Vejledende besvarelse af opgave II.4.11

Rasmus Ejlers Møgelberg

23. november 2001

Vi betragter et produkt $M \times N$ af to topologiske rum. Hvis $A \subseteq M \times N$ og $x \in M$, kan vi definere snitmængden $A_x \subseteq N$ som:

$$A_x = \{y \in N | (x, y) \in A\}$$

Vi skal vise at hvis A er åben hhv. afsluttet, så bliver A_x åben hhv. afsluttet.

Lad $i_x : N \to M \times N$ betegne afbildningen givet ved $i_x(y) = (x, y)$. Vi vil vise at denne er kontinuert. Lad $\pi_N : M \times N \to N$ og $\pi_M : M \times N \to M$ betegne projektionerne. For at vise at i_x er kontinuert er det i følge Korollar 4.11 nok at vise at $\pi_N \circ i_x$ og $\pi_M \circ i_x$ er kontinuerte. Men $\pi_N \circ i_x$ er identiteten, og $\pi_M \circ i_x$ er den konstante afbildning til x. Så i_x er kontinuert.

Bemærk nu at $i_x^{-1}(A) = A_x$. Så hvis A er åben hhv. afsluttet er A_x åben hhv. afsluttet.

Lad $f : M \times N \to T$ være en kontinuert afbildning ind i et topologisk rum, og definer snitafbildningen $f(x, \cdot) : N \to T$ som afbildningen $y \mapsto f(x, y)$. Vi skal vise at $f(x, \cdot)$ er kontinuert.

Men $f(x, \cdot) = f \circ i_x$ som er en sammensætning af kontinuerte afbildninger, og derfor kontinuert.