{\sigma}(s)$ altså et punkt i $V_0 \cap p^{-1}(\sigma(s))$. Men dette er en et-punkts mængde som består af punktet $(p|_{V_0})^{-1}(\sigma(s)) = \sigma'(s)$. Altså stemmer $\hat{\sigma}$ og σ' overens i intervallet $[\frac{i}{N}; \frac{i+1}{N}]$, og dermed på hele I. $\square$

Sætning 3.19 (Eksistens af løft af homotopier). *Lad $p : E \to B$ være en overlejring med $b_0 = p(e_0)$, og lad (X, x_0) være et vilkårligt rum. Lad $f : (X, x_0) \to (B, b_0)$ være en kontinuert afbildning, der har et løft $f' : (X, x_0) \to (E, e_0)$. Hvis $F : X \times I \to B$ er kontinuert med $F(x, 0) = f(x)$, så findes et løft af F til en kontinuert afbildning $F' : X \times I \to E$ med $F'(x, 0) = f'(x)$.*

Bevis : Lad $x \in X$ være vilkårlig. Overdæk B med åbne mængder, som er jævnt overlejret af p. Originalmængderne ved F til disse er en åben overdækning af $X \times I$ og dermed specielt af $\{x\} \times I$, som er et kompakt metrisk rum. Ifølge Lebesgue's tal lemma findes et $\delta > 0$, så enhver delmængde af $\{x\} \times I$ med diameter mindre end δ er indeholdt i en af originalmængderne. Vælges $N > 1/\delta$ vil der for alle $i = 0, \dots N-1$ gælde at $\{x\} \times [\frac{i}{N}; \frac{i+1}{N}])$ ligger i en af originalmængderne, $F^{-1}(U_i)$, hvor U_i er jævnt overlejret af p. Af tube lemmaet findes nu en åben omegn $V_{x,i}$, så $V_{x,i} \times [\frac{i}{N}; \frac{i+1}{N}]) \subseteq F^{-1}(U_i)$. Sættes $V_x = \bigcap_{i=1}^{N} V_{x,i}$ gælder altså $F(V_x \times [\frac{i}{N}; \frac{i+1}{N}]) \subseteq U_i$. Vi definerer nu F' på $V_x \times I$ trin for trin. For $x' \in V_x$ sættes $F'(x', 0) = f'(x')$. Antag nu at F' er defineret på $V_x \times [0; \frac{i}{N}]$. Mængden $F(V_x \times [\frac{i}{N}; \frac{i+1}{N}])$ er indeholdt i U_i, som er jævnt overlejret af p. Lad W_α være en lagdeling af $p^{-1}(U_i)$, og sæt $V_\alpha = q_{V_x} \circ F'|_{V_x \times \{\frac{i}{N}\}}{}^{-1}(W_\alpha)$, hvor q_{V_x} er projektion på førstekoordianten. Disse udgør en åben disjunkt overdækning af V_x. Lad nemlig $x' \in V_x$. Vi har $(p \circ F'|_{V_x \times \{\frac{i}{N}\}})(x', \frac{i}{N}) = F(x', \frac{i}{N}) \in U_i$, så $F'|_{V_x \times \{\frac{i}{N}\}})(x', \frac{i}{N}) \in W_\alpha$ for passende α, og dermed $x' \in V_\alpha$. For $(x, t) \in$

$V_\alpha \times [\frac{i}{N};\frac{i+1}{N}]$ sættes $F'(x,t) = (p|_{W_\alpha})^{-1}(F(x,t))$. Det er så klart at F' er et løft af F på mængden $V_x \times [\frac{i}{N};\frac{i+1}{N}]$. At F' er veldefineret følger så at at $F'(x',\frac{i}{N}) \in W_\alpha$ både efter den nye og den gamle definition. Desuden ses at F' bliver kontinuert på $V_x \times [\frac{i}{N};\frac{i+1}{N}]$, da mængderne $V_\alpha \times [\frac{i}{N};\frac{i+1}{N}]$ er disjunkte og åbne relativt til $V_x \times [\frac{i}{N};\frac{i+1}{N}]$. Kontinuiteten af F' på $V_x \times I$ følger så af at F' er kontinuert på hver af de afsluttede mængder $V_x \times [\frac{i}{N};\frac{i+1}{N}]$. Vi har nu defineret F' på mængder af formen $V_x \times I$. At dette på entydig måde kan sammenstykkes til en funktion F' defineret på hele $X \times I$ vises på følgende måde. Lad $x' \in V_{x_1} \cap V_{x_2}$. Så er $s \mapsto {F'}_{x_1}|_{\{x'\}\times I}(x',s)$ og $s \mapsto {F'}_{x_2}|_{\{x'\}\times I}(x',s)$ begge løft af stien $s \mapsto F(x',s)$. De to stier starter også i samme punkt, idet vi har ${F'}_{x_1}|_{\{x'\}\times I}(x',0) = f'(x') = {F'}_{x_2}|_{\{x'\}\times I}(x',0)$. Entydigheden følger nu af entydigheden af løft af stier. Det er desuden klart at F' bliver kontinuert på $X \times I$, da den er kontinuert på de åbne mængder $V_x \times I$. Den er desuden et løft af F, da den er et løft på mængderne $V_x \times I$.
□

Korollar 3.20. *Lad $p : E \to B$ være en overlejring med $b_0 = p(e_0)$. Lad $F : I \times I \to B$ være kontinuert med $F(0,0) = b_0$. Så findes et (entydigt) løft af F til en kontinuert afbildning $F' : I \times I \to E$ med $F'(0,0) = e_0$. Hvis F er en kurvehomotopi er også F' en kurvehomotopi.*

Bevis : Eksistensen følger direkte af den foregående sætning. Vi kan nemlig sætte $f(s) = F(s,0)$ for $s \in I$ og bruge eksistens af løft af stier. Vi viser ikke entydigheden, da denne følger af den generelle sætning 3.24. Antag nu at F er en kurvehomotopi. Vi har så $F(0 \times I) = b_0$, så da F' er et løft af F har vi $F'(0 \times I) \in p^{-1}(b_0)$. Men da $0 \times I$ er sammenhængende og F' er kontinuert bliver $F'(0 \times I)$ sammenhængende. Fiberen $p^{-1}(b_0)$ er diskret, så $F'(0 \times I)$ bliver en et-punkts mængde. Fuldstændig tilsvarende bliver $F'(1 \times I)$ en et-punkts mængde, så F' bliver en kurvehomotopi. □

Sætning 3.21. *Lad $p : E \to B$ være en overlejring med $p(b_0) = e_0$. Lad σ og τ være stier i B fra b_0 til b_1, og lad σ' og τ' være deres respektive løft til stier i E startende i e_0. Hvis σ og τ er kurvehomotope, så ender σ' og τ' i samme punkt og de er kurvehomotope.*

Bevis : Lad $F : I \times I \to B$ være en kurvehomotopi mellem σ og τ. Så gælder $F(0,0) = b_0$. Lad $F' : I \times I \to E$ være et løft af F med $F'(0,0) = e_0$, jævnfør det foregående korollar. Af denne ses også at F' er en kurvehomotopi, så $F'(0 \times I) = \{e_0\}$. Tilsvarende er $F'(1 \times I)$ en et-punkts mængde, $\{e_1\}$. Restriktionen $F'|_{I\times 0}$ er et løft af stien $F|_{I\times 0}$. På grund af entydigheden af løft af stier, gælder $F'(s,0) = \sigma'(s)$. Tilsvarende ses $F'(s,1) = \tau'(s)$. Altså er F' en kurvehomotopi mellem σ' og τ'. Specielt bemærkes at $\sigma'(1) = \tau'(1) = e_1$. □

Bemærkning 3.22. Korollaret viser at løft af kurvehomotopiklasser er veldefineret og entydigt, så vi for en ækvivalensklasse $[\sigma]$ kan tale om dets løft til ækvivalensklassen $[\sigma'_e]$ startende i et punkt $e \in p^{-1}(\sigma(0))$.

Korollar 3.23. *Lad $p : E \to B$ være en overlejring med $p(e_0) = b_0$. Så er den inducerede homomorfi p_* en monomorfi, så $\pi_1(E, e_0)$ kan opfattes som en undergruppe $\pi_1(B, b_0)$.*

BEVIS : Antag $[\sigma] \in \ker(p_*)$, dvs $p_*([\sigma]) = [\epsilon_{b_0}]$. Men da løftet af $p_*([\sigma])$ startende i e_0 er $[\sigma]$, og da løftet af $[\epsilon_{b_0}]$ startende i e_0 er $[\epsilon_{e_0}]$ følger af entydigheden af løft af ækvivalensklasser at $[\sigma] = [\epsilon_{e_0}]$, dvs p_* er injektiv. Hermed bliver billedet $p_*(\pi_1(E, e_0))$ isomorft med $\pi_1(E, e_0)$. □

Sætning 3.24 (Generel eksistens og entydighed af løft)**.** *Lad $p : E \to B$ være en overlejring med $b_0 = p(e_0)$. Lad $f : X \to B$ være kontinuert med $f(x_0) = b_0$. Hvis X er kurvesammenhængende og lokalt kurvesammenhængende, så kan f løftes til en kontinuert afbildning $f' : X \to E$ med $f'(x_0) = e_0$ netop hvis*

$$f_*(\pi_1(X, x_0)) \subseteq p_*(\pi_1(E, e_0)). \tag{1}$$

Hvis f kan løftes, så er løftet entydigt bestemt, blot X er kurvesammenhængende.

BEVIS : Hvis løftet f' findes, så gælder

$$f_*(\pi_1(X, x_0)) = p_*(f'_*(\pi_1(X, x_0))) \subseteq p_*(\pi_1(E, e_0)).$$

Dette viser at vi kun kan finde et løft f', hvis (1) er opfyldt. Hvis løftet eksisterer er det også let at se at det er entydigt bestemt. Givet $x_1 \in X$ vælges en sti α fra x_0 til x_1. Løft så stien $f \circ \alpha$ i B til en sti $\gamma = (f \circ \alpha)'_{e_0}$ i E. Hvis løftet f' eksisterer, så må $f'(x_1)$ være endepunktet $\gamma(1)$ for γ, thi $f' \circ \alpha$ er et løft af stien $f \circ \alpha$ startende i e_0 og løft af stier er entydigt bestemt. Hermed er f' entydigt bestemt i alle punkter. Vi skal nu vise at hvis (1) er opfyldt så kan f løftes. Givet $x_1 \in X$ vælges en sti α fra x_0 til x_1. Løft så stien $f \circ \alpha$ i B til en sti $\gamma = (f \circ \alpha)'_{e_0}$ i E, og sæt så $f'(x_1) = \gamma(1)$. Vi viser først at dette er veldefineret. Antag altså at α og β er stier i X fra x_0 til x_1. Lad $\gamma = (f \circ \alpha)'_{e_0}$ og $\delta = (f \circ \beta)'_{e_0}$ være løftene af stierne $f \circ \alpha$ og $f \circ \beta$ i B til stier i E. Vi skal altså vise $\gamma(1) = \delta(1)$. Sæt $\varepsilon = (f \circ \beta^{-1})'_{\gamma(1)}$. Så er $\gamma\varepsilon$ defineret, og er et løft af løkken $(f \circ \alpha)(f \circ \beta^{-1})$ i B. Vi har $[(f \circ \alpha)(f \circ \beta^{-1})] = f_*([\alpha\beta^{-1}])$ som ifølge (1) ligger i $p_*(\pi_1(E, e_0))$. Vi kan altså finde en løkke ϕ i E startende i e_0, så $[(f \circ \alpha)(f \circ \beta^{-1})] = [p \circ \phi]$. Af sætning 3.21 fås nu at løftene af disse, dvs $\gamma\varepsilon$ og ϕ ender i samme punkt e_0. Altså ender ε i e_0, så ε er et løft af $f \circ \beta^{-1}$ startende i $\gamma(1)$ og sluttende i e_0. Men så er jo ε^{-1} et løft af $f \circ \beta$ startende i e_0 og sluttende i $\gamma(1)$. Men det er δ også, så da løft af stier er entydigt bestemt fås $\delta = \varepsilon^{-1}$, og dermed $\gamma(1) = \delta(1)$, som ønsket. Vi skal nu vise at f' er kontinuert. Givet en omegn V af $f'(x_1)$. Først findes en omegn U af $f(x_1)$, som er jævnt overlejret af p, og lad V_0 være det lag af $p^{-1}(U)$ som indeholder $f'(x_1)$. Vi kan antage $V_0 \subseteq V$ (idet vi ellers kan sætte $V_0' = V \cap V_0$ og $U' = p(V_0')$, og så erstatte U med U'. Hermed bliver V_0 erstattet med V_0'). Lad $p_0 = p|_{V_0}$, og vælg en kurvesammenhængende omegn W af x_1 så $f(W) \subseteq U$. Så gælder $f'(W) \subseteq V_0$, thi givet $x \in W$ kan vi vælge en sti β i W fra x_1 til x. Stien $f \circ \beta$ i U kan så løftes til en sti $\delta = p_0^{-1} \circ f \circ \beta$ startende i $f'(x_1)$. Så er $\gamma\delta$ defineret og er et løft af $f \circ (\alpha\beta)$ startende i e_0. Dermed fås er $f'(x) = (\gamma\delta)(1)$, som ligger i V_0, idet $f(x) \in U$. □

4. Undergrupper og Overlejringer

I dette afsnit studerer vi nærmere sammenhængen mellem undergrupper og overlejringer. Vi har allerede set i korollar 3.23 at fundamentalgruppen for overlejringsrummet svarer til en undergruppe af basisrummet. Vi viser desuden at der under passende forudsætninger kan etableres en entydig sammenhæng mellem undergrupper af fundamentalgruppen og ækvivalensklasser af overlejringer. Situationen bliver på mange måder analog til den der kendes fra Galoisteori.

