Vejledende besvarelse af opgave I.1.1

Rasmus Ejlers Møgelberg

17. september 2001

Vi skal vise at R_f er en ækvivalensrelation, dvs. vi skal vise, at den er refleksiv, symmetrisk og transitiv.

- Refleksivitet: Hvis $x \in M$, skal $(x,x) \in R_f$. Dette gælder, da $f(x) = f(x)$.
- Symmetri: Hvis $(x,y) \in R_f$, skal vi vise at $(y,x) \in R_f$. Men dette gælder, da vi har antaget at $f(x) = f(y)$.
- Transitivitet: Hvis $(x,y) \in R_f$ og $(y,z) \in R_f$, skal vi vise at $(x,z) \in R_f$. Men $(x,z) \in R_f$, da $f(x) = f(y) = f(z)$.

Så dette viser at R_f er en ækvivalensrelation. Vi skriver $x \sim y$ for $(x,y) \in R_f$, og det er hermed klart at $x \sim y \iff (x,y) \in R_f \iff f(x) = f(y)$.

Den til x hørende ækvivalensklasse $[x]$ er den delmængde af M, der består af elementerne ækvivalente med x. Dvs. $[x] = \{y \in M | y \sim x\} = \{y \in M | f(y) = f(x)\} = f^{-1}(f(x))$. Da f er antaget surjektiv, er ingen af mængderne $f^{-1}(n), n \in N$, tomme, og vi får at

$$\{[x] | x \in M\} = \{f^{-1}(n) | n \in N\}$$

som ønsket.

Herefter betragtes en situation, hvor der er givet en ækvivalensrelation $\sim$ i M, og vi skal konstruere en surjektiv afbildning f på et eller andet rum N, så at hvis $\sim_f$ er den til f knyttede ækvivalensrelation (som ovenfor), så er $\sim$ lig med $\sim_f$, eller med andre ord, $x \sim y \iff x \sim_f y$.

Sæt $N = M/\sim$ og lad f være afbildningen der sender x over i klassen $[x]$; altså, $f(x) = [x]$. Da enhver af ækvivalensklasserne er billede af et element af M, er f surjektiv. At sige at $x \sim y$ er det samme som at sige at x og y repræsenterer samme ækvivalensklasse, så $x \sim y \iff [x] = [y] \iff f(x) = f(y) \iff x \sim_f y$, som ønsket.