# Fundamentalgruppen og Brouwers fixpunktsætning

I dette dokument vil vi vise nogle anvendelser af fundamentalgruppen og ikke mindt de funktorielle egenskaber af denne (beskrevet nedenfor) på klassiske topologiske problemer. Specielt vil vi vise følgende sætning:

**Sætning 1.** *Tag et kort over København, krøl det sammen og kast det op i luften, således at det lander indenfor det område beskrevet på kortet. Da vil et af punkterne på kortet lande lige over det punkt i København det beskriver.*

Dog vil vi vise sætningen i en noget anden formulering.

## 1 Fundamentalgruppen

Læseren forudsættes bekendt med 3. Kapitel i Christian Bergs noter til matematik 3GT. Vi vil dog kort skitsere de vigtigste begreber herfra nedenfor.

Udgangspunktet er et topologisk rum, som vi i det følgende vil antage er kurvesammenhængende. I dette rum har vi valgt et punkt, og vi noterer punkt og rum som parret $(X, x_0)$ (topologien på $X$ er underforstået). En $x_0$ baseret løkke i $X$ er en kontinuert afbildning $\gamma : I \to X$ (hvor $I$ betegner enhedsintervallet $[0, 1]$), således at $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$. Vi lader $\Omega(X, x_0)$ betegne mængden af de $x_0$-baserede løkker i $X$.

Vi siger at to $x_0$-baserede løkker $\gamma, \sigma$ er homotope hvis den ene kontinuert kan deformeres over i den anden. Mere præcist formuleret er de homotope hvis der eksisterer en afbildning $F : I \times I \to X$ således at $F(s, 0) = \gamma(s)$, $F(s, 1) = \sigma(s)$ for alle $s$ og $F(0, t) = F(1, t) = x_0$ for alle $t$. Den sidste betingelse siger at deformationen skal holde sti-endepunkterne fast. $F$ kaldes en homotopi fra $\gamma$ til $\sigma$.

Som vist i noterne er homotopi en ækvivalensrelation på rummet $\Omega(X, x_0)$ så vi kan kigge på mængden af ækvivalensklasser modulo denne relation:

$$\pi_1(X, x_0) = \Omega(X, x_0)/\text{homotopi}$$

Bemærk at hvad vi kigger på her er en mængde uden struktur. Vi har ikke nogen topologi på denne mængde. Vi vil nu definere en operation på $\pi_1(X, x_0)$, der gør denne til en gruppe.

Givet to $x_0$-baserede løkker $\gamma$ og $\sigma$, defines stien $\gamma \star \sigma$ som stien, der først løber gennem $\gamma$ i dobbelt tempo, og derefter gennem $\sigma$ i dobbelt tempo. Det faktum at $\sigma$ starter i samme punkt som $\gamma$ slutter i $(x_0)$, sikrer at $\gamma \star \sigma$ bliver kontinuert, og dermed en sti. Operationen kaldes stisammensætning.

I noterne er der vist, at hvis $\gamma$ og $\gamma'$ er homotope og $\sigma$ og $\sigma'$ er homotope er $\gamma \star \sigma$ homotop med $\gamma' \star \sigma'$, så stisammensætning definerer en veldefineret operation på $\pi_1(X, x_0)$.

Lad $e_{x_0}$ definere den konstante løkke baseret i $x_0$. Da er for alle løkker $\gamma$ $\gamma \star e_{x_0}$ homotop med $\gamma$, som også er homotop med $e_{x_0} \star \gamma$. Så $e_{x_0}$ er et neutralt element for operationen stisammensætning. Definer $\gamma^{-1}$ til at være den løkke, der gennemløber $\gamma$ i modsat retning. Da vil $\gamma^{-1} \star \gamma$ være homotop med $\gamma \star \gamma^{-1}$, som igen er homotop med $e_{x_0}$.