Sætning 4.1. *Lad $p : E \to B$ være en overlejring og lad $b_0 \in B$. Afbildningen $(e, [\sigma]) \mapsto e \cdot [\sigma] = \sigma_e'(1)$ fra $p^{-1}(b_0) \times \pi_1(B, b_0)$ til $p^{-1}(b_0)$ er en (højre-)operation af fundamentalgruppen på fiberen. Stabilisatoren for et punkt e i fiberen er $p_*(\pi_1(E, e))$. Hvis E er kurvesammenhængende virker fundamentalgruppen transitivt på fiberen.*

Bevis : Det er klart at operationen er veldefineret, idet kurvehomotope kurver har samme endepunkt. Lad $e \in p^{-1}(b_0)$. Vi har $(\epsilon_{b_0})_e' = \epsilon_e$, så $e \cdot [\epsilon_{e_0}] = \epsilon_e(1) = e$. Lad $[\sigma], [\tau] \in \pi_1(B, b_0)$. Vi har $(\sigma\tau)_e' = \sigma_e \tau'_{\sigma_e'(1)}$ på grund af entydigheden af løft. Heraf fås $e \cdot [\sigma\tau] = (\sigma\tau)_e'(1) = \sigma_e \tau'_{\sigma_e'(1)}(1) = \tau'_{\sigma_e'(1)}(1) = (e \cdot [\sigma]) \cdot [\tau]$. Vi har $Stab(e) = \{[\sigma] \in \pi_1(B, b_0) | \sigma_e'(1) = e\} = p_*(\pi_1(E, e))$ da en løkke startende i b_0 løfter til en løkke startende i e netop hvis den er billedet af en løkke startende i e, på grund af entydigheden af løft. Lad E være kurvesammenhængende og lad $e_1, e_2 \in p^{-1}(b_0)$. Lad α være en sti fra e_1 til e_2. Så er $p \circ \alpha$ en løkke startende i b_0 og på grund af entydigheden af løft fås $(p \circ \alpha)_{e_1}' = \alpha$ så $e_1 \cdot [p \circ \alpha] = (p \circ \alpha)_{e_1}'(1) = \alpha(1) = e_2$. □

Korollar 4.2. *Gruppeoperationen inducerer en homomorfi af fundamentalgruppen på en transitiv undergruppe af permutationsgruppen på fiberen. Denne kaldes den karakteristiske homomorfi.*

Bevis : Definer $\chi : \pi_1(B, b_0) \to \mathcal{S}(p^{-1}(b_0))$ ved $\chi([\sigma])(e) = e \cdot [\sigma]^{-1}$. Vi har direkte $\chi([\sigma][\tau])(e) = e \cdot ([\sigma][\tau])^{-1} = (e \cdot [\tau]^{-1}) \cdot [\sigma]^{-1} = \chi([\sigma])(\chi([\tau])(e))$. Dette viser at $\chi([\sigma]^{-1})$ er en invers til $\chi([\sigma])$, der derfor er en bijektion på fiberen. Desuden ses at χ er en homomorfi. Billedet bliver en transitivt, da fundamentalgruppen virker transitivt på fiberen. □

Korollar 4.3. *Når E er kurvesammenhængende inducerer gruppeoperationen en bijektion mellem fiberen $p^{-1}(b_0)$ og mængden $\pi_1(B, b_0)/p_*(\pi_1(E, e_0))$ af sideklasser til $p_*(\pi_1(E, e_0))$.*

BEVIS : Da E er kurvesammenhængende er operationen transitiv. Ifølge en sætning kendt fra algebraen, er der så en bijektion mellem mængden gruppen opererer på og mængden af sideklasser til stabilisatoren for et vilkårligt punkt (se evt. sætning (7.28) i Olsson [9]). $\square$

Bemærkning 4.4. Man kan af af korollar 4.3 let udlede at alle fibre har samme kardinalitet når E er kurvesammenhængende (benyt at p_* er injektiv). Dette gælder dog også hvis E blot er sammenhængende, jvf. sætning 3.7.

Sætning 4.5. *Lad G være en topologisk gruppe og H en diskret normal undergruppe i G. Så er den kanoniske afbildning $p : G \to G/H$ en overlejring.*

BEVIS : Surjektiviteten og kontinuiteten er klar. Det er også en åben afbildning, idet vi for en åben mængde U har $p^{-1}(p(U)) = HU = \bigcup_{h\in H} hU$, som er åben grundet kontinuiteten af gruppeoperationerne. Da H er diskret, kan vi finde en åben omegn V af e, så $V \cap H = \{e\}$. Vælg dernæst en åben omegn U af $\{e\}$, så $U^{-1}U \subseteq V$. Lad $\hat{g} \in G/H$ være vilkårlig. Da p er åben er $\widehat{gU}$ en åben omegn af $\hat{g}$. Vi har $p^{-1}(\hat{gU}) = gUH = \bigcup_{h\in H} gUh$. Mængderne gUh er klart åbne, og de er disjunkte da vi for $guh = gu'h'$ får $u'^{-1}u = h'h^{-1}$, som ligger i både V og H. Altså gælder $u = u'$ og $h = h'$. Endelig er $p|_{gUh} : gUh \to \widehat{gU}$ en homeomorfi. Da $p|_{gUh}^{-1}(\{\widehat{gu}\}) = p^{-1}(\widehat{gu}) \cap gUh = \{guh\}$ er en et-punkts mængde, er $p|_{gUh}$ bijektiv. Da p er åben og kontinuert, bliver $p|_{gUh}$ en homeomorfi, så den åbne omegn $\widehat{gU}$ er jævnt overlejret af p. $\square$

Sætning 4.6. *Lad G være en enkeltsammenhængende topologisk gruppe og H en diskret normal undergruppe i G. Så gælder $\pi_1(G/H) \simeq H$.*

BEVIS : Lad $p : G \to G/H$ være den kanoniske afbildning, og lad $e \in G$ være det neutrale element. Af den foregående sætning ses at p er en overlejring, og af korollar 4.3 ser vi at der er en bijektion mellem fundamentalgruppen $\pi_1(G/H)$ og fiberen $p^{-1}(e) = H$, idet $p_*(\pi_1(G)) = \{0\}$. Denne afbildning er givet ved $\varphi([\sigma]) = \sigma'_e(1)$. Vi skal nu blot vise at φ er en homomorfi. Lad altså $[\sigma], [\tau] \in \pi_1(G/H)$. Definer stien ρ i G ved

$$\rho(s) = \begin{cases} \sigma'_e(2s) & \text{for } s \in [0; \frac{1}{2}] \\ \sigma'_e(1) * \tau'_e(2s-1) & \text{for } s \in [\frac{1}{2}; 1] \end{cases}$$

Så er $[\rho]$ et løft af $[\sigma] * [\tau]$ startende i e, idet vi har

$$p(\rho(s)) = \begin{cases} p(\sigma'_e(2s)) & \text{for } s \in [0; \frac{1}{2}] \\ p(\sigma'_e(1) * \tau'_e(2s-1)) & \text{for } s \in [\frac{1}{2}; 1] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sigma(2s)) & \text{for } s \in [0; \frac{1}{2}] \\ p(\sigma'_e(1)) * \tau(2s-1) & \text{for } s \in [\frac{1}{2}; 1] \end{cases} = \sigma\tau$$

idet $\sigma_e'(1) \in H$. På grund af entydighed af løft af ækvivalensklasser gælder så

$$\varphi([\sigma] * [\tau]) = \rho(1) = \sigma_e'(1) * \tau_e'(1) = \varphi([\sigma]) * \varphi([\tau])$$

□

Korollar 4.7. *$\pi_1(S^1) \simeq (\mathbb{Z}, +)$ og $\pi_1(\underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n\ gange}) \simeq (\mathbb{Z}^n, +)$.*

Bevis : Første del af korollaret følger umiddelbart af den foregående sætning idet $\mathbb{Z}$ er en normal diskret undergruppe af den enkeltsammenhængende topologiske gruppe $\mathbb{R}$ og faktorgruppen $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ er iso- og homeomorf med S^1. Den anden del af korollaret følger af det første og sætning 2.17, eller direkte af den foregående sætning idet $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ er iso- og homeomorf med $\underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n\ gange}$. □

Bemærkning 4.8. Kugleskallerne S^n i højere dimensioner ($n \geq 2$) er enkeltsammenhængende. Dette er 'geometrisk klart' — for et formelt bevis se Munkres [8, side 348–350].

Sætning 4.9. *Lad $p : E \to B$ være en overlejring, hvor E er kurvesammenhængende og lad $b_0 \in B$. Når e gennemløber fiberen over b_0 gennemløber $p_*(\pi_1(E, e))$ en konjugationsklasse af undergrupper af $\pi_1(B, b_0)$.*

Bevis : Givet punkter $e_0, e_1 \in p^{-1}(b_0)$ sættes $H_0 = p_*(\pi_1(E, e_0)), H_1 = p_*(\pi_1(E, e_1))$. Lad γ være en sti i E fra e_0 til e_1, og sæt $\alpha = p \circ \gamma$. Vi viser så at $[\alpha] * H_1 * [\alpha]^{-1} = H_0$. Lad $[\sigma] \in H_1$, så er $[\sigma] = p_*([\tilde{\sigma}])$ hvor $[\tilde{\sigma}] \in \pi_1(E, e_1)$. Sæt nu $\tilde{\tau} = \gamma\tilde{\sigma}\gamma^{-1}$, som er en løkke startende i e_0, og der gælder $p_*([\tilde{\tau}]) = [\alpha\sigma\alpha^{-1}]$. Dette betyder altså at $[\alpha] * H_1 * [\alpha]^{-1} \subseteq H_0$. Ved at kigge på stien γ^{-1} fra e_1 til e_0 fås $\alpha^{-1} = p \circ \gamma^{-1}$, og heraf sluttes ligesom før at $[\alpha^{-1}] * H_0 * [\alpha] \subseteq H_1$. Heraf fås det ønskede. Vi har nu vist at alle grupperne $p_*(\pi_1(E, e))$ er konjugerede. Vi mangler nu at vise at vi får hele konjugationsklassen frem. Lad altså $e_0 \in p^{-1}(b_0)$ og H være en undergruppe af $\pi_1(B, b_0)$ konjugeret med H_0. Vi kan altså finde en løkke α så $H_0 = [\alpha] * H * [\alpha]^{-1}$. Lad $\tilde{\alpha}$ være løftet af α til en sti i E startende i e_0, og sæt $e_1 = \tilde{\alpha}(1)$, og sæt $H_1 = p_*(\pi_1(E, e_1))$. Af det foregående fås så at $H_0 = [\alpha] * H_1 * [\alpha]^{-1}$. Sammenholdes dette med det foregående fås altså $H = H_1 = p_*(\pi_1(E, e_1))$, så hele konjugationsklassen opnås. □

Definition 4.10. To overlejringer $p : E \to B$ og $p' : E' \to B$ siges at være ækvivalente hvis der findes en homeomorfi $\varphi : E \to E'$ så $p = p' \circ \varphi$. Vi kalder φ en overlejringsækvivalens. Det ses let at dette er en ækvivalensrelation mellem overlejringer.

Lemma 4.11. *Lad B være lokalt kurvesammenhængende. Hvis $p : E \to B$ og $p' : E' \to B$ er to kurvesammenhængende overlejringer med $p(e_0) = p'(e_0') = b_0$ og $p_*(\pi_1(E, e_0)) = p'_*(\pi_1(E', e_0'))$, så findes en overlejringsækvivalens $\varphi : E \to E'$ med $\varphi(e_0) = e_0'$.*

BEVIS : Betragt diagrammet

$$\begin{tikzcd} & E' \arrow[d, "p'"] \\ E \arrow[r, "p"] & B \end{tikzcd}$$

Da rummet E er kurvesammenhængende og lokalt kurvesammenhængende (da B er det) og $p_*(\pi_1(E, e_0)) \subseteq p'_*(\pi_1(E', e'_0))$ (de er endda ens), så af den generelle sætning om løft fås at p kan løftes til en afbildning $\varphi : E \to E'$, så $\varphi(e_0) = e'_0$. Tilsvarende ses at vi kan løfte p' til en afbildning $\psi : E' \to E$ med $\psi(e'_0) = e_0$. For at vise at φ og ψ er hinandens inverse betragtes diagrammet

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ E \arrow[r, "p"] & B \end{tikzcd}$$

Da gælder $p \circ (\psi \circ \varphi) = p' \circ \varphi = p$, så $\psi \circ \varphi$ er et løft af p med $(\psi \circ \varphi)(e_0) = e_0$. Idet id_E også er et sådant løft fås $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_E$. Tilsvarende fås $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{E'}$. □

Sætning 4.12. *Lad B være lokalt kurvesammenhængende. To kurvesammenhængende overlejringer $p : E \to B$ og $p' : E' \to B$ med $p(e_0) = p'(e'_0) = b_0$ er ækvivalente netop hvis undergrupperne $p_*(\pi_1(E, e_0))$ og $p'_*(\pi_1(E', e'_0))$ er konjugerede.*

BEVIS : Antag først at de to overlejringer er ækvivalente. Lad $\varphi : E' \to E$ være en homeomorfi så $p \circ \varphi = p'$ og sæt $e_1 = \varphi(e'_0)$. Da φ er en homeomorfi fås $\varphi_*(\pi_1(E', e'_0)) = \pi_1(E, e_1)$. Anvendes p_* på begge sider fås $p'_*(\pi_1(E', e'_0)) = p_*(\pi_1(E, e_1))$, og da $e_1 \in p^{-1}(b_0)$ er $p_*(\pi_1(E, e_1))$ konjugeret med $p_*(\pi_1(E, e_0))$ ifølge sætning 4.9. Antag nu omvendt at de to undergrupper er konjugerede. Af sætning 4.9 ses at vi kan antage at de to undergrupper faktisk er ens, idet vi kan vælge et andet basispunkt for E'. Antag altså at $p_*(\pi_1(E, e_0)) = p'_*(\pi_1(E', e'_0))$. Påstanden følger nu af lemmaet. □

Eksempel 4.13. Vi har tidligere vist at $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$. Da denne er abelsk er to overlejringer ækvivalente netop hvis de svarer til samme undergruppe. Undergrupperne af $\mathbb{Z}$ er $n\mathbb{Z}$ hvor $n \in \mathbb{N}_0$. De kurvesammenhængende overlejringer af S^1 bliver derfor ækvivalente med enten $p : \mathbb{R} \to S^1$ givet ved $p(x) = e^{2\pi ix}$ eller med $p_n : S^1 \to S^1$ givet ved $p_n(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$, jvf eksemplerne 3.12 og 3.14.

Definition 4.14. Lad G være en gruppe, der virker fra højre på en mængde M. En bijektiv afbildning $\varphi : M \to M$ siges at være en G-automorfi hvis $\varphi(m \cdot g) = \varphi(m) \cdot g$. Mængden af G-automorfier kaldes $\mathrm{Aut}(M)$. Det er klart $\mathrm{Aut}(M)$ bliver en gruppe ved sammensætning af afbildninger.

