Vejledende besvarelse af opgave II.1.7

Rasmus Ejlers Møgelberg

5. november 2001

Lad $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ være topologier på den samme mængde M, og lad $\overline{A}^1$ henholdsvis $\overline{A}^2$ betegne afslutningen af A i $\mathcal{T}_1$ hhv. $\mathcal{T}_2$. Vi skal vise, at $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ hvis og kun hvis $\overline{A}^2 \subseteq \overline{A}^1$ for alle $A \subseteq M$.

Antag først, at $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Det betyder at for hvert $A \subseteq M$ er $\overline{A}^1$ en afsluttet mængde i topologien $\mathcal{T}_2$. Da $\overline{A}^1$ indeholder A, giver sætning 1.14 nu, at $\overline{A}^2 \subseteq \overline{A}^1$.

Antag omvendt, at $\overline{A}^2 \subseteq \overline{A}^1$ for alle delmængder A. Vi vil vise at $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ ved at vise, at enhver mængde, der er afsluttet i $\mathcal{T}_1$, er afsluttet i $\mathcal{T}_2$. A er afsluttet i $\mathcal{T}_1$ netop hvis $A = \overline{A}^1$. Så hvis A er afsluttet i $\mathcal{T}_1$ giver antagelsen, at $A \subseteq \overline{A}^2 \subseteq \overline{A}^1 = A$, og dermed $\overline{A}^2 = A$. Altså er A afsluttet i $\mathcal{T}_2$.