Københavns Universitet November 2001
Matematisk Afdeling

Ekstraopgave E.2, Mat 3GT

Lad $(M, \mathcal{T})$ være Sorgenfrey-planen, dvs. $M = \mathbb{R}^2$ forsynet med produkttopologien der fås ved at forsyne $\mathbb{R}$ med topologien frembragt af intervallerne af formen $[a, b[$ (jf. Opgave II 2.2).

a) Vis, at alle rektangler $[a, b[\times[c, d[$ er åbne og afsluttede i $(M, \mathcal{T})$, og at indikatorfunktionen for et sådant rektangel er kontinuert. Vis, at $(M, \mathcal{T})$ opfylder T_1 og $\mathrm{T}_{3.5}$.

b) Vis, at $(M, \mathcal{T})$ ikke opfylder T_4. Det kan gøres i følgende skridt:

(1) Lad L være linien $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -y \}$. Vis, at alle delmængder af L er afsluttede i M.

(2) Vis, at $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ er tæt i M, og dermed, at enhver kontinuert reel funktion på M er bestemt ved sine værdier på $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Vis, at kardinaliteten af $\mathcal{C}(M)$ er $\leq \aleph$.

(3) Antag, at M er T_4. Vis, at så vil der for enhver ægte ikke-tom delmængde A af L findes en kontinuert funktion f så at $f(A) = \{0\}$ og $f(L \setminus A) = \{1\}$. Vis, at så er kardinaliteten af $\mathcal{C}(M)$ mindst $2^{\aleph}$, i strid med (2).