Lemma 4.15. *Lad G være en gruppe, der virker transitivt på mængden M, og lad $m_0 \in M$. Så gælder $\mathrm{Aut}(M) \simeq N(G_{m_0})/G_{m_0}$, hvor G_{m_0} er stabilisatoren for m_0, og N betegner normalisatoren.*

Bevis : Lad $\varphi \in \mathrm{Aut}(M)$. Da G virker transitivt på M findes et $g \in G$ så $\varphi(m_0) = m_0 \cdot g$. Vi definerer så $\Psi : \mathrm{Aut}(M) \to N(G_{m_0})/G_{m_0}$ ved $\Psi(\varphi) = gG_{m_0}$. Vi har $g \in N(G_{m_0})$ idet vi for $h \in G_{m_0}$ har $ghg^{-1} \in G_{m_0}$ idet

$$m_0 \cdot (ghg^{-1}) = \varphi(m_0) \cdot (hg^{-1}) = \varphi(m_0 \cdot h) \cdot g^{-1} = \varphi(m_0) \cdot g^{-1} = m_0 \cdot (gg^{-1}) = m_0.$$

Ψ er veldefineret idet vi for $\varphi(m_0) = m_0 \cdot g = m_0 \cdot g'$ har vi $m_0 = m_0 \cdot (g'g^{-1})$, så $g'g^{-1} \in G_{m_0}$ og dermed $G_{m_0}g = G_{m_0}g'$. Da $g, g' \in N(G_{m_0})$ fås heraf $gG_{m_0} = g'G_{m_0}$. Ψ er en homomorfi, idet vi for $\chi \in \mathrm{Aut}(M)$ med $\chi(m_0) = m_0 \cdot g'$ har $\phi\chi(m_0) = \varphi(m_0 \cdot g') = \varphi(m_0) \cdot g' = m_0 \cdot (gg')$, så $\Psi(\varphi\chi) = \widehat{gg'} = \Psi(\varphi)\Psi(\chi)$. Antag $\Psi(\varphi) = \hat{e}$, så $\varphi(m_0) = m_0 \cdot e = m_0$. Lad $m \in M$ være vilkårlig, så findes $h \in G$ så $m = m_0 \cdot h$, da G virker transitivt på M. Nu fås $\varphi(m) = \varphi(m_0 \cdot h) = \varphi(m_0) \cdot h = m_0 \cdot h = m$, så $\varphi = \mathrm{id}_M$, dvs Ψ er injektiv. Lad $g \in N(G_{m_0})$. For $m \in M$ findes $h \in G$ så $m = m_0 \cdot h$. Vi sætter så $\varphi(m) = m_0 \cdot (gh)$. Dette er veldefineret idet vi for $h, h' \in G$ med $m = m_0 \cdot h = m_0 \cdot h'$ har $h'h^{-1} \in G_{m_0}$ og dermed $gh'h^{-1}g^{-1} \in G_{m_0}$, hvilket betyder at $m_0 \cdot (gh) = m_0 \cdot (gh')$. Det er en G-automorfi, idet vi for et $f \in G$ har $m \cdot f = m_0 \cdot (hf)$ og dermed $\varphi(m \cdot f) = m_0 \cdot (ghf) = (m_0 \cdot (gh)) \cdot f = \varphi(m) \cdot f$. Endelig gælder $m_0 = m_0 \cdot e$, så $\varphi(m_0) = m_0 \cdot (ge) = m_0 \cdot g$, så $\Psi(\varphi) = \hat{g}$. Dermed er Ψ surjektiv. □

Definition 4.16. En overlejringstransformation for en overlejring $p : E \to B$ er en overlejringsækvivalens fra E til sig selv. Ved sammensætning ses mængden af overlejringstransformationer at blive en gruppe, $\mathcal{G}(E/B)$.

Lemma 4.17. *Lad $p : (E, e_0) \to (B, b_0)$ være en kurvesammenhængende overlejring, hvor B er lokalt kurvesammenhængende. Så gælder $\mathcal{G}(E/B) \simeq \mathrm{Aut}(p^{-1}(b_0))$.*

Bevis : For $\varphi \in \mathcal{G}(E/B)$ er $\varphi|_{p^{-1}(b_0)}$ en bijektion af fiberen $p^{-1}(b_0)$, idet $\mathcal{G}(E/B)$ er en gruppe. Restriktionen $\varphi|_{p^{-1}(b_0)}$ ligger i $\mathrm{Aut}(p^{-1}(b_0)$. For $[\sigma] \in \pi_1(B, b_0)$ og $e \in p^{-1}(b_0)$ er både $\sigma'_{\varphi(e)}$ og $\varphi \circ \sigma'_e$ løft af σ startende i $\varphi(e)$. På grund af entydigheden af løft af stier fås så specielt endepunkterne stemmer overens, og dermed at $\varphi(e \cdot [\sigma]) = \varphi(e) \cdot [\sigma]$. Det er klart at afbildningen $\varphi \mapsto \varphi|_{p^{-1}(b_0)}$ er en homomorfi. Antag nu at φ er identiteten på fiberen $p^{-1}(b_0)$, specielt gælder $\varphi(e_0) = e_0$. Men da er både φ og id_E løft at $p : E \to B$ til E, så af entydighed af løft fås $\varphi = \mathrm{id}_E$, dvs afbildningen er injektiv. Lad $\varphi \in \mathrm{Aut}(p^{-1}(b_0))$. På grund af definitionen af Aut ses nu at $e_0 \cdot [\sigma] = e_0$ netop hvis $\varphi(e_0) \cdot [\sigma] = \varphi(e_0)$ så e_0 og $\varphi(e_0)$ har samme stabilisator. Dette betyder altså at $p_*(\pi_1(E, e_0)) = p_*(\pi_1(E, \varphi(e_0)))$. Ifølge lemma 4.11 findes så $\tilde{\varphi} \in \mathcal{G}(E/B)$ med $\tilde{\varphi}(e_0) = \varphi(e_0)$. For $e \in p^{-1}(b_0)$

findes $[\sigma] \in \pi_1(B, b_0)$, så $e = e_0 \cdot [\sigma]$. Så gælder

$$\tilde{\varphi}(e) = \tilde{\varphi}(e_0 \cdot [\sigma]) = \tilde{\varphi}(e_0) \cdot [\sigma] = \varphi(e_0) \cdot [\sigma] = \varphi(e_0 \cdot [\sigma]) = \varphi(e)$$

idet vi ved den anden omskrivning har brugt den første del af beviset. Vi har altså $\tilde{\varphi}|_{p^{-1}(b_0)} = \varphi$, dvs afbildningen er surjektiv. □

Sætning 4.18. *Lad $p : (E, e_0) \to (B, b_0)$ være en kurvesammenhængende overlejring, hvor B er lokalt kurvesammenhængende. Så gælder*

$$\mathcal{G}(E/B) \simeq N(p_*(\pi_1(E, e_0)))/p_*(\pi_1(E, e_0)).$$

Bevis : Ifølge sætning 4.1 virker $\pi_1(B, b_0)$ transitivt på fiberen $p^{-1}(b_0)$, og stabilisatoren for e_0 er $p_*(\pi_1(E, e_0)$. Sætningen følger nu direkte af lemmaerne 4.15 og 4.17. □

Bemærkning 4.19. Hvis $p : E \to B$ er en overlejring, hvor E er enkeltsammenhængende, så kaldes overlejringen universel.

Bemærkning 4.20. For et lokalt kurvesammenhængende rum er alle universelle overlejringer ækvivalente. Lad nemlig $p : E \to B$ og $p' : E' \to B$ være universelle overlejringer og lad $e \in E$ og $e' \in E'$. Da E er enkeltsammenhængende fås $p_*(\pi_1(E, e)) = p_*(\{0\}) = \{0\}$. Tilsvarende fås $p_*(\pi_1(E', e')) = \{0\}$, så $p_*(\pi_1(E, e)) = p_*(\pi_1(E', e'))$. Påstanden fås nu af sætning 4.12.

Lemma 4.21. *Lad U være en åben sammenhængende mængde, jævnt overlejret af en kontinuert afbildning $p : E \to B$. Så er sammenhængskomponenterne af $p^{-1}(U)$ åbne og afbildes homeomorft på U.*

Bevis : Skriv $p^{-1}(U) = \bigcup V_\alpha$, hvor mængderne V_α er åbne disjunkte og homeomorfe med U. Da U er sammenhængende er også mængderne V_α sammenhængende, så da de er disjunkte er de netop sammenhængskomponenterne af $p^{-1}(U)$. □

Sætning 4.22. *Lad $p_1 : E_1 \to B$ og $p_2 : E_2 \to B$ være overlejringer, hvor E_2 er kurvesammenhængende, og B er lokalt sammenhængende. Hvis $\varphi : E_1 \to E_2$ er kontinuert og $p_1 = p_2 \circ \varphi$, så er φ en overlejring.*

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[dd, "p_1"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ & E_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ B & \end{tikzcd}$$

Bevis : Vi viser først at φ er surjektiv. Vælg et basispunkt e_1 for E_1 og sæt $e_2 = \varphi(e_1)$ og $b_0 = p_1(e_1)(= p_2(e_2))$. Lad $y \in E_2$. Vælg en sti α i E_2 fra e_2 til y. Sæt $\beta = (p_2 \circ \alpha)'_{e_1}$. Der gælder $p_2 \circ (\varphi \circ \beta) = p_1 \circ \beta = p_2 \circ \alpha$, så $\varphi \circ \beta$ er et løft af $p_2 \circ \alpha$ startende i e_2. Men det er α også, så af entydigheden af løft af stier fås $\varphi \circ \beta = \alpha$. Med $x = \beta(1)$ gælder altså $\varphi(x) = \alpha(1) = y$. Vi viser nu at ethvert punkt $y \in E_2$ har en åben omegn U, der er jævnt overlejret af φ. Vælg omegne U_1 og U_2 af $p_2(y)$, så U_1 er jævnt overlejret af p_1 og U_2 er jævnt overlejret af p_2. Vælg U sammenhængende, så $U \subseteq U_1 \cap U_2$. Så er U jævnt overlejret af både p_1 og p_2. Lad V være den sammenhængskomponent af $p_2^{-1}(U)$, som indeholder y. En sammenhængskomponent af $\varphi^{-1}(V)$ ligger i en sammenhængskomponent for ${p_1}^{-1}(U)$, da $\varphi^{-1}(V) \subseteq {p_1}^{-1}(U)$. Omvendt er hver sammenhængskomponent af ${p_1}^{-1}(U)$ homeomorf med U og dermed med V pga. lemmaet anvendt to gange. Altså er sammenhængskomponenterne af $\varphi^{-1}(V)$ homeomorfe med en delmængde af V, men da φ er surjektiv fås at de faktisk er homeomorfe med V. Dermed er V altså jævnt overlejret af φ. □

Korollar 4.23. *Lad $p : E \to B$ være en universel overlejring og $p' : E' \to B$ være en kurvesammenhængende overlejring, hvor B er et lokalt kurvesammenhængende rum med $p(e_0) = p'(e_0') = b_0$. Så findes en overlejring $q : E \to E'$ så $p = p' \circ q$.*

Bevis : Da E er enkeltsammenhængende gælder $p_*(\pi_1(E, e_0)) = \{0\} \subseteq p'_*(\pi_1(E', e_0'))$ så af den generelle sætning om løft ser vi at vi kan løfte p til en kontinuert afbildning $q : E \to E'$ så $q(e_0) = e_0'$. Af den foregående sætning fås nu at q er en overlejring. □

Lemma 4.24. *Lad $p : E \to B$ være en overlejring, hvor B er lokalt sammenhængende og lad $A \subseteq B$ være en sammenhængende åben mængde. Hvis C er en sammenhængskomponent af $p^{-1}(A)$, så er $p|_C : C \to A$ en overlejring.*

Bevis : Lad $a \in A$, og lad U være en sammenhængende åben omegn af a, jævnt overlejret af p med $U \subseteq A$. Vi viser at U er jævnt overlejret af $p|_C$. Ifølge lemma 4.21 afbildes sammenhængskomponenterne V_α af $p^{-1}(U)$ homeomorft på U. Vi har direkte $(p|_C)^{-1}(U) = C \cap p^{-1}(U) = \bigcup_\alpha (C \cap V_\alpha)$. Mængderne $C \cap V_\alpha$ er enten tomme eller også er V_α helt indeholdt i C. Vi ved nemlig at V_α er en sammenhængende delmængde af $p^{-1}(U)$, og dermed af den større mængde $p^{-1}(A)$. Idet C er en sammenhængskomponent af $p^{-1}(A)$, fås det påståede. Mængderne $C \cap V_\alpha$ er åbne og disjunkte, og af det netop viste ses at hvis $C \cap V_\alpha \neq \emptyset$, så er $C \cap V_\alpha = V_\alpha$ homeomorf med U. Vi mangler nu kun at vise at $(p|_C)^{-1}(U) \neq \emptyset$, thi så er de ikke tomme af mængderne $C \cap V_\alpha$ en lagdeling af $(p|_C)^{-1}(U)$. Vi bemærker at der for vilkårlige åbne sammenhængende mængder $W \subseteq A$, hvor W er jævnt overlejret af p gælder at W er jævnt overlejret at $p|_C$, hvis $(p|_C)^{-1}(W) \neq \emptyset$. Vi viser at $p(C) = A$, idet dette viser at $(p|_C)^{-1}(U) \neq \emptyset$. Da p er en overlejring er E lokalt sammenhængende. Da $p^{-1}(A)$ desuden er åben og C er en sammenhængskomponent af denne ses at C er åben. Lad nemlig $x \in C$, så findes en sammenhængende åben omegn D af x så $D \subseteq p^{-1}(A)$. Da D er sammenhængende må D ligge i en sammenhængskomponent af $p^{-1}(A)$, så da $D \cap C$ indeholder x, må denne sammenhængskomponent være C. Dermed er C åben. Heraf ses at $p(C)$ er åben og dermed specielt åben i

A, da p er åben. Desuden er $p(C)$ afsluttet. Lad nemlig $x \in \overline{p(C)}^A$, og lad $W \subseteq A$ være en sammenhængende åben omegn af x, jævnt overlejret af p. Vi har så $p(C) \cap D \neq \emptyset$, dvs $(p|_C)^{-1}(D) \neq \emptyset$. Altså fås at den ovenstående bemærkning at D er jævnt overlejret af $p|_C$. Specielt fås $x \in D \subseteq p(C)$, så $p(C)$ er afsluttet. Dermed fås samlet $p(C) = A$, da A er sammenhængende. □

Sætning 4.25. *Lad $p_1 : E_1 \to B$ og $p_2 : E_1 \to E_2$ være overlejringer, hvor B er lokalt sammenhængende. Hvis $\varphi : E_2 \to B$ er kontinuert og $p_1 = \varphi \circ p_2$, så er φ en overlejring.*

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[dd, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
& E_2 \arrow[dl, "\varphi"] \\
B &
\end{tikzcd}$$

