

## Matematik H1

### Erhvervsøkonomi-matematik studiet

4 timers skriftlig prøve.

Alle hjælpemidler er tilladt, dog ikke regnemaskiner af nogen art.  
Sættet er på 3 sider og består af 6 opgaver.

#### Opgave 1 (Vægt 15%)

Lad vektorerne  $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4$  i talrummet  $\mathbf{R}^4$  være givet ved

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Vis, at sættet  $(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4)$  udgør en basis for  $\mathbf{R}^4$ .

(b) Lad den lineære afbildning  $f: \mathbf{R}^5 \rightarrow \mathbf{R}^4$  være bestemt ved at dens matrix med hensyn til den naturlige basis  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4, \underline{e}_5)$  for  $\mathbf{R}^5$  og basen  $(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4)$  for  $\mathbf{R}^4$  er

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestem matricen for  $f$  med hensyn til de naturlige baser  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4, \underline{e}_5)$  og  $(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4)$ . (Benyt feks. søjlereglen)

(c) Find den fuldstændige løsning til ligningen  $f(\underline{x}) = \underline{a}_1$ ,  $\underline{x} \in \mathbf{R}^5$ .

#### Opgave 2 (Vægt 20%)

For  $\alpha \in \mathbf{R}$  betragtes  $2 \times 2$  matricen

$$\underline{A} = \underline{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 + \alpha & \alpha \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Vis, at vektoren  $\underline{a}_1(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \end{pmatrix}$  er egenvektor for  $\underline{A}(\alpha)$ , og angiv den tilhørende egenværdi.
- (b) Find en vektor  $\underline{a}_2$ , som for alle  $\alpha$  er egenvektor for  $\underline{A}(\alpha)$  med egenværdien 1.
- (c) Lad  $\alpha \neq 1$ . Find en regulær  $2 \times 2$  matrix  $\underline{S} = \underline{S}(\alpha)$  og en diagonalmatrix  $\underline{D} = \underline{D}(\alpha)$ , således at  $\underline{D} = \underline{S} \underline{A} \underline{S}^{-1}$ .
- (d) Lad nu  $\alpha = 1$ . Afgør, om  $\underline{A}$  er diagonaliserbar.

### Opgave 3 (Vægt 15%)

Lad vektorerne  $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{b}$  i talrummet  $\mathbf{R}^4$  være givet ved

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix},$$

hvor  $t \in \mathbf{R}$  er en parameter.

- (a) Bestem, for enhver værdi af  $t$ , dimensionen af underrummet

$$U = \text{span}(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3).$$

- (b) Lad  $t = 2$ . Bestem en ortogonal basis for  $U$ .
- (c) Lad stadig  $t = 2$ . Bestem ortogonalprojektionen af  $\underline{b}$  på  $U$ .

### Opgave 4 (Vægt 15%)

For enhver værdi af  $\beta \in \mathbf{R}$  fastlægger ligningen

$$e^{x+z} + 2(x+z)y + \beta x = 1$$

den variable  $z$  som en to gange differentiabel funktion af  $(x, y)$  i nærheden af punktet  $(x, y) = (0, 0)$ . Lad denne funktion være betegnet  $z = f(x, y)$ .

- (a) Bestem  $f(0, 0)$ .
- (b) Vis, at punktet  $(0, 0)$  er stationært for  $f$  hvis og kun hvis  $\beta = -1$ .
- (c) Lad nu  $\beta = -1$ . Afgør, om punktet  $(0, 0)$  er et lokalt maksimum, et lokalt minimum eller et saddepunkt for  $f$ .

**Opgave 5** (Vægt 10%)

Lad området  $A$  i planen være trekanten hvis hjørner har koordinaterne henholdsvis  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$  og  $(1, 1)$ .

(a) Lad  $f(x, y)$  være en kontinuert funktion defineret på  $A$ . Opstil de to formler for dobbeltintegralet af  $f$  over  $A$ , svarende til de to integrationsrækkefølger (de konkrete grænser i integralerne skal angives). (Vink: For at opstille den ene af formlerne må området deles i to).

(b) Lad nu  $f(x, y) = xy^3$ . Udregn dobbeltintegralet af  $f$  over  $A$  ved hjælp af en af de to formler fra spørgsmål (a).

**Opgave 6** (Vægt 15%)

Lad

$$f(x, y) = xy$$

og

$$g(x, y) = 20x^2 + 12xy + 5y^2.$$

(a) Bestem definittheden af den kvadratiske form

$$h(x, y) = g(x, y) - (x^2 + y^2) = 19x^2 + 12xy + 4y^2,$$

og vis herved at  $h(x, y) \geq 0$  for alle  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ .

(b) Lad  $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid g(x, y) = 64\}$ . Vis, at for alle  $(x, y) \in S$  er afstanden fra  $(x, y)$  til  $(0, 0)$  højst 8 (udnyt feks. resultatet fra spørgsmål (a)). Begrund at funktionen  $f(x, y)$  antager både en maksimumsværdi og en minimumsværdi på  $S$ .

I det følgende betragter vi problemet: At bestemme de ovennævnte ekstrema for  $f$  under bibetingelsen  $g(x, y) = 64$ .

(c) Opstil Lagrangefunktionen  $\mathcal{L}(x, y, \lambda)$  der svarer til denne ekstremumsbestemmelse. Vis, at hvert af punkterne  $(x, y) = (1, 2)$  og  $(x, y) = (-1, -2)$  opfylder bibetingelsen og giver anledning til et stationært punkt for  $\mathcal{L}$ . Værdien af den tilhørende Lagrangemultiplikator  $\lambda$  skal angives (den viser sig at være den samme for de to punkter).

(d) Til værdien  $\lambda = -\frac{1}{8}$  af Lagrangemultiplikatoren svarer også to stationære punkter for  $\mathcal{L}$ . Bestem disse to punkter.

(e) Det oplyses, at der ikke findes andre stationære punkter for  $\mathcal{L}$  end de fire ovennævnte. Bestem ved hjælp af denne oplysning maksimum og minimum for  $f(x, y)$  under bibetingelsen  $g(x, y) = 64$ .