Vejledende besvarelse af opgave II.1.2

Rasmus Ejlers Møgelberg

29. oktober 2001

Lad M være en ikke-tom mængde. Vi definerer systemet:

$$\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{P}(M) | \complement A \text{ er endelig}\} \cup \{\emptyset\}$$

Vi ønsker at vise at $\mathcal{T}$ er en topologi. Dvs. vi vil vise at $\mathcal{T}$ opfylder betingelserne på side 2.1 i noterne.

- Lad $(A_i)_{i \in I}$ være en familie af mængder i $\mathcal{T}$. Hvis alle $A_i = \emptyset$, da er $\bigcup_{i \in I} A_i = \emptyset \in \mathcal{T}$. Hvis ikke alle A_i er tomme, kan vi antage at $A_j \neq \emptyset$, og vi har at $\complement(\bigcup_i A_i) = \bigcap_i \complement A_i \subseteq \complement A_j$ er endelig. Dette viser at $\bigcup_i A_i \in \mathcal{T}$.
- Lad A,$B \in \mathcal{T}$. Hvis en af mængderne er tomme har vi $A \cap B = \emptyset \in \mathcal{T}$. Ellers er $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$, altså en forening af endelige mængder, og derfor selv endelig. Så $A \cap B \in \mathcal{T}$.
- $\emptyset \in \mathcal{T}$ pr. def., og da $\complement M = \emptyset$, som er endelig, er $M \in \mathcal{T}$.

Så vi har vist at $\mathcal{T}$ er en topologi.

De afsluttede mængder er komplementerne til mængderne i $\mathcal{T}$. Dvs. at de afsluttede mængder er de endelige mængder, samt M.

Lad A være en uendelig mængde. Vi skal vise at $\bar{A} = M$. Vi ved at $\bar{A}$ er en afsluttet mængde, der indeholder A. Den eneste uendelige afsluttede delmængde af M er M, så vi konkluderer at $\bar{A} = M$.