Bevis : Lad $b \in B$, og lad U være en sammenhængende åben omegn af b, jævnt overlejret af p_1. Ifølge lemma 4.21 afbildes sammenhængskomponenterne U_α af ${p_1}^{-1}(U)$ homeomorft på U. Vi bemærker at φ er surjektiv, da $p_1 = \varphi \circ p_2$ er det. Lad V være en sammenhængskomponent af $\varphi^{-1}(U)$, og lad W være en sammenhængskomponent af ${p_2}^{-1}(V)$. Da W er sammenhængende og $W \subseteq {p_1}^{-1}(U)$ (da diagrammet kommuterer) findes altså en U_α, så $W \subseteq U_\alpha$. Vi har E_2 lokalt sammenhængede, da p_1 og p_2 er lokale homeomorfier, så da V er en sammenhængskomponent af den åbne mængde $\varphi^{-1}(U)$, fås (som i beviset for lemmaet) at V er åben. Af lemmaet ovenfor ses at $p_2|_W : W \to V$ er en overlejring, specielt gælder $V = p_2(W) \subseteq p_2(U_\alpha)$. Heraf ses da $p_2(U_\alpha)$ er en sammenhængende delmængde af $\varphi^{-1}(U)$ (da diagrammet kommuterer) og V er en sammenhængskomponent af $\varphi^{-1}(U)$ fås $V = p_2(U_\alpha)$. Da $\varphi \circ p_2|_{U_\alpha} = p_1|_{U_\alpha}$ ses at $p_2|_{U_\alpha}$ er injektiv. Afbildningen $p_2|_{U_\alpha}$ er også kontinuert og åben, så $p_2|_{U_\alpha} : U_\alpha \to V$ er en homeomorfi. Dermed bliver også $\varphi|_V = p_1|_{U_\alpha} \circ (p_2|_{U_\alpha})^{-1}$ en homeomorfi. Dermed udgør sammenhængskomponenterne af $\varphi^{-1}(U)$ en lagdeling af $\varphi^{-1}(U)$. □

Korollar 4.26. *Lad $p : X \to Y$ og $q : Y \to Z$ være overlejringer. Hvis X er kurvesammenhængende og Z er lokalt kurvesammenhængende og har et universelt overlejringsrum, da er $q \circ p : X \to Z$ en overlejring.*

Bevis : Lad $r_Z : \tilde{Z} \to Z$ være en universel overlejring af Z. Da $\tilde{Z}$ er enkeltsammenhængende kan vi løfte r_Z til en afbildning, $r_Y : \tilde{Z} \to Y$, som bliver en overlejring ifølge sætning 4.22. Vi kan så løfte denne til en afbildning $r_X : \tilde{Z} \to X$, som ligesom før bliver en overlejring ifølge sætning 4.22. Af den foregående sætning ses nu at $q \circ p : X \to Z$ er en overlejring.

$$\begin{tikzcd} & & \tilde{Z} \arrow[dll, "r_X"'] \arrow[dl, "r_Y"] \arrow[d, "r_Z"] \\ X \arrow[r, "p"'] & Y \arrow[r, "q"'] & Z \end{tikzcd}$$

□

Definition 4.27. Et rum B siges at være semilokalt enkeltsammenhængende, hvis der for alle $b \in B$ findes en åben omegn U af b, så den af inklusionen $U \hookrightarrow B$ inducerede homomorfi fra $\pi_1(U, b)$ til $\pi_1(B, b)$ er triviel. Dette vil altså sige at enhver løkke i U startende i b betragtet som løkke i B er kurvehomotop til ϵ_b.

Sætning 4.28. *Lad B være et rum, som har et universelt overlejringsrum $p : E \to B$. Så er B semilokalt enkeltsammenhængende.*

Bevis : Lad $b \in B$ og vælg en jævnt overlejret åben omegn U af b. Lad $e \in p^{-1}(b)$ og lad V_α være en lagdeling af $p^{-1}(U)$. Lad V være det lag som indeholder e. Betragt diagrammet

$$\begin{tikzcd} \pi_1(V, e) \arrow[r, "(i_{V,E})_*"] \arrow[d, "(p|_V)_*"', "\simeq"] & \pi_1(E, e) \arrow[d, "p_*"] \\ \pi_1(U, b) \arrow[r, "(i_{U,B})_*"'] & \pi_1(B, b) \end{tikzcd}$$

hvor $i_{V,E}$ og $i_{U,B}$ er inklusionerne. Da $\pi_1(E, e) = \{0\}$ og $(p|_V)_*$ er en isomorfi da U og V er homeomorfe, fås at $(i_{U,B})_*$ er triviel idet diagrammet kommuterer. □

Sætning 4.29 (Eksistens af overlejringer)**.** *Lad (B, b_0) være et kurvesammenhængende, lokalt kurvesammenhængende og semilokalt enkeltsammenhængende rum. Hvis G er en undergruppe af $\pi_1(B, b_0)$, så findes en kurvesammenhængende overlejring $p : (E, e_0) \to (B, b_0)$, så $p_*(\pi_1(E, e_0)) = G$.*

Bevis : Lad $\mathcal{P}$ være mængden af stier startende i b_0. Definer en ækvivalensrelation $\sim$ i $\mathcal{P}$ ved $\sigma \sim \tau$ netop hvis $\sigma(1) = \tau(1)$ og $[\sigma\tau^{-1}] \in G$. Dette er klart en ækvivalensrelation, da G er en gruppe. Lad E være mængden af ækvivalensklasser, ækvivalensklassen for en sti σ betegnes $\langle\sigma\rangle$. Sæt $e_0 = \langle\epsilon_{b_0}\rangle$. Definer $p : E \to B$ ved $p(\langle\sigma\rangle) = \sigma(1)$, hvilket klart er veldefineret. Så gælder $p(e_0) = b_0$. Vi noterer til senere brug, at der gælder $\langle\sigma\rangle = \langle\tau\rangle$ hvis σ og τ er kurvehomotope, da $[\sigma\tau^{-1}] = [\tau\tau^{-1}] = [\epsilon_{b_0}]$. Desuden bemærker vi at der for stier σ, τ med $\langle\sigma\rangle = \langle\tau\rangle$ gælder $\langle\sigma\delta\rangle = \langle\tau\delta\rangle$, for enhver sti δ startende i $\sigma(1)$. Vi har nemlig $[\sigma\delta(\tau\delta)^{-1}] = [\sigma\delta\delta^{-1}\tau^{-1}] = [\sigma\tau^{-1}] \in G$.

Lad $\sigma \in \mathcal{P}$, og lad U være en kurvesammenhængende åben omegn af $\sigma(1)$. Definer $\mathfrak{B}(U, \sigma)$ til at være mængden af ækvivalensklasser af formen $\langle\sigma\delta\rangle$, hvor δ er en sti i U startende i $\sigma(1)$. Bemærk først at der for $\langle\sigma\rangle \in \mathfrak{B}(U,\tau)$ gælder $\mathfrak{B}(U,\sigma) = \mathfrak{B}(U,\tau)$. Vi har $\langle\sigma\rangle = \langle\tau\delta\rangle$, hvor δ er en sti i U. For $\langle\sigma\alpha\rangle \in \mathfrak{B}(U,\sigma)$ gælder ifølge de indledende bemærkninger $\langle\sigma\alpha\rangle = \langle\tau\delta\alpha\rangle \in \mathfrak{B}(U,\tau)$, da $\delta\alpha$ er en sti i U. Dermed gælder $\mathfrak{B}(U,\sigma) \subseteq \mathfrak{B}(U,\tau)$. Omvendt gælder ifølge de indledende bemærkninger at $\langle\tau\rangle = \langle\tau\delta\delta^{-1}\rangle = \langle\sigma\delta^{-1}\rangle \in \mathfrak{B}(U,\sigma)$, så $\mathfrak{B}(U,\tau) \subseteq \mathfrak{B}(U,\sigma)$. Vi viser at mængderne $\mathfrak{B}(U,\sigma)$ udgør basis for en topologi på E. Vi har oplagt $\langle\sigma\rangle \in \mathfrak{B}(B,\sigma)$ idet $\langle\sigma\rangle = \langle\sigma\epsilon_{\sigma(1)}\rangle$. Antag nu $\langle\rho\rangle \in \mathfrak{B}(U,\sigma) \cap \mathfrak{B}(V,\tau)$. Vælg en kurvesammenhængende åben omegn W af $\rho(1)$, så $W \subseteq U \cap V$. Dermed ses af påstanden ovenfor at $\mathfrak{B}(W,\rho) \subseteq \mathfrak{B}(U,\rho) \cap \mathfrak{B}(V,\rho) = \mathfrak{B}(U,\sigma) \cap \mathfrak{B}(V,\tau)$. Desuden gælder at mængderne $\mathfrak{B}(U,\sigma)$ bliver en omegnsbasis for $\langle\sigma\rangle$. En vilkårlig åben omegn af $\langle\sigma\rangle$ vil indeholde en basismængde af formen $\mathfrak{B}(U,\tau)$. Men denne er jo lig $\mathfrak{B}(U,\sigma)$.

Vi viser nu at p er en overlejring. Det er let at se at p er kontinuert. Lad nemlig $\langle\sigma\rangle \in E$, og lad U være en åben omegn af $\sigma(1)$. Da B er lokalt kurvesammenhængende, kan vi antage at U er kurvesammenhængende. Så er $\mathfrak{B}(U,\sigma)$ en åben omegn af $\langle\sigma\rangle$ og $p(\mathfrak{B}(U,\sigma)) = U$. Heraf ses også at p er også åben. Lad $b \in B$. Da B er semilokalt enkeltsammenhængende og lokalt kurvesammenhængende, findes en kurvesammenhængende åben omegn U af b, så den af inklusionen $i_{U,B} : U \to B$ inducerede homomorfi, $(i_{U,B})_* : \pi_1(U,b) \to \pi_1(B,b)$ er triviel. Vi viser at så er U jævnt overlejret af p. Først vises at $p^{-1}(U)$ er foreningen af mængderne $\mathfrak{B}(U,\sigma)$, hvor σ gennemløber stierne fra b_0 til b. Den ene inklusion følger af at $p(\mathfrak{B}(U,\sigma)) = U$. Hvis omvendt $\langle\sigma\rangle \in p^{-1}(U)$ kan vi vælge en sti δ i U fra $\sigma(1)$ til b. Med $\tau = \sigma\delta$ gælder så $[\sigma] = [\sigma\delta\delta^{-1}] = [\tau\delta^{-1}]$, så $\langle\sigma\rangle = \langle\tau\delta^{-1}\rangle \in \mathfrak{B}(U,\tau)$ ifølge de indledende bemærkninger. Da τ er en sti fra b_0 til b fås den omvendte inklusion. Mængderne $\mathfrak{B}(U,\sigma)$ er enten ens eller disjunkte. Hvis nemlig $\rho \in \mathfrak{B}(U,\sigma) \cap \mathfrak{B}(U,\tau)$ gælder $\mathfrak{B}(U,\sigma) = \mathfrak{B}(U,\rho) = \mathfrak{B}(U,\tau)$. Dermed kan $p^{-1}(U)$ skrives som en dijunkt forening af åbne mængder. Disse bliver homeomorfe med U. Lad nemlig σ være en sti fra b_0 til b. Vi ved allerede at $p|_{\mathfrak{B}(U,\sigma)} : \mathfrak{B}(U,\sigma) \to U$ er en surjektiv, kontinuert og åben afbildning. Den er tillige injektiv, idet vi for stier δ_1, δ_2 i U med $p(\langle\sigma\delta_1\rangle) = p(\langle\sigma\delta_2\rangle)$ har $\delta_1(1) = \delta_2(1)$, så vi kan betragte løkken $\delta_1\delta_2^{-1}$ i U. Da enhver løkke i U er kurvehomotop i B til den konstante løkke ϵ_b fås $[\delta_1] = [\delta_2]$. Heraf ses ifølge de indledende bemærkninger at $\langle\sigma\delta_1\rangle = \langle\sigma\delta_2\rangle$. Dermed er afbildningen bijektiv, åben og kontinuert og dermed en homeomorfi. Ialt ses at p er en overlejring.

Vi mangler nu at vise at E er kurvesammenhængende og at $p_*(\pi_1(E,e_0)) = G$. Lad σ være en sti i B startende i b_0, og definer stien σ_t ved $\sigma_t(s) = \sigma(st)$. Definer stien σ' i E ved $\sigma'(s) = \langle\sigma_s\rangle$. Vi skal vise at dette giver en sti, dvs at σ' bliver kontinuert. Lad $s_0 \in I$, og betragt mængde $\mathfrak{B}(U,\sigma_{s_0})$ fra omegnsbasen for $\sigma'(s_0) = \langle\sigma_{s_0}\rangle$. Mængden U er altså en kurvesammenhængende åben omegn af $\sigma_{s_0}(1) = \sigma(s_0)$. Da σ er kontinuert i s_0, findes en åben omegn V i I af s_0 med $\sigma(V) \subseteq U$. Vi viser at $\sigma'(V) \subseteq \mathfrak{B}(U,\sigma_{s_0})$. Lad $s \in V$. Vi viser så at der findes en sti δ i U, så $[\sigma_s] = [\sigma_{s_0}\delta]$. Hvis

$s > s_0$ sættes δ lig $\sigma|_{[s_0;s]}$ reparametriseret til I, og hvis $s < s_0$ sættes δ lig $\sigma^{-1}|_{[s;s_0]}$ reparametriseret til I. Dette giver en virkelig en sti i U, da $\sigma(V) \subseteq U$, og man kan let i hvert af de to tilfælde opskrive en kurvehomotopi mellem σ_s og $\sigma_{s_0}\delta$. Dermed gælder ifølge de indledende bemærkninger at $\sigma'(s) = \langle\sigma_s\rangle = \langle\sigma_{s_0}\delta\rangle \in \mathfrak{B}(U, \sigma_{s_0})$. Dermed er kontinuiteten af σ' bevist. Stien σ' starter i $\sigma'(0) = \langle\sigma_0\rangle = \langle\epsilon_{b_0}\rangle = e_0$, slutter i $\sigma'(1) = \langle\sigma_1\rangle = \langle\sigma\rangle$, og er et løft af σ idet $p(\sigma'(s)) = \sigma_s(1) = \sigma(s)$. Dermed ses at E er kurvesammenhængende, thi hvis $\langle\sigma\rangle \in E$, er σ' en sti fra e_0 til $\langle\sigma\rangle$. Lad først $[\sigma] \in G$. Der gælder $\langle\sigma\rangle = \langle\epsilon_{b_0}\rangle = e_0$, idet $[\sigma{\epsilon_{b_0}}^{-1}] = [\sigma] \in G$. Dermed er σ' en løkke, dvs $[\sigma'] \in \pi_1(E, e_0)$, da denne ender i $\langle\sigma\rangle = e_0$. Desuden gælder $p_*([\sigma']) = [p \circ \sigma'] = [\sigma]$. Dermed gælder inklusionen $G \subseteq p_*(\pi_1(E, e_0))$. Lad endelig $[\tilde\sigma] \in \pi_1(E, e_0)$ og sæt $\sigma = p \circ \tilde\sigma$. Da er både $\tilde\sigma$ og σ' løft af σ til stier i E startende i e_0, så $\tilde\sigma = \sigma'$ ifølge entydighed af løft af stier. Derfor ender $\tilde\sigma$ i $\langle\sigma\rangle$, men da $\tilde\sigma$ er en løkke i E gælder $\langle\sigma\rangle = e_0 = \langle\epsilon_{b_0}\rangle$. Dette betyder altså at $[\sigma] = [\sigma{\epsilon_{b_0}}^{-1}] \in G$. Dermed gælder også $p_*(\pi_1(E, e_0)) \subseteq G$, så vi er færdige. $\square$

Korollar 4.30. *Lad (B, b_0) være et kurvesammenhængende, lokalt kurvesammenhængende og semilokalt enkeltsammenhængende rum. Så har (B, b_0) et universelt overlejringsrum.*

Bevis : Lad $p : (E, e_0) \to (B, b_0)$ være en kurvesammenhængende overlejring med $p_*(\pi_1(E, e_0)) = \{0\}$. Da p_* er injektiv fås $\pi_1(E, e_0) = \{0\}$, så E er enkeltsammenhængende. $\square$

Eksempel 4.31. Sæt $B = \prod_{\mathbb{N}} S^1$ være et uendeligt produkt af cirkler. Dette bliver et kurvesammenhængende og lokalt kurvesammenhængende rum. Det er dog ikke semilokalt enkeltsammenhængende. Hvis nemlig U er en vilkårlig basis mængde, må denne have formen $U = U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \times S^1 \times \cdots$, kan vi betragte løkken $s \mapsto (z_1, \ldots, z_n, e^{2\pi i s}, 1, \ldots)$, hvor $z_1 \in U_1, \ldots, z_n \in U_n$. Denne er ikke kurvehomotop til en konstant løkke i B, idet vi så ville have at projektionen på $n+1$'te koordinat, nemlig løkken $s \mapsto e^{2\pi i s}$ så ville være kurvehomotop til en konstant løkke i S^1.

