Matematik 3 GE

Dette er en skriftlig prøve på 4 timer. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.
Der er i alt 12 spørgsmål fordelt på 4 opgaver. Disse tillægges tilnærmelsesvist samme vægt, idet det dog gælder, at sættes vurderes samlet. Bemærk i øvrigt, at visse spørgsmål kan regnes uafhængigt af de foregående.

Opgave 1

1°: Begrund, at $S_0 = \{(x, y, z) \mid \sin x + \sin y + \sin z = 0\}$ er en regulær flade i $\mathbb{R}^3$.

2°: Lad $S^2_{\pi/4}$ være overfladen af kuglen i $\mathbb{R}^3$ med centrum i $(0, 0, 0)$ og radius $\pi/4$ og lad $\tilde{S}$ være billedet af $S^2_{\pi/4}$ under afbildningen

$$(x, y, z) \mapsto (\sin x, \sin y, \sin z).$$

Bevis, at $\tilde{S}$ er en regulær flade.

Opgave 2

I denne opgave betragtes loxodromer på enhedskugleoverfladen $S = S^2$ i $\mathbb{R}^3$. Disse er (se evt. Do Carmo s. 96) kurver, der skærer meridianerne under en konstant vinkel β. Lad

$$X(u, v) = (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v)$$

betegne en sædvanlig parametrisering af S^2, defineret på

$$U = \{(u, v) \mid -\pi < u < \pi \text{ og } 0 < v < \pi\}.$$

1°: Bevis, at paralleltransport langs en loxodrom fra et punkt $p_0 = X(u_0, v_0)$ til et punkt $p_1 = X(u_1, v_1)$, og som helt forløber inden for området dækket af parametriseringen, er givet ved en drejning af parallelfeltet i forhold til X_u på

$$\phi = \pm \tan(\beta) \cdot \ln(\frac{\sin v_1}{\sin v_0}).$$

2°: Lad $q_0 = (0, 1, 0)$ og betragt den loxodrom α, der starter i q_0 med tangentvektoren $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ (hermed er skæringsvinklen β fastlagt). Lad $q_1 = X(u_1, v_1)$ være et vilkårligt punkt på α og lad C være den del af α, der forløber mellem q_0 og q_1. Bestem

$$\int_C k_g(s) ds.$$

3°: Lad $q_2 = (\sin v_2, 0, \cos v_2)$ være det første skæringspunkt mellem kurven α fra spørgsmål 2° og xz-planen og lad $N = (0, 0, 1)$. Betragt trekanten T hvis hjørner er N, q_0, q_2, og hvis sider er: loxodromen fra q_0 til q_2, storcirklen fra q_2 til N og storcirklen fra N til q_0. Udtryk arealet af T ved v_2. Bestem endelig v_2.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3

Betragt de regulære flader (skal ikke bevises) $S_1 = \{(x,y,z) \mid z = x^2 + y^2 \text{ og } x, y \in \mathbb{R}\}$ og $S_2 = \{(x,y,z) \mid z = x^2 - y^2 \text{ og } x > y > 0\}$.

1°: Bevis, at restriktionen af funktionen $F(x,y,z) = |z|$ til S_1 er differentiabel overalt, og at restriktionen til S_2 af funktionen $G(x,y,z) = \frac{1}{|z|}$ ligeledes er differentiabel overalt.

2°: Bestem, for både S_1 og S_2, hvorvidt restriktionen af funktionen $H(x,y,z) = |x|$ til fladen er overalt differentiabel.

Opgave 4

En delmængde S af $\mathbb{R}^3$ konstrueres som følger: Lad S^1 betegne cirklen med ligningen $x^2 + y^2 = 4$ i xy-planen, og lad AB betegne det åbne liniestykke i yz-planen givet ved $y = 2, |z| < 1$. Centret c af AB bevæges rundt langs S^1, idet AB samtidigt drejes således, at når c er drejet vinklen u hen til et punkt $c(u)$, da er AB også drejet vinklen u i planen vinkelret til tangenten til S^1 i $c(u)$. Når c har fuldført en omdrejning vender liniestykket således tilbage til sin oprindelige position. (S er dermed *ikke* Möbius-båndet). Lad

$$U = \{(u,v) \mid 0 < u < 2\pi \text{ og } -1 < v < 1\} \text{ og}$$

$$X(u,v) = \{(2 - v\sin u)\sin u, (2 - v\sin u)\cos u, v\cos u) \text{ for } (u,v) \in U.$$

Helt konkret er da $S = X(U) \cup AB$. Det kan bruges uden bevis, at S er en regulær flade.

1°: Bevis, at $X : U \mapsto S$ er en parametrisering.

2°: Udregn koefficienterne til den første fundamentalform i et vilkårligt punkt $p \in X(U)$.

3°: Angiv i et vilkårligt punkt $q \in S$ mindst én geodætisk kurve på S gennem q.

4°: Udregn koefficienterne til den anden fundamentalform i punktet $p_0 = X(\pi, 0)$. (Bemærk, at mange led i det generelle udtryk bliver 0 i det anførte punkt.)

5°: Angiv hovedretningerne og hovedkrumningerne i punktet $p_0 = X(\pi, 0)$.