Vejledende besvarelse af opgave I.4.3

Rasmus Ejlers Møgelberg

1. oktober 2001

Betragt udsagnet:

Axiom 1 For ethvert ikke tomt mængdesystem $(A_i)_{i\in I}$ af ikke tomme mængder er $\prod_{i\in I} A_i$ ikke tomt.

Vi skal vise at axiom 1 er logisk ækvivalent med udvalgsaxiomet. Vi har defineret $\prod_{i\in I} A_i$ som mængden af afbildninger $f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ hvor $f(i) \in A_i$.

Lad os først antage udvalgsaxiomet og vise axiom 1. Lad $(A_i)_{i\in I}$ være et ikke tomt system af ikke tomme mængder og lad

$$u : \mathcal{P}(\cup_{i\in I} A_i) \setminus \{\emptyset\} \to \bigcup_{i\in I} A_i$$

være en udvalgsfunktion. Det betyder bl.a. at $u(A_i) \in A_i$ for alle $i \in I$. Så vi kan definere $f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ ved $f(i) = u(A_i)$. Nu er f et element i $\prod_{i\in I} A_i$, som altså ikke er tom.

Antag nu axiom 1, og lad X være en ikke tom mængde. Vores opgave er nu at konstruere en udvalgsfunktion på X. Lad os som indexmængde I vælge $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ og $A_B = B$ for $B \in I$. Produktet

$$\prod_{B\in\mathcal{P}(X)\setminus\{\emptyset\}} B$$

er nu ikke tomt, så lad os vælge f i dette produkt. Per definition er nu f en afbildning $f : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \to \bigcup_{B\in\mathcal{P}(X)\setminus\{\emptyset\}} B = X$, der opfylder at $f(B) \in B$ for alle ikke tomme $B \subseteq X$. Dvs. f er en udvalgsfunktion.