Bemærkning 4.32. Der er en nær analogi mellem teorien for overlejringer og Galoisteori. Analogien går ud på at lade overlejringer svare til udvidelseslegemer og lade gruppen af overlejringstransformationer, $\mathcal{G}$, svare til gruppen af automorfier, Gal, af udvidelseslegemet, som fixer grundlegemet punktvis. Analogien kan sandsynliggøres ved at bemærke at hvis K er et dellegeme af L, så ligger en automorfi σ for L i $Gal(L/K)$ netop hvis $\sigma(k) = k$ for alle $k \in K$. Hvis $i : K \to L$ er inklusionen, kan dette også udtrykkes ved at følgende diagram kommuterer.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "\sigma"] & & L \\ & K \arrow[ul, "i"] \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

Man kan faktisk vise at der gælder en analog sætning til Galoisteoriens hovedsætning, jvf Rotman [10, side 309]. Bemærk at hvis $p : (E, e_0) \to (B, b_0)$ er en universel overlejring gælder ifølge sætning 4.18, at $\mathcal{G}(E/B) \simeq \pi_1(B, b_0)$. Hvis basis rummet har en universel overlejring får man således en bijektiv korrespondance mellem undergrupper af fundamentalgruppen og en klasse af standardoverlejringer, der i en hvis forstand repræsenterer alle kurvesammenhængende overlejringer. En overlejring $p : (E, e_0) \to (B, b_0)$ siges at være regulær (normal ville nok være en bedre betegnelse), hvis $p_*(\pi_1(E, e_0))$ er en normal undergruppe af $\pi_1(B, b_0)$. Disse svarer til de normale udvidelser i Galoisteorien.

5. De højere homotopigrupper

En løkke i et rum X kan også opfattes som en afbildning $S^1 \to X$. Vi vil i dette afsnit indføre de højere homotopigrupper, som er en generalisering af fundamentalgruppen, hvor man i stedet for at betragte homotopiklasser af afbildninger $S^1 \to X$ betragter afbildninger $S^n \to X$. Disse vil ligesom fundamentalgruppen være homotopi invarianter, og giver os derfor et nyt algebraisk redskab.

Definition 5.1. Lad X og Y være topologiske rum. Hvis $C \subseteq X$ er kompakt og $U \subseteq Y$ er åben, sættes $\mathfrak{S}(C, U) = \{f | f \in \mathcal{C}(X, Y) \text{ og } f(C) \subseteq U\}$. Topologien på $\mathcal{C}(X, Y)$ frembragt af subbasen bestående af mængderne $\mathfrak{S}(C, U)$, kaldes kompakt-åben topologien på $\mathcal{C}(X, Y)$.

Bemærkning 5.2. Hvis (Y, d) er et metrisk rum kan man vise at kompakt-åben topologien stemmer overens med topologien 'uniform konvergens på kompakte delmængder'. Denne er givet ved subbasen bestående af mængder af formen $\mathfrak{P}(f, C, \varepsilon) = \{g \in \mathcal{C}(X, Y) | \sup \{d(f(x), g(x)) | x \in C\} < \varepsilon\}$, hvor $C \subseteq X$ er kompakt, $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ og $\varepsilon > 0$. Hvis specielt X er kompakt, så er topologien givet ved metrikken $d_\infty(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) | x \in X\}$.

Sætning 5.3. *Lad X være et lokalkompakt Hausdorff rum. Så er evalueringsafbildningen* $\mathrm{ev} : \mathcal{C}(X, Y) \times X \to Y$ *givet ved* $\mathrm{ev}(f, x) = f(x)$ *er kontinuert.*

Bevis : Lad $(f, x) \in \mathcal{C}(X, Y) \times X$, og lad V være en åben omegn af $f(x)$. Da f er kontinuert findes en åben omegn U af x, så $f(U) \subseteq V$. Da X er lokalkompakt Hausdorff findes en åben omegn W af x, så $\overline{W}$ er kompakt og $\overline{W} \subseteq U$. Mængden $\mathfrak{S}(\overline{W}, V) \times W$ er åben i $\mathcal{C}(X, Y) \times X$ og indeholder (f, x) og $\mathrm{ev}(\mathfrak{S}(\overline{W}, V) \times W) \subseteq V$. □

Definition 5.4. Vi vil i det følgende betragte løkkerummet $\Omega_{X, x_0} = \Omega_{X_0}$ bestående af løkker i X startende og sluttende i x_0. Dette rum arver kompakt-åben topologien fra $\mathcal{C}(I, X)$.

Sætning 5.5. *Lad X, Y og Z være topologiske rum, hvor X er lokalkompakt Hausdorff. En afbildning $F : Z \times X \to Y$ er kontinuert netop hvis afbildningen $\hat{F} : Z \to \mathcal{C}(X, Y)$ givet ved $\hat{F}(z)(x) = F(z, x)$ er kontinuert.*

Bevis : Antag først at $\hat{F}$ er kontinuert. Faktoriseringen

$$Z \times X \overset{\hat{F}\times \mathrm{id}_X}{\to} \mathcal{C}(X,Y) \times X \overset{\mathrm{ev}}{\to} Y$$

$$(z,x) \overset{\hat{F}\times \mathrm{id}_X}{\to} (\hat{F}(z),x) \overset{\mathrm{ev}}{\to} \hat{F}(z)(x) = F(z,x)$$

viser at F er kontinuert. Antag nu at F er kontinuert. Lad $z \in Z$ og $\mathfrak{S}(C,U)$ være et subbasis element indeholdende $\hat{F}(z)$. For $x \in C$ gælder $F(z,x) = f(z)(x) \in U$, så da F er kontinuert er $F^{-1}(U)$ en åben mængde indeholdende strimlen $\{z\} \times C$. Af tube lemmaet ses nu at der findes en åben omegn W af z, så $W \times C \subseteq F^{-1}(U)$. Altså gælder $\hat{F}(W) \subseteq \mathfrak{S}(C,U)$. $\square$

Sætning 5.6. *Løkkerne σ, τ ligger i samme kurvesammenhængskomponent af Ω_{X_0} netop hvis σ og τ er kurvehomotope.*

Bevis : En sti f i Ω_{X_0} fra σ til τ svarer til en kurvehomotopi F mellem σ og τ givet ved $F(s,t) = f(s)(t)$. Vi skal så vise at F er kontinuert netop hvis f er det, men dette følger af den foregående sætning. $\square$

Korollar 5.7. *$\pi_1(X,x_0)$ er mængden af kurvesammenhængskomponenter af Ω_{X_0}.*

Definition 5.8. Et H-rum er et topologisk rum (X,x_0) med en kontinuert multiplikation $\cdot : X \times X \to X$ for hvilken afbildningerne $x \mapsto x \cdot x_0$ og $x \mapsto x_0 \cdot x$ er homotope til identitetsafbildningen id_X relativt til $\{x_0\}$.

Sætning 5.9. *Løkkerummet Ω_{X_0} er et H-rum.*

Bevis : Lad den konstante løkke ϵ_{x_0} være det udvalgte punkt. Vi viser først at multiplikationen givet ved sammensætning af løkker er kontinuert. Definer altså $\mu : \Omega_{X_0} \times \Omega_{X_0} \to \Omega_{X_0}$ ved

$$\mu(\sigma,\tau)(s) = \begin{cases} \sigma(2s) & \text{s} \in [0; \frac{1}{2}] \\ \tau(2s-1) & \text{s} \in [\frac{1}{2}; 1] \end{cases}$$

Bemærk at dette er veldefineret. Ifølge sætning 5.5 (anvendt med $X = I$, $Y = X$ og $Z = \Omega_{X_0} \times \Omega_{X_0}$) er det nok at vise afbilningen $\check{\mu} : \Omega_{X_0} \times \Omega_{X_0} \times I \to X$ er kontinuert. Af definitionen ses direkte at $\check{\mu}$ er kontinuert på de afsluttede mængder $\Omega_{X_0} \times \Omega_{X_0} \times [0; \frac{1}{2}]$ og $\Omega_{X_0} \times \Omega_{X_0} \times [\frac{1}{2}; 1]$, og dermed på hele mængden $\Omega_{X_0} \times \Omega_{X_0} \times I$. Vi viser nu at multiplikation fra højre med ϵ_{x_0} er homotop til identiteten på X. Definer $F : \Omega_{X_0} \times I \to \Omega_{X_0}$ ved

$$F(\sigma,t)(s) = \begin{cases} \sigma(\frac{2s}{t+1}) & \text{s} \in [0; \frac{t+1}{2}] \\ x_0 & \text{s} \in [\frac{t+1}{2}; 1] \end{cases}$$

Bemærk at dette er veldefineret og at ϵ_{x_0} holdes fast under homotopien. Ifølge sætning 5.5 (anvendt med $X = I$, $Y = X$ og $Z = \Omega_{X_0} \times I$) er det nok at vise afbilningen $\check{F} : \Omega_{X_0} \times I \times I \to X$ er kontinuert. Definitionen giver direkte at $\check{F}$ er kontinuert på de to afsluttede mængder og dermed på hele

$\Omega_{X_0} \times I \times I$. Beviset for at multiplikation fra venstre med ϵ_{x_0} er tilsvarende. □

Sætning 5.10. *Lad (X, x_0) være et H-rum. Så er $\pi_1(X, x_0)$ abelsk.*

Bevis : Definer kompositionen $\diamond$ i Ω_{X_0} ved $(\sigma \diamond \tau)(s) = \sigma(s) \cdot \tau(s)$. Denne respekterer kurvehomotopiækvivalens. Lad nemlig σ og $\tilde{\sigma}$ være kurvehomotope og lad F være en kurvehomotopi. Lad tilsvarende τ og $\tilde{\tau}$ være kurvehomotope og lad G være en kurvehomotopi. Da multiplikation i X er kontinuert er $H = F \cdot G$ en kontinuert kurvehomotopi mellem $\sigma \diamond \tau$ og $\tilde{\sigma} \diamond \tilde{\tau}$. Betegner $\sim$ kurvehomotopiækvivalens gælder altså

$$(\sigma \diamond \tau)(s) \sim ((\sigma \epsilon_{x_0}) \diamond (\epsilon_{x_0} \tau))(s) = (\sigma \epsilon_{x_0})(s) \cdot (\epsilon_{x_0} \tau)(s) = \begin{cases} \sigma(2s) \cdot x_0 & \text{s} \in [0; \frac{1}{2}] \\ x_0 \cdot \tau(2s-1) & \text{s} \in [\frac{1}{2}; 1] \end{cases}$$

Da X er et H-rum findes homotopier F og G relativt til $\{x_0\}$ mellem hhv. afbildningen $x \mapsto x_0 \cdot x$ og identiteten på X og afbildningen $x \mapsto x \cdot x_0$ og identiteten på X. Så er H givet ved

$$H(s,t) = \begin{cases} \sigma(2s) \cdot F(2s, t) & \text{s} \in [0; \frac{1}{2}] \\ G(2s-1, t) \cdot \tau(2s-1) & \text{s} \in [\frac{1}{2}; 1] \end{cases}$$

en kurvehomotopi mellem løkken

$$s \mapsto \begin{cases} \sigma(2s) \cdot x_0 & \text{s} \in [0; \frac{1}{2}] \\ x_0 \cdot \tau(2s-1) & \text{s} \in [\frac{1}{2}; 1] \end{cases}$$

og $\sigma\tau$. At H er veldefineret følger af at der for $s = \frac{1}{2}$ gælder $\sigma(1) \cdot F(1,t) = x_0 \cdot x_0 = G(1,t) \cdot \tau(1)$, da F og G holder x_0 fast. Kontinuiteten af H følger af kontinuiteten af multiplikationen. Ved i stedet at bruge relationen $(\sigma \diamond \tau)(s) \sim ((\epsilon_{x_0} \sigma) \diamond (\tau \epsilon_{x_0}))(s)$ fås tilsvarende $\sigma \diamond \tau \sim \tau\sigma$. Vi har altså $\sigma\tau \sim \tau\sigma$. □

Korollar 5.11. *Fundamentalgruppen for en topologisk gruppe er abelsk.*

Bevis : Lader vi neutralelementet e være det udvalgte punkt er afbildningerne $x \mapsto e \cdot x$ og $x \mapsto x \cdot e$ faktisk lig identiteten. □

Sætning 5.12. *Lad $p : E \to B$ være en kurvesammenhængende overlejring med $p(e_0) = b_0$, hvor B er lokalt kurvesammenhængende. Hvis (B, b_0) er et H-rum, kan (E, e_0) på entydig måde gøres til et H-rum, så p bliver en homomorfi. Hvis (B, b_0) er en topologisk gruppe, kan (E, e_0) på entydig måde gøres til et topologisk gruppe.*

