

Matematik H1

Erhvervsøkonomi-matematik studiet

4 timers skriftlig prøve.

Alle hjælpemidler er tilladt, dog ikke regnemaskiner af nogen art.
Sættet er på 3 sider og består af 7 opgaver.

Opgave 1 (Vægt 15%)

Lad vektorerne $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4$ i talrummet \mathbf{R}^4 være givet ved

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Find et maksimalt lineært uafhængigt sæt M_1 af $M = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4\}$. Skriv hver af de øvrige vektorer i M som linearkombinationer af vektorerne fra M_1 .

(b) Sæt $U = \text{span } M$. Vis, at sættet bestående af de to vektorer \underline{a}_1 og $\underline{a}_1 + \underline{a}_3$ udgør en basis for U .

(c) Om en lineær afbildning $f: U \rightarrow U$ oplyses at $f(\underline{a}_1) = \underline{a}_2$ og $f(\underline{a}_3) = \underline{a}_4$. Bestem matricen for f med hensyn til den i (b) omtalte basis $(\underline{a}_1, \underline{a}_1 + \underline{a}_3)$.

Opgave 2 (Vægt 20%)

Lad

$$f(x, y) = -\frac{1}{3}x^3 + xy^2 + x^2 + y^2 - \frac{3}{4}x.$$

(a) Vis, at hvert af de to punkter $(x, y) = (-1, \pm\sqrt{15}/2)$ er stationært for f .

(b) Funktionen f har også to stationære punkter med $x \neq -1$. Bestem disse punkter. (Vink: Udnyt først ligningen $f'_y(x, y) = 0$ til at bestemme y .)

(c) Bestem Hesse matricen $\underline{H}(x, y)$ for f i ethvert punkt (x, y) . Udregn denne matrix for hvert af de i (a) og (b) nævnte fire punkter, og bestem typen af disse stationære punkter.

(d) Betragt enhedscirkelskiven

$$S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Vis, at f er konveks i S , og bestem det punkt i S , hvori f antager den mindste værdi.

Opgave 3 (Vægt 5%)

Lad $F(x, y)$ være en funktion af to variable, om hvilken det antages, at de partielle afledede $F'_1 = \frac{\partial F}{\partial x}$ og $F'_2 = \frac{\partial F}{\partial y}$ eksisterer og er kontinuerte. Udtryk de partielle afledede af funktionen $z(t, s) = F(t^2s, t + 2s)$ ved F'_1 og F'_2 .

Opgave 4 (Vægt 20%)

Lad K betegne den kvadratiske form i \mathbf{R}^3 givet ved

$$K(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

(a) Bestem den til K hørende symmetriske matrix \underline{B} .

(b) Lad $U \subseteq \mathbf{R}^3$ betegne egenrummet for \underline{B} svarende til egenværdi 1. Vis, at vektorerne $\underline{a} = (0, 1, 1)$ og $\underline{b} = (1, 2, 0)$ tilhører U og udgør en basis for U . Bestem dernæst en ortogonal basis for U .

(c) Bestem det ortogonale komplement U^\perp til U , og vis, at dette underrum også er et egenrum for \underline{B} . Angiv den tilhørende egenværdi.

(d) Bestem en ortogonal matrix \underline{S} således, at matricen $\underline{S}\underline{B}\underline{S}^{-1}$ er en diagonalmatrix. Angiv også denne diagonalmatrix.

Opgave 5 (Vægt 15%)

Lad

$$F(x, y, z) = k \ln(xyz) - x^a y^b z^c, \quad (x, y, z > 0)$$

hvor a, b, c og k er konstanter, og $c \neq k$. Det oplyses (og skal ikke eftervises), at ligningen $F(x, y, z) = -1$ fastlægger z implicit som en differentiabel funktion af x og y i nærheden af punktet $(x_0, y_0) = (1, 1)$, med værdien $z_0 = 1$ i dette punkt.

(a) Find de første ordens partielle afledede z'_x og z'_y af z i punktet $(1, 1)$. Hvad skal konstanterne a, b og k opfylde for at punktet er stationært?

(b) Angiv en ligning for tangentplanen i punktet $(1, 1, 1)$ til den flade i \mathbf{R}^3 , som ligningen $F(x, y, z) = -1$ bestemmer.

Opgave 6 (Vægt 15%)

En lineær afbildning $f: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$ er givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestem kernen $\ker f$ for f .
(b) Lad $U \subset \mathbf{R}^4$ være underrummet

$$U = \{\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_3 = x_4 = 0\}.$$

Vis, at $\mathbf{R}^4 = \ker f \oplus U$.

- (c) Find projektionen af vektoren $\underline{v} = (4, 3, 2, 1)$ på $\ker f$ langs U .

Opgave 7 (Vægt 10%)

Lad A være trekantområdet i (x, y) -planen med hjørner $(0, 0)$, $(0, 1)$ og $(1, 1)$. Skitser A . Bestem volumen af legemet over A og under grafen for funktionen $f(x, y) = x^2 e^{y^2}$. (Vink: Det gælder om at integrere med hensyn til x og y i en bestemt rækkefølge. Integralet af funktionen $y^3 e^{y^2}$ kan bestemmes ved substitutionen $t = y^2$ samt udnyttelse af formlen $\int t e^t dt = t e^t - e^t$).