Matematik 3 GE

Dette er en skriftlig prøve på 4 timer. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.
Der er ialt 12 spørgsmål fordelt på 2 opgaver. Disse tillægges tilnærmelsesvist samme vægt, idet det dog gælder, at sættes vurderes samlet. Bemærk i øvrigt, at visse spørgsmål kan regnes uafhængigt af de foregående.

Opgave 1

Der betragtes en regulær flade $S \subset \mathbb{R}^3$ samt en lokal parametrisering (X, U) af denne. Det antages, at $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0 \text{ og } v > 0\}$ samt at koefficienterne til den første fundamentalform med hensyn til denne parametrisering er givet ved

$$E(u,v) = u^4, \quad F(u,v) = 0 \qquad \text{og} \qquad G(u,v) = v^4.$$

1°: Find samtlige Christoffelsymboler (mht. (X,U)).

2°: Bevis, at Gausskrumningen K er identisk nul på $X(U)$.

3°: Lad $t \to \alpha(t) = X(u(t), v(t))$ være en kurve i $X(U)$ defineret i et interval I, der indeholder 0. Bevis, at et vektorfelt $Y(t) = Y^1(t)X_u(\alpha(t)) + Y^2(t)X_v(\alpha(t))$ langs α er parallelt langs α, netop hvis

$$\forall t \in I : Y^1(t) = \frac{u^2(0)Y^1(0)}{u^2(t)} \text{ og } Y^2(t) = \frac{v^2(0)Y^2(0)}{v^2(t)},$$

og bevis herved, at paralleltransport mellem to punkter $p, q \in X(U)$ er uafhængig af, hvilken kurve fra p til q der paralleltransporteres langs.

4°: Lad $p = X(1,1)$ og lad $X_p = X_u + 3X_v \in T_p(S)$. Find paralleltransporten $X_q = \mathcal{P}_\alpha^q(X_p) \in T_q(S)$ af X_p langs en kurve α i $X(U)$ fra p til q, hvor $q = X(2,3)$, og bevis ved eksplicit udregning, at

$$\|X_p\|_{T_p(S)} = \|X_q\|_{T_q(S)}.$$

5°: Antag, at $\beta(s) = X(u(s), v(s))$ er en geodæt. Bevis, at funktionen $u^2 \cdot \frac{du}{ds}$ er konstant.

6°: Find det generelle udtryk i $X(U)$ for en geodæt $s \to \beta(s)$, der opfylder, at $\beta(0) = X(1,1)$.

Opgave 2

Lad α være en simpel regulær lukket plan kurve (løber altså glat ind i sig selv). Tænk på α som beliggende i den kopi af $\mathbb{R}^2$, der svarer til planen $\mathcal{P} = \{(x,y,z) \mid x = 1\}$,

Opgave 2 fortsættes på side 2

altså $\alpha(s) = (1, y(s), z(s))$. Antag yderligere, at α er parametriseret ved buelængde. En delmængde $S = S_\alpha$ af $\mathbb{R}^3$ konstrueres nu som følger: Gennem hvert punkt P på kurven α tegnes linien $t \cdot \overrightarrow{OP}$, idet parameteren t dog indskrænkes til at ligge i $]0, 2[$. S_α defineres da til at være foreningsmængden af alle disse liniestykker for P gennemløbende sporet af α. Det antages yderligere, at krumningen af α aldrig bliver 0.

1°: Vis, at S_α er en regulær flade.

2°: Udregn koefficienterne E, F, G til den første fundamentalform for S_α m.h.t. en parametrisering af typen

$$X(s,t) = (t, t \cdot y(s), t \cdot z(s)),$$

med definitionsmængderne for s og t passende indskrænket.

3°: Udregn koefficienterne til den anden fundamentalform samt hovedkrumningerne i et punkt P på kurven, for hvilket $\overrightarrow{OP}$ er vinkelret på tangenten til kurven i P (det antages, at sådanne punkter findes), og udtryk disse størrelser ved krumningen (med fortegn) af α samt længden $\|\overrightarrow{OP}\|$ af $\overrightarrow{OP}$.

4°: Antag nu, at definitionsområdet for X er størst muligt m.h.t. førstekoordinaten s. Bevis, at andenkoordinatkurverne $t \to X(s,t)$ altid er geodæter, hvorimod førstekoordinatkurverne $s \to X(s,t)$ ikke kan være det på hele definitionsområdet, idet sidstnævnte ville kræve, at $(y(s), z(s))$ og $(y'(s), z'(s))$ var proportionale i hele definitionsmængden for α.

5°: Lad nu β være en kurve i $\mathcal{P}$ af samme slags som α, og lad S_β betegne den tilsvarende flade. Bevis, at S_α og S_β er diffeomorfe.

6°: Lad $C_{\gamma_1} = \{(1, y, z) \mid \frac{y^6}{a^6} + \frac{z^6}{b^6} = 1\}$ fremkomme som sporet af en simpel regulær lukket plan kurve γ_1 (dette skal ikke bevises), og lad $C_{\gamma_2} = \{(1, y, z) \mid \frac{y^6}{b^6} + \frac{z^6}{a^6} = 1\}$ fremkomme som sporet af en tilsvarende kurve γ_2. Bevis, at S_{γ_1} og S_{γ_2} er isometriske.