Bevis : Antag først at (B, b_0) er et H-rum. Lad $\mu : B \times B \to B$ være multiplikationen. Vi vil løfte denne til en multiplikation μ' i E.

$$\begin{array}{ccc} (E \times E, (e_0, e_0)) & \xrightarrow{\mu'} & (E, e_0) \\ \downarrow{\scriptstyle p \times p} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ (B \times B, (b_0, b_0)) & \xrightarrow{\mu} & (B, b_0) \end{array}$$

Vi vil bruge den generelle sætning om løft, og bemærker først at $E \times E$ er kurvesammenhængende. Vi skal så vise at der gælder

$$\mu_* \circ (p \times p)_*(\pi_1(E \times E, (e_0, e_0))) \subseteq p_*(\pi_1(E, e_0)).$$

Idet $\pi_1(E \times E, (e_0, e_0)) \simeq \pi_1(E, e_0) \times \pi_1(E, e_0)$ kan vi identificere μ med en afbildning $p_*(\pi_1(E, e_0)) \times p_*(\pi_1(E, e_0)) \to p_*(\pi_1(E, e_0))$. Dette betyder altså at vi skal vise at der for $[\sigma], [\tau] \in p_*(\pi_1(E, e_0))$ gælder $[\sigma \diamond \tau] \in p_*(\pi_1(E, e_0))$. Men fra beviset for sætning 5.10 ved vi at $[\sigma \diamond \tau] = [\sigma\tau]$, så påstanden følger af at $p_*(\pi_1(E, e_0))$ er en gruppe. Dermed kan multiplikationen i B entydigt løftes til en multiplikation μ' i E med $\mu'(e_0, e_0) = e_0$. Idet diagrammet kommuterer bliver p en homomorfi, og multiplikationen bliver entydig idet diagrammet skal kommutere hvis p skal være en homomorfi. Vi skal nu vise at (E, e_0) bliver et H-rum. Lad $F : B \times I \to B$ være en homotopi mellem identiteten id_B og afbildningen $b \mapsto \mu(b, b_0)$, der holder b_0 fast. Idet identiteten id_E løfter $p : (E, e_0) \to (B, e_0)$ til (E, e_0) kan vi ifølge sætning 3.19 ligeledes løfte homotopien $F \circ (p \times \mathrm{id}_I) : E \times I \to B$ til en homotopi $F' : E \times I \to E$ med $F'(e, 0) = e$ for alle $e \in E$. Stierne $s \mapsto F'(e_0, s)$ og den konstante sti ϵ_{e_0} er begge løft af den konstante sti ϵ_{b_0} startende i e_0, idet vi har $p \circ F'(e_0, s) = F(b_0, s) = b_0$, idet b_0 holdes fast under homotopien F. Dermed holder F' altså e_0 fast på grund af entydighed af løft af stier. Afbildningerne $e \mapsto F'(e, 1)$ og $e \mapsto \mu'(e, e_0)$ begge er løft af afbildningen $e \mapsto \mu(p(e), b_0)$, idet $p \circ F'(e, 1) = F(p(e), 1) = \mu(p(e), b_0)$. Da F' holder e_0 fast stemmer de overens i punktet e_0, så af entydighed af generelle løft ses at de er ens. Altså er F' en homotopi mellem identiteten id_E og afbildningen $e \mapsto \mu'(e, e_0)$ relativt til e_0. Tilsvarende ses at identiteten id_E er homotop til afbildningen $e \mapsto \mu'(e_0, e)$ relativt til e_0, så (E, e_0) er et H-rum. Antag nu at (B, b_0) er en topologisk gruppe. Vi har så en multiplikation μ' på E ifølge den første del af beviset. e_0 bliver neutralt element, idet afbildningerne id_E, $e \mapsto \mu'(e, e_0)$ og $e \mapsto \mu'(e_0, e)$ alle er løft af p, som stemmer overens i e_0 idet $\mu'(e_0, e_0) = e_0$. Entydighed af løft giver så at $e \cdot e_0 = e_0 \cdot e = e$. Multiplikationen bliver også associativ.

$$\begin{tikzcd}
E \times E \times E \arrow[r] \arrow[d, "p \times p \times p"'] & E \arrow[d, "p"] \\
B \times B \times B \arrow[r] & B
\end{tikzcd}$$

Afbildningerne $(e_1, e_2, e_3) \mapsto (e_1 \cdot e_2) \cdot e_3$ og $(e_1, e_2, e_3) \mapsto e_1 \cdot (e_2 \cdot e_3)$ er nemlig begge løft af afbildningen $(e_1, e_2, e_3) \mapsto p(e_1) \cdot p(e_2) \cdot p(e_3)$ idet multiplikationen i B er associativ. Idet de stemmer overens i punktet (e_0, e_0, e_0) fås det ønskede så af entydigheden af løft. Hvis σ er en løkke i B startende i b_0 defineres $\bar{\sigma} : I \times B$ ved $\bar{\sigma}(s) = \sigma(s)^{-1}$. Dette er en løkke i B startende i b_0, idet ${b_0}^{-1} = b_0$. Vi har nu $[\bar{\sigma}][\sigma] = [\bar{\sigma}] \diamond [\sigma] = [\bar{\sigma} \diamond \sigma] = [\epsilon_{b_0}]$ og derfor $[\bar{\sigma}] = [\sigma]^{-1}$. Vi ønsker at løfte afbildningen $\mathrm{inv}_B : b \mapsto b^{-1}$ til en invers afbildning i E. Vi skal altså vise at $(\mathrm{inv}_B)_* \circ p_*(\pi_1(E, e_0)) \subseteq p_*(\pi_1(E, e_0))$, dvs at der for $[\sigma] \in p_*(\pi_1(E, e_0))$ gælder $[\bar{\sigma}] \in p_*(\pi_1(E, e_0))$. Men dette følger af at $p_*(\pi_1(E, e_0))$ er en gruppe og at $[\bar{\sigma}] = [\sigma]^{-1}$. Vi kan altså finde en afbildning $\mathrm{inv}_E : E \to E$, med $\mathrm{inv}_E(e_0) = e_0$ og $p(\mathrm{inv}_E(e)) = p(e)^{-1}$, idet $p(e_0)^{-1} = b_0 = p(e_0)$. Idet $e \mapsto e_0$, $e \mapsto e \cdot \mathrm{inv}_E(e)$, og $e \mapsto \mathrm{inv}_E(e) \cdot e$ alle er løft af $p : E \to B$ til E, der stemmer overens i e_0 fås $e \cdot \mathrm{inv}_E(e) = \mathrm{inv}_E(e) \cdot e = e_0$, så $\mathrm{inv}_E(e)$ bliver en invers til e. Dermed bliver E en topologisk gruppe. □

Definition 5.13. Lad (X, x_0) være et topologisk rum. De højere homotopigrupper for (X, x_0) defineres induktivt ved $\pi_n(X, x_0) = \pi_{n-1}(\Omega_{X_0}, \epsilon_{x_0})$ for $n \geq 2$. Ved induktion eftervises så let at der faktisk gælder $\pi_n(X, x_0) = \pi_{n-k}(\Omega^k(X, x_0))$, $1 \leq k \leq n-1$, hvor basispunktet er underforstået.

Bemærkning 5.14. Ifølge korollar 5.7 gælder dette også, dog kun betragtet som mængder, for $n = 1$.

Korollar 5.15. *$\pi_n(X, x_0)$ er abelsk for $n \geq 2$.*

Bemærkning 5.16. Hvis $f \in \Omega_{\Omega_{X,x_0}, \epsilon_{x_0}}$ kan vi definere $\tilde{f} : I^2 \to X$ ved $\tilde{f}(s,t) = f(s)(t)$. Ifølge sætning 5.5 bliver $\tilde{f}$ kontinuert og $\tilde{f}(\partial I^2) = \{x_0\}$ idet $f(s)(0) = f(s)(1) = x_0$ da $f(s) \in \Omega_{X_0}$ og $f(0)(t) = f(1)(t) = \epsilon_{x_0}(t) = x_0$. Hvis omvendt $\tilde{f} : I^2 \to X$ med $\tilde{f}(\partial I^2) = \{x_0\}$, så definerer $f(s)(t) = \tilde{f}(s,t)$ et element i $\Omega_{\Omega_{X,x_0}, \epsilon_{x_0}}$. Vi har desuden for $f, g \in \Omega_{\Omega_{X,x_0}, \epsilon_{x_0}}$ at f og g er kurvehomotope netop hvis $\tilde{f}$ og $\tilde{g}$ er homotope relativt til ∂I^2. Kontinuiteten af de passende homotopier følger ved som sædvanlig ved brug af sætning 5.5. Disse betragtninger kan ved induktion udvides til at gælde for alle n. Vi får altså en fortolkning af π_n som mængden af homotopiklasser af afbildninger $\tilde{f} : I^n \to X$ så $\tilde{f}(\partial I^n) = x_0$. En anden tolkning af de højere homotopigrupper fås ved at indføre en ækvivalensrelation på I^n ved at definere $a \sim b$ netop hvis $a = b$ eller $a, b \in \partial I^n$. Tages kvotientrummet $I^n / \sim$ under denne ækvivalensrelation fås S^n. Vi kan altså tolke π_n som homotopiklasser af afbildninger $f : (S^n, s_0) \to (X, x_0)$, hvor s_0 er et udvalgt punkt i S^n. I dette tilfælde genbruges notationen $\epsilon_{x_0} : S^n \to X$ for den konstante afbildning $s \mapsto x_0$.

Sætning 5.17. *π_n er en funktor fra kategorien af topologiske rum med udvalgt punkt til kategorien af grupper (abelske for $n \geq 2$).*

Bevis : Givet en afbildning $f : (X, x_0) \to (X', x_0')$. Definer nu en afbildning $\Omega(f) : (\Omega_{X_0}, \epsilon_{x_0}) \to (\Omega_{X_0'}, \epsilon_{x_0'})$ ved $\Omega(f)(\sigma) = f \circ \sigma$. Så er $\Omega(f)$ kontinuert på grund af sætning 5.5 idet afbildningen $\check{\Omega}(f)(\sigma, t) : \Omega_{X_0} \times I \to X'$ givet ved $\check{\Omega}(f)(\sigma, t) = f(\sigma(t))$ er kontinuert, da $\check{\Omega}(f) = f \circ \mathrm{ev}$. Så vil Ω være en funktor fra kategorien af topologiske rum med udvalgt punkt som objekter og kontinuerte afbildninger som morfier, ind i sig selv. Vi har nemlig $\Omega(\mathrm{id}_X)(\sigma) = \mathrm{id}_X \circ \sigma = \mathrm{id}_{\Omega_{X_0}}(\sigma)$ og $\Omega(f \circ g)(\sigma) = f \circ (g \circ \sigma) = \Omega(f) \circ \Omega(g)(\sigma)$. Ved induktion kan vi altså definere en afbildning $(f_*)_n : \pi_n(X, x_0) \to (X', x_0')$ ved at sætte $(f_*)_n = (\Omega(f)_*)_{n-1}$ for $n \geq 2$. Der vil så selvfølgelig gælde

$(f_*)_n = (\Omega^k(f)_*)_{n-k}$. Vi ved at $(f_*)_1 = f_*$ er en homomorfi, så ved induktion fås at også $(f_*)_n$ er en homomorfi idet

$$(f_*)_n([\eta][\zeta]) = (\Omega(f)_*)_{n-1}([\eta])(\Omega(f)_*)_{n-1}([\zeta]) = (f_*)_n([\eta])(f_*)_n([\zeta]).$$

Desuden ses let ved induktion at der gælder $(\mathrm{id}_{X*})_n = \mathrm{id}_{\pi_n(X,x_0)}$ og $((f \circ g)_*)_n = (f_*)_n \circ (g_*)_n$, idet Ω er en funktor. □

Sætning 5.18. *Hvis $f, g : (X, x_0) \to (X', x_0')$ er homotope relativt til x_0, så gælder $(f_*)_n = (g_*)_n$ for alle n.*

Bevis : Påstanden gælder for $n = 1$ ifølge sætning 2.18. Vi viser nu at $\Omega(f), \Omega(g) : (\Omega_{X_0}, \epsilon_{x_0}) \to (\Omega_{X_0'}, \epsilon_{x_0'})$ er homotope relativt til ϵ_{x_0}, hvoraf påstanden så følger ved induktion udfra definitionen $(f_*)_n = (\Omega(f)_*)_{n-1}$ for $n \geq 2$. Lad $F : X \times I \to X'$ være en homotopi, der holder x_0 fast. Definer $\tilde{F} : \Omega_{X_0} \times I \to \Omega_{X_0'}$ ved $\tilde{F}(\sigma, t)(s) = F(\sigma(s), t)$. Så er $\tilde{F}$ kontinuert ifølge sætning 5.5, idet afbildningen $\check{\tilde{F}}(\sigma, t, s) = F(\mathrm{ev}(\sigma, s), t)$ er kontinuert. Man ser desuden let at $\tilde{F}$ virkelig er en homotopi mellem $\Omega(f)$ og $\Omega(g)$, der holder ϵ_{x_0} fast. □

Korollar 5.19. *Lad $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$. Hvis f er en homotopi ækvivalens hvor homotopierne fastholder basispunkterne, så er $(f_*)_n : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$ en isomorfi.*

Bevis : Vi ved at $f \circ g$ er homotop til identitetsafbildningen id_Y relativt til y_0. Sætningen siger så at $(f_*)_n \circ (g_*)_n = id_{\pi_n(Y,y_0)}$, så $(f_*)_n$ er surjektiv. Tilsvarende ses injektiviteten. □

Bemærkning 5.20. Påstanden gælder også i det tilfælde hvor basispunkterne ikke holdes fast, idet man kan vise at der gælder en generalisering af sætning 2.18. Beviset er dog mere kompliceret, se Rotman [10, side 341]. Her vises også at en sti fra x_0 til x_1 i rummet X inducerer en isomorfi $\pi_n(X, x_0) \simeq \pi_n(X, x_1)$ mellem homotopigrupperne. Heraf ses specielt at der for kurvesammenhængende rum gælder, at homotopigrupperne er uafhængige af valg af basispunkt op til isomorfi.

Definition 5.21. Et rum X siges at være kontraktibelt hvis identiteten id_X er homotop til en konstant afbildning $x \mapsto x_0$.