Stisammensætning definerer derfor en gruppestruktur på $\pi_1(X, x_0)$, hvor den konstante løkke er det neutrale element og den inverse til en løkke $\gamma$ er den løkke, der gennemløber $\gamma$ den modsatte vej. Vi kalder $\pi_1(X, x_0)$ med denne gruppestruktur for fundamentalgruppen for $X$ baseret i $x_0$. Hvis $X$ er kurvesammenhængende og $x_1$ er et andet punkt kan man vise at $\pi_1(X, x_0)$ er isomorf med $\pi_1(X, x_1)$, så denne gruppe er uafhængig af valg af basispunkt og man kan derfor tale om fundamentalgruppen for $X$ uden at tale om basispunkt. Dette er dog ikke nødvendigt for det følgende.

# 2 Funktorielle egenskaber

Hvis $f : X \to Y$ er en kontinuert funktion således at $f(x_0) = y_0$, og $\gamma$ er en $x_0$-baseret løkke i $X$, da er $f \circ \gamma$ en $y_0$-baseret løkke i $Y$. Hvis $\gamma$ og $\sigma$ er homotope $x_0$-baserede løkker og $F : I \times I \to X$ er en homotopi fra $\gamma$ til $\sigma$ er $f \circ F : I \times I :\to X$ en homotopi fra $f \circ \gamma$ til $f \circ \sigma$ så afbildningen $\gamma \mapsto f \circ \gamma$ er en veldefineret afbildning $\pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ som vi kalder $f_\star$.

Vi mangler at vise at $f_\star$ er en gruppehomomorfi. Men dette indses let af følgende ligning $f \circ (\gamma \star \sigma) = (f \circ \gamma) \star (f \circ \sigma)$, som følger direkte af definitionerne.

Hvis $id : X \to X$ betegner identiteten indses let følgende to vigtige egenskaber:

$$id_\star = id$$

Hvor funktionen på højresiden er identitetshomomorfien $\pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$. Hvis vi har de kontinuerte funktioner $f : X \to Y$ og $g : Y \to Z$, som sender basispunkter i basispunkter har vi den anden vigtige ligning:

$$(f \circ g)_\star = f_\star \circ g_\star$$

Begge disse ligninger følger direkte af definitionerne.

# 3 Fundamentalgrupper for visse rum

De to rum vi skal kigge på i det følgende er:

$$D^2 = \{x \in \mathbb{C} | ||x|| \leq 1\} \quad \text{og} \quad S^1 = \{x \in \mathbb{C} | ||x|| = 1\}$$

Populært kaldet disken og cirklen. Disse er naturligvis udstyret med delrumstopologien fra $\mathbb{C}$. Bemærk at vi har en kontinuert inklusion $i : S^1 \hookrightarrow D^2$, og at $\partial D^2 = S^1$.

I noterne er det vist at $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ frembragt af stien $t \mapsto e^{2\pi i t}$.

Det er let at indse at $\pi_1(D^2, 1)$ er triviel, da denne er konveks. Givet en 1-baseret løkke i $D^2$, $\gamma$ er $F(s,t) = (1-t)\gamma(s) + t$ nemlig en homotopi fra $\gamma$ til den konstante sti i 1.

# 4 Brouwers fixpunktsætning

Så er vi klar til at vise den første store sætning.

**Sætning 2.** *Der findes ingen kontinuert afbildning $f : D^2 \to S^1$, der fixer randen af $D^2$.*

Med andre ord findes ingen kontinuert afbildning $f : D^2 \to S^1$, så $f \circ i$ er identiteten på $S^1$. Man kan sige at denne sætning siger, at kontinuerte afbildninger ikke kan 'rive hul' i en to-dimensionel mangfoldighed.

**Bevis:** Antag der eksisterer en sådan afbildning $f$. Se på de inducerede homomorfier mellem fundamentalgrupperne. Vi har $f_\star : \pi_1(D^2, 1) \to \pi_1(S^1, 1)$, og den af inklusionen inducerede homomorfi $i_\star : \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1(D^2, 1)$. Da $\pi_1(D^2, 1) \cong \{0\}$ og $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ må $f_\star \circ i_\star : \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1(S^1, 1)$ være 0-afbildningen.

