Opgave 3 fra eksamen vinteren 96/97

Rasmus Ejlers Møgelberg

11. december 2001

a: Lad $f : M \to N$ være en kontinuert funktion, og lad $A \subseteq N$. Nu er $f^{-1}(\text{int } A)$ en åben mængde, da f er kontinuert, og det er klart at $f^{-1}(\text{int } A) \subseteq f^{-1}(A)$. Da int $f^{-1}(A)$ er den største åbne mængde indeholdt i $f^{-1}(A)$ er

$$f^{-1}(\text{int } A) \subseteq \text{int } f^{-1}(A).$$

Da cl A er en afsluttet mængde og f er kontinuert, er $f^{-1}(\text{cl } A)$ en afsluttet mængde, der indeholder $f^{-1}(A)$. Da cl $f^{-1}(A)$ er den mindste afsluttede mængde, der indeholder $f^{-1}(A)$ må

$$\text{cl } f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(\text{cl } A).$$

Dette viser de to første inklusioner. Den tredje fås ved hjælp af disse samt identiteten $\partial A = \text{cl } A \setminus \text{int } A$:

$$f^{-1}(\partial A) = f^{-1}(\text{cl } A \setminus \text{int } A) = f^{-1}(\text{cl } A) \setminus f^{-1}(\text{int } A)$$

$$\supseteq \text{cl } f^{-1}(A) \setminus \text{int } f^{-1}(A) = \partial f^{-1}(A).$$

b: Antag nu, at f er en afbildning, hvorom der gælder at for enhver mængde A er

$$f^{-1}(\text{int } A) \subseteq \text{int } f^{-1}(A).$$

Vi skal vise, at f er kontinuert. Når A er åben skal vi altså vise at $f^{-1}(A)$ er åben. Men A er åben netop hvis $A = \text{int } A$, så vi får

$$f^{-1}(A) = f^{-1}(\text{int } A) \subseteq \text{int } f^{-1}(A).$$

Dermed er $f^{-1}(A) = \text{int } f^{-1}(A)$, hvilket betyder at den er åben.