Lemma 5.22. *For et vilkårligt rum X og en afbildning $f : S^n \to X$ er følgende betingelser ensbetydende*

(1) *f er homotop til en konstant afbildning.*
(2) *f kan udvides til en kontinuert afbildning fra D^{n+1} til X.*
(3) *For et $s_0 \in S^n$ er f homotop til den konstante afbildning $s \mapsto f(s_0)$ relativt til s_0.*

BEVIS : (1) $\Rightarrow$ (2). Antag at $F : S^n \times I$ er en homotopi mellem f og en konstant afbildning $c : s \mapsto x_0$. Definer $g : D^{n+1} \to X$ ved

$$g(s) = \begin{cases} x_0 & \text{for } 0 \leq \|s\| \leq \frac{1}{2} \\ F(\frac{s}{\|s\|}, 2 - 2\|s\|) & \text{for } \frac{1}{2} \leq \|s\| \leq 1 \end{cases}$$

Dette er veldefineret da vi for $\|s\| = \frac{1}{2}$ har $F(\frac{s}{\|s\|}, 2 - 2\|s\|) = c(\frac{s}{\|s\|}) = x_0$. Kontinuiteten følger nu af at g er kontinuert på hvert af de afsluttede mængder. Afbildningen g udvider f idet vi for $s \in S^n$ har $g(s) = F(\frac{s}{1}, 2 - 2 \cdot 1) = f(s)$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Lad $s_0 \in S^n$ Lad $g : D^{n+1} \to X$ være en udvidelse af f, og definer $F : S^n \times I \to X$ ved $F(s,t) = g((1-t)s + ts_0)$. Det er klart at F er kontinuert og der gælder $F(s, 0) = g(s) = f(s)$, $F(s, 1) = g(s_0) = f(s_0)$ og $F(s_0, t) = g(s_0) = f(s_0)$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Trivielt. □

Sætning 5.23. *Hvis X er kontraktibelt og $x_0 \in X$ er vilkårlig gælder $\pi_n(X, x_0) = \{0\}$ for alle n.*

BEVIS : Antag at $F : X \times I \to X$ er en homotopi mellem identiteten id_X og en konstant afbildning $x \mapsto x_1$. Lad $f : (S^n, s_0) \to (X, x_0)$ være vilkårlig. Da vil $\tilde{F} : S^n \times I \to X$ givet ved $\tilde{F}(s,t) = F(f(s), t)$ være en homotopi mellem f og den konstante afbildning $s \mapsto x_1$. Af lemmaet følger nu at f er homotop til den konstante afbildning $s \mapsto f(s_0) = x_0$ relativt til s_0. Dermed er alle afbildninger $f : (S^n, s_0) \to (X, x_0)$ homotope, så $\pi_n(X, x_0)$ er triviel. □

Bemærkning 5.24. Enhver stjerneformet delmængde X af et topologisk vektorrum over $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ har trivielle homotopigrupper, da den er kontraktibel. Vi kan nemlig definere homotopien $F(x,t) = (1-t)x + tx_0$ mellem identiteten id_X og den konstante afbildning $x \mapsto x_0$, hvor x_0 er et punkt, som X er stjerneformet om.

Sætning 5.25. $\pi_n(X \times Y, (x_0, y_0)) \simeq \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(Y, y_0)$.

Bemærkning 5.26. Dette gælder også for $n = 0$, hvor isomorfien blot er en bijektion mellem mængder med udvalgte punkter. Punktparret (x, y) kan nemlig forbindes til punktparret (x', y'), netop hvis x kan forbindes til x' og y kan forbindes til y'.

BEVIS : Vi bruger fortolkningen af π_n som homotopiækvivalensklasser af afbildninger fra (S^n, s_0). Beviset er en lille modifikation af beviset for påstanden i tilfældet $n = 1$, sætning 2.17. Lad p og q være projektionerne af $X \times Y$ på hhv X og Y. Da disse er kontinuerte induceres gruppehomomorfier $(p_*)_n$ og $(q_*)_n$. Definer

$$\Psi : \pi_n(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(Y, y_0), \Psi([\theta]) = ((p_*)_n([\theta], (q_*)_n([\theta])$$

Dette er en isomorfi. Det er klart at Ψ er en homomorfi, da $(p_*)_n$ og $(q_*)_n$ er homomorfier.

Ψ *er surjektiv :* Lad $([\eta],[\zeta]) \in \pi_n(X,x_0)\times\pi_n(Y,y_0)$. Lad $\theta(s) = (\eta(s),\zeta(s))$. Så gælder $[\theta] \in \pi_n(X\times Y,(x_0,y_0))$ og $\Psi([\theta]) = ([\eta],[\zeta])$, som ønsket.
Ψ *er injektiv :* Lad $[\theta] \in \ker(\Psi)$, dvs $[p\circ\theta] = [\epsilon_{x_0}]$ og $[q\circ\theta] = [\epsilon_{y_0}]$. Der findes altså en homotopi F mellem $p\circ\theta$ og ϵ_{x_0} og en homotopi G mellem $q\circ\theta$ og ϵ_{y_0}, begge relativt til s_0. Da er $H(s,t) = (F(s,t),G(s,t))$ en homotopi mellem θ og $\epsilon_{(x_0,y_0)}$ relativt til s_0. □

Sætning 5.27. *Hvis $p : E \to B$ er en overlejring med $p(e_0) = b_0$ er $(p_*)_n : \pi_n(E,e_0) \to \pi_n(B,b_0)$ en isomorfi for $n \geq 2$.*

Bevis : Vi ved at $(p_*)_n$ er en homomorfi. Vi benytter tolkningen af π_n som homotopiækvivalensklasser af afbildninger fra (S^n,s_0). Lad $[\eta] \in \pi_n(B,b_0)$. Da S^n er enkeltsammenhængende kan vi løfte η til en afbildning $\eta' : (S^n,s_0) \to (E,e_0)$. Vi har så $(p_*)_n([\eta']) = [\eta]$. Antag $(p_*)_n([\eta]) = (p_*)_n([\zeta])$, og lad $F : S^n \times I \to B$ være en homotopi mellem $p(\eta)$ og $p(\zeta)$, som holder s_0 fast. Da η og ζ er løft af $p(\eta)$ og $p(\zeta)$ kan vi på grund af sætning 3.19 løfte homotopien F til en homotopi F'. På grund af entydighed af løft må F' være en homotopi mellem η og ζ. Denne holder s_0 fast idet vi har $F'(\{s_0\}\times I) \in p^{-1}(b_0)$ da $F(\{s_0\}\times I) = \{b_0\}$. Da $F'(\{s_0\}\times I)$ er sammenhængende og fiberen $p^{-1}(b_0)$ er diskret, $F'(\{s_0\}\times I)$ er en et-punkts mængde. Vi får altså $[\eta] = [\zeta]$. □

Korollar 5.28. $\pi_n(S^1) = \{0\}$ *for* $n \geq 2$.

Bevis : Vi ved at afbildningen $p : \mathbb{R} \to S^1$ givet ved $p(x) = e^{2\pi i x}$ er en overlejring. Da $\mathbb{R}$ er kontraktibel fås det ønskede af den forrige sætning. □

Bemærkning 5.29. Man kan vise at der til en vilkårlig følge $G_1, G_2, \ldots$ af grupper, hvor G_n er abelsk for $n \geq 2$, findes et topologisk rum (X,x_0), så $\pi_n(X,x_0) = G_n$ for alle n, se fx Spanier [11, side 426]. Disse realiseres ved hjælp af såkaldte CW-komplekser, der løst sagt opnås ved succesivt af påklistre celler (der er homeomorfe kopier af åbne kugler) i højere og højere dimensioner.

6. Produkter af overlejringer

I dette afsnit indfører vi en slags produkt af overlejringer. Disse har dog desværre ikke så pæne egenskaber, fx vil produktet af to kurvesammenhængende overlejringer ikke nødvendigvis være kurvesammenhængende. Resultaterne har derfor en mere perifer karakter og danner derfor ikke som de andre en færdig teori. Afsnittet skal opfattes som en undersøgelse af nye veje, man eventuelt kunne gå, og har defor en mere løs struktur.

Definition 6.1. Givet en overlejring $p : E \to B$ og en kontinuert afbildning $f : A \to B$. Definer $f^*(E) = \{(a,e) \in A \times E | p(e) = f(a)\}$ og lad q_E og q_A være projektionerne på hhv E og A. Da kaldes $q_A : f^*(E) \to A$ et pull-back af $p : E \to B$ langs f.

$$\begin{tikzcd} f^*(E) \arrow[r, "q_E"] \arrow[d, "q_A"'] & E \arrow[d, "p"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Bemærk at pull-back'et netop er konstrueret så diagrammet kommuterer.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[dr, dashed, "v"] \arrow[drr, "g"] \arrow[ddr, "h"'] & & \\ & f^*(E) \arrow[r, "q_E"] \arrow[d, "q_A"] & E \arrow[d, "p"] \\ & A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Hvis Y er en vilkårlig mængde og $g : Y \to E$ og $h : Y \to A$ er afbildninger så $p \circ g = f \circ h$, så findes en entydig bestemt afbildning $v : Y \to f^*(E)$, så diagrammet kommuterer.

Sætning 6.2. *Pull-back'et $q_A : f^*(E) \to A$ af $p : E \to B$ langs f er en overlejring, og fiberen over et punkt a har samme kardinalitet som fiberen over punktet $f(a)$.*

Bevis : Lad $a \in A$, og vælge en jævnt overlejret omegn U af $f(a)$, og lad (V_α) være en lagdeling af $p^{-1}(U)$. Sæt $W = f^{-1}(U)$. Så er W en åben omegn af a og der gælder

$$\begin{aligned} q_A^{-1}(W) &= \{(a,e) \in f^*(E) | q_A(a,e) \in W\} \\ &= \{(a,e) \in f^*(E) | q(e) = f(a) \in U\} \\ &= f^*(E) \cap (f^{-1}(U) \times p^{-1}(U)) \\ &= \textstyle\bigcup_\alpha (f^*(E) \cap (W \times V_\alpha)) \end{aligned}$$

Mængderne $Z_\alpha = f^*(E) \cap (W \times V_\alpha)$ er altså åbne og disjunkte, og $q_A|_{Z_\alpha}$ er en homeomorfi idet den inverse er givet ved $(q_A|_{Z_\alpha})^{-1}(x) = (x, (p|_{V_\alpha})^{-1}(f(x)))$. Det er klart at denne afbildning afbilder ind i $f^*(E)$, og at den er højreinvers til $q_A|_{Z_\alpha}$. At $q_A|_{Z_\alpha}$ er injektiv følger af der for $(x,e), (x,e') \in Z_\alpha$ gælder $e, e' \in V_\alpha$ og $p(e) = f(x) = p(e')$, så da $p|_{V_\alpha}$ er injektiv fås $e = e'$. Det er desuden klart at både $q_A|_{Z_\alpha}$ og $(q_A|_{Z_\alpha})^{-1}$ er kontinuerte. At fibrene har samme kardinalitet ses af at de begge er indekseret ved α. $\square$

Definition 6.3. Lad $p_1 : E_1 \to B$ og $p_2 : E_2 \to B$ være overlejringer. Afbildningen $p_1 \times p_2 : E_1 \times E_2 \to B \times B$ er en overlejring ifølge eksempel 3.13, og diagonalafbildningen $\Delta : B \to B \times B$ er kontinuert. Vi definerer produktoverlejringen $E_1 \odot E_2$ af B som pull-back'et af $p_1 \times p_2 : E_1 \times E_2 \to B \times B$

langs Δ.

$$\begin{tikzcd}
E_1 \odot E_2 \arrow[d, "q_B"'] & E_1 \times E_2 \arrow[d, "p_1 \times p_2"] \\
B \arrow[r, "\Delta"'] & B \times B
\end{tikzcd}$$

Bemærkning 6.4. En anden mulighed at definere en produktoverlejring er følgende. Tag pull-back'et af $p_1 : E_1 \to B$ langs p_2. Det er ikke på forhånd klart at dette kan give en overlejring af B ved sammensætning med $p_1 \circ q_{E_1}$, idet overlejringen $p_1 : E_1 \to B$ kan være uendelig. Elementerne i dette pull-back har dog formen (e_1, e_2) hvor $p_1(e_1) = p_2(e_2)$. I det tidligere definerede produkt har elementerne formen $(b, (e_1, e_2))$ hvor $b = p_1(e_1) = p_2(e_2)$. Vi kan således lave en homeomorfi φ fra det gamle pull-back til det nye ved at sætte $\varphi(b, (e_1, e_2)) = (e_1, e_2)$. Så gælder $(p_1 \circ q_{E_1}) \circ \varphi = q_B$, således at det nye pull-back er en overlejring af B ækvivalent med det gamle. I det følgende vil vi reserve betegnelsen $E_1 \odot E_2$ til det nye pull-back, og vi sætter $p_1 \odot p_2 = p_1 \circ q_E$.

$$\begin{tikzcd}
E_1 \odot E_2 \arrow[dr, dashed, "p_1 \odot p_2"] & E_2 \arrow[d, "p_2"] \\
E_1 \arrow[r, "p_1"'] & B
\end{tikzcd}$$

Antallet af lag i $E_1 \odot E_2$ er lig produktet af antal lag i hver af overlejringerne. Dette ses (fx) direkte af definitionen idet elementerne i fiberen over et punkt $b \in B$ jo har formen (e_1, e_2) hvor $p_1(e_1) = p_2(e_2) = b$.

