Københavns Universitet
Matematisk Afdeling December 2001

Matematik 3GT, E2001
EKSTRAOPGAVE E.3

Lad $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ være et begrænset interval og betegn med D mængden af *intervalinddelinger af* $[a, b]$ *med udvalgte punkter*, dvs. D er mængden af par $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ med $\boldsymbol{x} = (x_i)_{0 \le i \le n}$ og $\boldsymbol{\xi} = (\xi_i)_{1 \le i \le n}$, hvor $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ og $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$ for $i = 1, \ldots, n$, og hvor n tillades at være et vilkårligt naturligt tal. Et typisk element i D betegnes f.eks. α. Hvis $\alpha = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) \in D$, er $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ det i'te *delinterval* hørende til α, og $|I_i| = x_i - x_{i-1}$ den tilhørende længde. Med $\sigma = \sigma(\alpha)$ betegnes intervalinddelingens *finhed*, dvs. $\sigma = \max_{1 \le i \le n} |I_i|$.

Med D_0 betegnes mængden D forsynet med relationen "*videredeling*", dvs. i denne relation, skrevet "$\le$", betyder $\alpha \le \beta$, at hvert delinterval hørende til α er en foreningsmængde af delintervaller hørende til β.

Med D_1 betegnes ligeledes mængden D, men forsynet med relationen "*finere finhed*", dvs. i denne relation, skrevet "$\preccurlyeq$", betyder $\alpha \preccurlyeq \beta$, at $\sigma(\beta) \le \sigma(\alpha)$.

(i) Bevis, at såvel D_0 som D_1 er opad filtrerende præordninger.

(ii) Lad $S : D \to M$ være en afbildning fra D ind i det topologiske rum M. Se på de to net $(S(\alpha))_{\alpha \in D_0}$ og $(S(\alpha))_{\alpha \in D_1}$ og vis, at et af disse net på naturlig måde, dvs. via sammensætning med den identiske afbildning, er et delnet af det andet.

(iii) Vis, at såfremt $(S(\alpha))_{\alpha \in D_1}$ er konvergent med grænsepunkt $t \in M$, så er også $(S(\alpha))_{\alpha \in D_0}$ konvergent med grænsepunkt t. Vis ved et eksempel, at det omvendte ikke behøver være tilfældet. *Vejledning.* F.eks. kunne $S(\alpha)$ afhænge af om et bestemt delepunkt er med i $\boldsymbol{x}$ eller ej).

(iv) Lad der nu tillige være givet en reel funktion $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$. For $\alpha = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) \in D$ betegner $S_f(\alpha)$ den tilhørende *middelsum*, altså

$$S_f(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)|I_i| \, .$$

Vis, at nettet $(S_f(\alpha))_{\alpha \in D_0}$ er konvergent med grænseværdi $I \in \mathbb{R}$, hvis og kun hvis nettet $(S_f(\alpha))_{\alpha \in D_1}$ er konvergent med grænseværdi I. *Vejledning.* Vis først, at såfremt $\lim_{D_0} S_f(\alpha)$ eksisterer, så er f begrænset.

Vi siger at f er *Riemann integrabel* såfremt $(S_f(\alpha))_{\alpha \in D_1}$ er konvergent, og i bekræftende fald defineres *Riemann-integralet* af f, her betegnet *R-* $\int$, ved

$$R\text{-} \int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha \in D_1} S_f(\alpha) \, .$$

Diskutér denne definition i lyset af definitioner fra tidligere undervisning — er der overensstemmelse? (I Mat 2AN, Niels Grønbæks noter, ser man på sagen ud fra en funktionalanalytisk synsvinkel, hvilket gør sammenligning lidt sværere — se dog 2AN, Korollar 7.11).