På den anden side giver de funktorielle egenskaber at $f_\star \circ i_\star = (f \circ i)_\star = id_\star$ være identiteten på $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$. Men dette er en modstrid.$\square$

Man illustrerer ofte modstriden i følgende diagram:

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(D^2, 1) \cong \{0\} \arrow[dr, "f_\star"] & \\ \pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z} \arrow[ur, "i_\star"] \arrow[rr, "(f \circ i)_\star = id"'] & & \pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

Den næste sætning er den anden formulering af sætning 1, som blev nævnt i indledningen.

**Sætning 3.** *[Brouwers fixpunktsætning] Hvis $f : D^2 \to D^2$ er kontinuert har $f$ et fixpunkt. Det vil sige, der eksisterer et punkt $x \in D^2$, så $f(x) = x$.*

**Bevis:** Antag $f$ ikke fixer et punkt. Vi ønsker at konstruere en kontinuert afbildning $\phi : D^2 \to S^1$, der fixer alle punkter på $S^1$, da dette vil stride mod forrige sætning.

Da $x \neq f(x)$ for alle $x$, kan vi tale om linien, der går gennem $x$ og $f(x)$. Følg denne linie fra $f(x)$ mod $x$ helt ud til liniens skæringspunkt med $S^1$. Hvis vi kalder dette skæringspunkt for $\phi(x)$ har vi defineret en kontinuert funktion $\phi : D^2 \to S^1$. Fordi vi fulgte linien fra $f(x)$ mod $x$ får vi at $\phi(x) = x$ for alle punkter $x \in S^1$. Men en sådan funktion $\phi$ kan ikke eksistere i følge forrige sætning, så vi har en modstrid.$\Box$

Et rektangulært udsnit af København er homeomorft med $D^2$. At afbilde dette på et landkort, krølle kortet sammen, ligge det inden for det omtalte rektangel, og derefter projicere punkterne på kortet tilbage på det rektangulære udsnit af København er en operation, der kan repræsenteres af en kontinuert afbildning af rektanglet på sig selv. Derfor følger sætning 1 af Brouwers fixpunktsætning.

# 5 Generaliseringer

Lad os generelt definere:

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, ||x|| \leq 1\} \quad \text{og} \quad S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, ||x|| = 1\}$$

Bemærk her at tallet $n$ refererer til at $D^n$ er en $n$-dimensionel størrelse, og $S^{n-1}$ er en $(n-1)$-dimensionel størrelse. Brouwers fixpunktsætning gælder nu i mere generel form, nemlig at enhver kontinuert afbildning $f : D^n \to D^n$ har et fixpunkt. Beviset er det samme som for den simple form vist ovenfor, og bygger på den generelle sætning, at der ikke findes en kontinuert afbildning $f : D^n \to S^{n-1}$, der fixerer $S^{n-1}$. Til denne sætning kan man dog ikke bare genbruge beviset fra ovenfor idet, $\pi_1(S^{n-1}) \cong \{0\}$ for $n \geq 3$.

Der findes dog en generalisering af begrebet fundamentalgruppe, således at vi kan definere $\pi_k(X)$ for alle $k \in \mathbb{N}$, med de samme funktorielle egenskaber som i tilfældet $\pi_1(X)$.

Man kan i dette tilfælde vise at $\pi_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$ og $\pi_{n-1}(D^n) \cong \{0\}$, så igen i dette tilfælde vil en sådan $f : D^n \to S^{n-1}$ inducere en afbildning $f_\star : \pi_{n-1}(D^n) \cong \{0\} \to \pi_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$, og vi vil have homomorfien induceret af inclusionen $i_\star : \pi_{n-1}(D^n) \cong \{0\} \to \pi_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$, og modstriden vil fremstå af dette kommutative diagram:

$$
\begin{tikzcd}
 & \pi_{n-1}(D^n) \cong \{0\} \arrow[dr, "f_\star"] & \\
\pi_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z} \arrow[ur, "i_\star"] \arrow[rr, "(f\circ i)_\star = id"'] & & \pi_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}
\end{tikzcd}
$$

`Rasmus Ejlers Møgelberg d.13. december 2001`