Eksamen sommer 99 opgave 3

Rasmus Ejlers Møgelberg

11. december 2001

Lad $\mathbb{R}^{(\infty)}$ betegne mængden af reelle talfølger, der er nul fra et vist trin. For ethvert naturligt tal n defineres indlejringen $j_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{(\infty)}$ ved $j_n(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$.

<u>a:</u> Vi skal vise at $\text{card}(\mathbb{R}^{(\infty)}) = \aleph$. Vi bemærker at j_n er injektiv, og dermed en bijektion på sit billede, så $\text{card}(j_n(\mathbb{R}^n)) = \aleph$. Endvidere bemærkes at

$$\mathbb{R}^{(\infty)} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} j_n(\mathbb{R}^n).$$

Så $\mathbb{R}^{(\infty)}$ er en tællelig forening af mængder af kardinalitet $\aleph$. Det medfører ifølge regnereglerne, at $\text{card}(\mathbb{R}^{(\infty)}) = \aleph$.

<u>b:</u> Nu lader vi $\mathbb{Z}^{(\infty)}$ betegne mængden af følger af heltal, der er nul fra et vist trin. Vi skal vise at $\mathbb{Z}^{(\infty)}$ er numerabel.

Definer som før indlejringer $i_n : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^{(\infty)}$. Vi bemærker at $\text{card}(i_n(\mathbb{Z}^n)) = \text{card}(\mathbb{Z}^n) = \aleph_0$, og at:

$$\mathbb{Z}^{(\infty)} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} i_n(\mathbb{Z}^n).$$

Så $\mathbb{Z}^{(\infty)}$ er en tællelig forening at tællelige mængder, og derfor selv tællelig.

<u>c:</u> Vi udstyrer nu $\mathbb{R}^{(\infty)}$ med finaltopologien $\mathcal{T}$ mht. afbildningerne j_n, idet $\mathbb{R}^n$ udstyres med den sædvanlige topologi.

Vi skal vise at

$$G = \{\, x = (x_n) \in \mathbb{R}^{(\infty)} \mid |x_n| < \frac{1}{n} \text{ for alle } n \in \mathbb{N} \,\}$$

er en åben delmængde af $\mathbb{R}^{(\infty)}$. I følge definitionen af finaltopologi (sætning 4.12), skal vi vise at $i_n^{-1}(G)$ er åben i $\mathbb{R}^n$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Men

$$i_n^{-1}(G) =]-1, 1[\times \dots \times]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[,$$

som er åben.

Definer nu:

$$F = \{ x = (x_n) \in \mathbb{R}^{(\infty)} \mid |x_n| \leq \frac{1}{n} \text{ for alle } n \in \mathbb{N} \}.$$

Vi skal vise at F er afsluttet. For alle $k \in \mathbb{N}$ lad $p_k : \mathbb{R}^{(\infty)} \to \mathbb{R}$ betegne projektionen på den k'te koordinat, dvs $p_k(x) = x_k$. Lad os vise at p_k er kontinuert. I følge sætning 4.14 er det nok at vise, at $p_k \circ i_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ er kontinuert for alle n. Men

$$p_k \circ i_n(x_1, \ldots x_n) = \begin{cases} x_k & \text{hvis } k \leq n, \\ 0 & \text{hvis } k > n. \end{cases}$$

Så p_k er kontinuert. Mængden $p_k^{-1}([-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}])$ er derfor afsluttet. Nu mangler vi blot at bemærke at

$$F = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} p_k^{-1}([-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}])$$

Dvs, F er en fællesmængde af afsluttede mængder og derfor afsluttet.