Frivillige ekstrasprgsmål:

(v) Vi indfører nu en tredie opad filtrerende præordning, som vi betegner D_2. For denne er grundmængden ikke D, men mængden af tripler $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}, \sigma)$, hvor $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) \in D$ og $\sigma \in \mathbb{R}_+^{[a,b]}$ og hvor det forlanges, at $\xi_i - \sigma(\xi_i) \leq x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i \leq \xi_i + \sigma(\xi_i)$; $i = 1, \ldots, n$ (igen med $n =$ antal intervaller i intervalinddelingen). Et typisk element i D_2 betegnes $\beta : \beta = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}, \sigma)$. Funktionen σ kaldes *finhedsfunktionen* for β. Definér relationen "finere finhedsfunktion" ved $\beta_1 \leq \beta_2 \iff \sigma_2 \leq \sigma_1$ (med oplagte betegnelser). Vis, at D_2 med denne relation virkelig er en opad filtrerende præordning. *Vejledning.* Vis ved et kompakthedsræsonnement, at der for alle $\sigma \in \mathbb{R}_+^{[a,b]}$ findes $\boldsymbol{x}$ og $\boldsymbol{\xi}$, så $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}, \sigma) \in D_2$.

(vi) For $\beta = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}, \sigma) \in D_2$ og $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ defineres *middelsummen* $S_f(\beta)$ ved $S_f(\beta) = S_f(\alpha)$ med $\alpha = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$. Hvis grænseværdien for nettet $(S_f(\beta))_{\beta \in D_2}$ eksisterer, siges f at være *Kurzweil-Henstock-integrabel*, og *Kurzweil-Henstock* integralet af f defineres ved

$$KH\text{-}\int_a^b f(x)dx = \lim_{\beta \in D_2} S_f(\beta) .$$

Vis via betragtninger omkring net og delnet, at såfremt f er Riemann-integrabel, er f også Kurzweil-Henstock integrabel og

$$KH\text{-}\int_a^b f(x)dx = R\text{-}\int_a^b f(x)dx .$$

(vii) Angiv et eksempel på en Kurzweil-Henstock integrabel funktion, der ikke er Riemann integrabel. *Vejledning.* Se f.eks. på indikatorfunktionen $f = 1_A$ med A en tællelig tæt delmængde af $[a, b]$. En anden mulighed er at angive en ubegrænset Kurzweil-Henstock integrabel funktion, f.eks. $f(x) = x^{-2}$ for $x \in]0, 1[$ og $f(0) = 5$.

Bemærkning. Videre undersøgelser viser, at enhver Lebesgue integrabel funktion på $\mathbb{R}$ er Kurzweil-Henstock integrabel og har samme integral. Kurzweil-Henstock integralet er altså et "Riemann-agtigt" integral, der er mere generelt end Lebesgue integralet (se også (viii)). Det kaldes også *det generaliserede* eller *det fuldstændige Riemann integral.*

(viii) Bevis, at hvis $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ har en stamfunktion i $[a, b]$, altså hvis der findes en funktion $F \in \mathbb{R}^{[a,b]}$, der er differentiabel i $[a, b]$ med $F' = f$, så er f Kurzweil-Henstock integrabel og

$$KH\text{-}\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) .$$

Vejledning. Til $\varepsilon > 0$ og $\xi \in [a, b]$ findes $\sigma(\xi) > 0$, så

$$|F(\xi + h) - F(\xi - k) - (h + k)f(\xi)| < \varepsilon(h + k)$$

for alle (h, k) med $0 \leq h < \sigma(\xi)$ og $0 \leq k < \sigma(\xi)$. Udnyt dette sammenholdt med en vurdering af typen

$$|F(b) - F(a) - S_f(\beta)| \leq \sum_{i=1}^{n} |F(x_i) - F(x_{i-1}) - (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i)| \, .$$

Bemærkning. Kurzweil-Henstock integralet er dermed et “bedre” integral end Lebesgue integralet! (En differentialkvotient behøver ikke være Lebesgue integrabel — se f.eks. på $f = F'$ med $F(x) = x^2 \sin(x^{-1})$; $x \in [-1, 1]$). Man kan dog vise, at de to integralbegreber stemmer overens for ikke-negative funktioner.