Eksempel 6.5. Vi betragter produktet af to overlejringer af S^1 ind i S^1 givet ved $z \mapsto z^n$ og $z \mapsto z^m$, hvor $n, m \in \mathbb{N}$. Vi viser at denne består af $d = \mathrm{sfd}(n, m)$ kurvesammenhængskomponenter. Dermed bliver produktoverlejringen generelt ikke kurvesammenhængende. Elementerne i produktet består af punktpar $(z, w) \in S^1 \times S^1$ med $z^n = w^m$. For at bestemme kurvesammenhængskomponenterne i produktet er det nok at bestemme antallet af punkter i fiberen over et vilkårligt punkt, fx $1 = e^{2\pi i 0}$, som ligger i samme kurvesammenhængskomponent. Vi kan nemlig forbinde et vilkårligt punkt i $S^1 \odot S^1$ med et punkt i fiberen. Antag nemlig $(z, w) \in S^1 \odot S^1$, så findes en sti i S^1, som forbinder $z^n = w^m$ og $1 = e^{2\pi i 0}$. Løftes denne sti til en sti startende i (z, w) bliver endepunktet klart et punkt i fiberen. Punkterne i denne fiber består af punkter af formen $(e^{2\pi i k/n}, e^{2\pi i l/m})$. Antag først at punkterne $(e^{2\pi i k/n}, e^{2\pi i l/m})$ og $(e^{2\pi i p/n}, e^{2\pi i q/m})$ kan forbindes med en sti i σ $S^1 \odot S^1$. Anvendes produktoverlejrings afbildningen fås altså en løkke i S^1. Da fundamentalgruppen for S^1 er $(\mathbb{Z}, +)$ må denne løkke være homotop til en løkke τ af formen $s \mapsto e^{2\pi i s h}$. Da løft af ækvivalensklasser af stier er veldefineret får vi at σ bliver kurve homotop til løftet af τ startende i $(e^{2\pi i k/n}, e^{2\pi i l/m})$. Eftersom stien $s \mapsto (e^{2\pi i (k+sh)/n}, e^{2\pi i (l+sh)/m})$ er et løft af τ startende i $(e^{2\pi i k/n}, e^{2\pi i l/m})$ fås denne bliver kurvehomotop til σ. Dermed ender de specielt i samme punkt, fås $k+h-p \in n\mathbb{Z}$ og $l+h-q \in m\mathbb{Z}$. Hvis omvendt der findes et sådant $h \in \mathbb{Z}$ ses at stien $s \mapsto (e^{2\pi i(k+sh)/n}, e^{2\pi i(l+sh)/m})$ er en sti i $S^1 \odot S^1$, der forbinder $(e^{2\pi ik/n}, e^{2\pi il/m})$ og $(e^{2\pi ip/n}, e^{2\pi iq/m})$. Vores krav er altså at der skal eksistere en løsning til kongruenserne $h \equiv p-k \pmod{n}$ og $h \equiv q-l \pmod{m}$. Det er klart at dette medfører at $p-k \equiv q-l \pmod{d}$. Antag omvendt at dette er tilfældet. Vi kan finde $A, B \in \mathbb{Z}$ så $d = An+Bm$. Sæt nu $h = An \cdot \frac{(q-l)-(p-k)}{d} + (p-k)$. Så gælder $h \equiv p-k \pmod{n}$ og $h \equiv q-l \pmod{m}$ idet $An \equiv d \pmod{m}$. Antallet af punkter i fiberen, som kan forbindes til $(e^{2\pi ik/n}, e^{2\pi il/m})$ er derfor nm/d, idet kravet til p og q kan skrives $p-q \equiv k-l \pmod{d}$. Dermed er antallet af kurvesammenhængskomponenter lig d. Produktoverlejringen bliver altså ækvivalent med d kopier af nm/d-folds overlejringen, $z \mapsto z^{nm/d}$, jævnfør eksempel 4.13.

Lemma 6.6. *Lad $p_1 : E_1 \to B$ og $p_1' : E_1' \to B$ være ækvivalente overlejringer og lad $p_2 : E_2 \to B$ og $p_2' : E_2' \to B$ være ækvivalente overlejringer. Så er overlejringerne $p_1 \odot p_2 : E_1 \odot E_2 \to B$ og $p_1' \odot p_2' : E_1' \odot E_2' \to B$ ækvivalente.*

Bevis : Lad φ_1 og φ_2 være de respektive overlejringsækvivalenser. Da er $\varphi_1 \times \varphi_2$ en overlejringsækvivalens mellem $E_1 \odot E_2$ og $E_1' \odot E_2'$. □

Sætning 6.7. *Hvis man identificerer ækvivalente overlejringer er det indførte produkt kommutativt og associativt.*

Bevis : Lemmaet gør det muligt at tale om produkt af ækvivalensklasser af overlejringer, og viser at vi kan regne med repræsentanter. Lad $p_i : E_i \to B$, $i = 1, 2, 3$ være overlejringer. Da afbildningerne $(e_1, e_2) \mapsto (e_2, e_1)$ fra $E_1 \odot E_2$ til $E_2 \odot E_1$ og $(e_1, (e_2, e_3)) \mapsto ((e_1, e_2), e_3)$ fra $E_1 \odot (E_2 \odot E_3)$ $(E_1 \odot E_2) \odot E_3$ er overlejringsækvivalenser. □

Bemærkning 6.8. Vi har nu defineret et produkt mellem ækvivalensklasser af overlejringer. Ækvivalensklassen $[B]$ hørende til den identiske overlejring $\mathrm{id}_B : B \to B$ er det neutrale element. Det er dog ikke muligt at lave en gruppestruktur på mængden af ækvivalensklasser af overlejringer med denne definition, idet vi ikke har inverse elementer. Det er heller så interessant at indføre en sum af to overlejringer $p_1 : E_1 \to B$ og $p_2 : E_2 \to B$ som afbildningen $p_1 \oplus p_2 : E_1 \amalg E_2 \to B$. Dette ville godt nok blive en overlejring, og går vi over til ækvivalensklasser, er det også let at se, at $\oplus$ bliver kommutativ og associativ, og at $\odot$ bliver distributiv over $\oplus$, men vi får ikke engang et nulelement og dermed heller ingen inverse.

Definition 6.9. Lad $p : E \to B$ være en afbildning, og lad X være et vilkårligt rum. Så siges p at have homotopi løfte egenskaben med hensyn til X, hvis der for givne kontinuerte afbildninger $f : X \to B$ og $F : X \times I \to B$ med $F(x,0) = f(x)$, hvor f har et løft $f' : X \to E$, gælder at F har et løft $F' : X \times I \to E$ med $F'(x,0) = f'(x)$. Hvis p har homotopi løfte egenskaben med hensyn til et vilkårligt rum, så siges p at være en fibrering.

Bemærkning 6.10. Sætning 3.19 viser at enhver overlejring er en fibrering. En af forskellene på fibreringer og overlejringer er at fibrene ikke nødvendigvis har den diskrete topologi. Desuden gælder der at sammensætninger af fibreringer igen giver en fibrering.

Definition 6.11. En følge af afbildninger

$$\longrightarrow (M_{i+1}, x_{i+1}) \xrightarrow{\varphi_{i+1}} (M_i, x_i) \xrightarrow{\varphi_i}$$

mellem mængder med udvalgte punkter, siges at være eksakt hvis der gælder $\ker(\varphi_i) = \operatorname{im}(\varphi_{i+1})$, hvor kernen betegner mængden af punkter, som afbildes i det udvalgte punkt.

Lemma 6.12 (Barratt-Whitehead)**.** *Lad R være en kommutativ ring med 1-element. Givet et diagram af R-moduler og homomorfier i hvilket alle kvadrater kommuterer, rækkerne er eksakte og afbildningerne γ_i er isomorfier.*

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & C_{i+1} \arrow[r, "h_{i+1}"] \arrow[d, "\gamma_{i+1}", "\simeq"'] & A_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\alpha_i"] & B_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "\beta_i"] & C_i \arrow[r, "h_i"] \arrow[d, "\gamma_i", "\simeq"'] & A_{i-1} \arrow[r, "f_{i-1}"] \arrow[d, "\alpha_{i-1}"] & {} \\
{} \arrow[r] & C'_{i+1} \arrow[r, "h'_{i+1}"'] & A'_i \arrow[r, "f'_i"'] & B'_i \arrow[r, "g'_i"'] & C'_i \arrow[r, "h'_i"'] & A'_{i-1} \arrow[r, "f'_{i-1}"'] & {}
\end{tikzcd}$$

Så findes en lang eksakt følge

$$\longrightarrow A_i \xrightarrow{\Phi_i} A'_i \oplus B_i \xrightarrow{\Psi_i} B'_i \xrightarrow{\Gamma_i} A_{i-1} \xrightarrow{\Phi_{i-1}}$$

Her er $\Phi_i(a_i) = (\alpha_i(a_i), f_i(a_i))$, $\Psi_i(a'_i, b_i) = \beta_i(b_i) - f'_i(a'_i)$ *og* $\Gamma_i = h_i {\gamma_i}^{-1} g'_i$.

Bevis : Beviset er en nådesløs diagramjagt. Vi viser eksakthed ved $A'_i \oplus B_i$. For det første gælder

$$\Psi_i \Phi_i(a_i) = \Psi_i(\alpha_i(a_i), f_i(a_i)) = \beta_i(f_i(a_i)) - f'_i(\alpha_i(a_i)) = 0$$

Antag omvendt at $(a'_i, b_i) \in \ker \Psi_i$, dvs $\beta_i(b_i) = f'_i(a'_i)$. Så gælder $b_i \in \ker g_i = \operatorname{im} f_i$ da

$$g_i(b_i) = {\gamma_i}^{-1}\gamma_i g_i(b_i) = {\gamma_i}^{-1} g'_i \beta_i(b_i) = {\gamma_i}^{-1} g'_i f'_i(a'_i) = 0$$

Vi kan altså finde a_i, så $f_i(a_i) = b_i$. Nu gælder

$$f'_i(a'_i - \alpha_i(a_i)) = f'_i(a'_i) - \beta_i(f_i(a_i)) = f'_i(a'_i) - \beta_i(b_i) = 0$$

så vi kan finde c'_{i+1} så $h'_{i+1}(c'_{i+1}) = a'_i - \alpha_i(a_i)$. Med $\tilde{a}_i = h_{i+1}{\gamma_{i+1}}^{-1}(c'_{i+1})$ gælder $\tilde{a}_i \in \ker f_i$ da $f_i(\tilde{a}_i) = f_i h_{i+1}({\gamma_{i+1}}^{-1}(c'_{i+1}) = 0$. Dermed gælder altså $f_i(a_i + \tilde{a}_i) = f_i(a_i) = b_i$. Desuden gælder

$$\alpha_i(a_i + \tilde{a}_i) = \alpha_i(a_i) + \alpha_i(h_{i+1}{\gamma_{i+1}}^{-1}(c'_{i+1})) = \alpha_i(a_i) + h'_{i+1}(c'_{i+1}) = a'_i$$

Eksaktheden ved A_i og B'_i overlades til den stadig hungrende diagramjæger.
□

Bemærkning 6.13. Vi vil i denne bemærkning studere en anvendelse af den såkaldte Mayer-Vitoris følge til bestemmelse af kurvesammenhængskomponenterne for produktoverlejringer. Man kan vise at der til en fibrering $p : (E, e_0) \to (B, b_0)$ hører en lang eksakt følge

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(F) \xrightarrow{(i_{F,E})_*} \pi_n(E) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B) \xrightarrow{\bar{\partial}} \pi_{n-1}(F) \longrightarrow \cdots \xrightarrow{p_*} \pi_0(B)$$

hvor $F = p^{-1}(b_0)$ er fiberen, $i_{E,F}$ er inklusionen, og $\bar{\partial}$ er en afbildning, vi ikke nærmere vil komme ind på. Ved et pull-back fås altså to lange eksakte følger, som i vores tilfælde er følgerne hørende til overlejringerne $p_1 : E_1 \to B$ og $q_{E_1} : E_1 \odot E_2 \to E_1$. Disse kan splejses sammen ved hjælp af Barratt-Whitehead lemmaet, idet man kan vise at fibrenes homotopigrupper bliver isomorfe. Barratt-Whitehead lemmaet giver dog ikke umiddelbart at følgerne kan splejses sammen hele vejen, idet π_1 ikke nødvendigvis er abelsk, og π_0 ikke engang er en gruppe. Disse problemer kan dog klares. Den dermed opnåede eksakte følge kaldes Mayer-Vitoris følgen hørende til pull-back'et.

$$\cdots \longrightarrow \pi_{n+1}(B) \xrightarrow{\partial} \pi_n(E_1 \odot E_2) \xrightarrow{(q_{E_1})_* \times (q_{E_2})_*} \pi_n(E_1) \oplus \pi_n(E_2) \xrightarrow{(p_2)_* - (p_1)_*}$$

$$\pi_n(B) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \pi_1(E_1 \odot E_2) \xrightarrow{(q_{E_1})_* \times (q_{E_2})_*} \pi_1(E_1) \times \pi_1(E_2) \xrightarrow{(p_2)_* \cdot (p_1)_*{}^{-1}}$$

$$\pi_1(B) \longrightarrow \pi_0(E_1 \odot E_2) \xrightarrow{\partial} \pi_0(E_1 \times E_2)$$

Antag først at $E_1 \odot E_2$ er kurvesammenhængende. Da er $\pi_0(Z)$ en et-punkts mængde, så idet følgen er eksakt ved $\pi_1(B)$ at $(p_2)_*(\pi_1(E_2)) * (p_1)_*(\pi_1(E_1)) = \pi_1(B)$, idet vi benytter at $(p_1)_*(\pi_1(E_1))$ er en gruppe. Hvis omvendt $(p_2)_*(\pi_1(E_2)) * (p_1)_*(\pi_1(E_1)) = \pi_1(B)$ og E_1 og E_2 er kurvesammenhængende ses at $\pi_0(E_1 \times E_2)$ består af et punkt. Af eksaktheden ved $\pi_0(E_1 \odot E_2)$ fås så at $\partial : \pi_1(B) \to \pi_0(E_1 \odot E_2)$ er surjektiv. Omvendt ses af eksaktheden ved $\pi_1(B)$ at $\partial(\pi_1(B))$ består af et punkt. Dermed bliver $E_1 \odot E_2$ kurvesammenhængende. I tilfældet af overlejringerne af S^1 fra eksempel 6.5 ses at $S^1 \odot S^1$ er kurvesammenhængende netop hvis $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ dvs netop hvis $\mathrm{sfd}(n, m) = 1$, hvilket stemmer overens med det ved direkte udregning fundne resultat.

References

[1] Christian Berg. *Matematik 2MA, Matematisk Analyse*, chapter I. Metriske Rum. Københavns Universitet. Matematisk Institut, 1992–93.
[2] Ronald Brown. *Elements of Modern Topology.* McGraw-Hill Ltd., 1968.
[3] Eldon Dyer and Joseph Roitberg. Note on sequences of mayer-vitoris type. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 80(4):660–662, December 1980.
[4] Brayton Gray. *Homotopy Theory.* Academic Press, Inc., 1975.
[5] M. J. Greenberg and J. R. Harper. *Algebraic Topology, a first course.* Addison-Wesley, Inc., 1981.
[6] Christian U. Jensen. Matematik 3al. Noter, Københavns Universitet. Matematisk Institut, 1993.
[7] William S. Massey. *A Basic Course in Algebraic Topology.* Graduate Texts in Mathematics, 127. Springer-Verlag New York Inc., 1991.
[8] James R. Munkres. *Topology, a first course.* Prentice-Hall, Inc., 1975.
[9] Jørn B. Olsson. Matematik 2al. Noter, Københavns Universitet. Matematisk Institut, 1992.
[10] Joseph J. Rotman. *An Introduction to Algebraic Topology.* Graduate Texts in Mathematics, 119. Springer-Verlag New York Inc., 1988.
[11] Edwin H. Spanier. *Algebraic Topology.* McGraw-Hill Ltd., 1966.
[12] George W. Whitehead. *Elements of Homotopy Theory.* Graduate Texts in Mathematics, 61. Springer-Verlag New York Inc., 1978.