Københavns Universitet
Eksamen ved Handelshøjskolen i København maj 1997

Matematik H1

Erhvervsøkonomi-matematik studiet

4 timers skriftlig prøve

Alle hjælpemidler er tilladte, dog ikke regnemaskiner af nogen art.
Sættet er på 3 sider og består af 6 opgaver.

Opgave 1 (20 points)

I $\mathbb{R}^4$ er der givet 5 vektorer

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Betragt underrummene $U = \operatorname{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ og $V = \operatorname{span}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ i $\mathbb{R}^4$.

(1) Bestem baser for underrummene U og V.
(2) Bestem en ortogonal basis for U.
(3) Vis, at U og V er komplementære underrum i $\mathbb{R}^4$.
(4) Afgør, om V er det ortogonale komplement til U i $\mathbb{R}^4$.
(5) Beregn projektionen af $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ på U langs V.

Opgave 2 (10 points)

Skriv permutationen $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ som sammensætning af naboombytninger og beregn fortegnet $\operatorname{sign} \pi$.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (20 points)

For $t \in \mathbb{R}$ betragtes følgende 3×3-matrix

$$\underline{\underline{C}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3-t & t \\ 2 & t & -t \end{pmatrix}.$$

(1) For hvilke værdi(er) af t er

$$\det \underline{\underline{C}}(t) = 0\,?$$

(2) Vis, at $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en egenvektor for $\underline{\underline{C}}(t)$ for alle $t \in \mathbb{R}$ og beregn den tilhørende egenværdi.

(3) Bestem et reelt tal a, således at $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ er en egenvektor for $\underline{\underline{C}}(a)$ og beregn den tilhørende egenværdi.

(4) I resten af opgaven sættes $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{C}}(2)$.
Angiv en ortogonal 3×3-matrix $\underline{\underline{S}}$ således, at

$$\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1} = \underline{\underline{D}}$$

er en diagonal matrix.

(5) Afgør om den til $\underline{\underline{A}}$ hørende kvadratiske form er positiv definit.

Opgave 4 (20 points)

Lad $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x,y) = x^3 - 2xy + y^2 - x\,.$$

(1) Beregn de stationære punkter for f.

(2) Afgør for hvert stationært punkt, om der er tale om et lokalt maksimum, om et lokalt minimum eller om et saddelpunkt for funktionen.

Opgave 4 fortsættes på side 3

(3) Gør rede for, at f er strengt konveks i området

$$A = \left[\frac{1}{2}, 2\right] \times \left[0, 2\right].$$

(4) Gør rede for at f antager en største- og mindste værdi i området A, og bestem disse værdier.
VINK: Du kan med fordel udnytte punkt (3).

Opgave 5 (15 points)

Ligningen

$$(*) \qquad (x-1)y - e^{x(y+z)} + z = 2$$

bestemmer z som en differentiabel funktion $z = f(x, y)$ i nærheden af punktet $(x, y, z) = (0, 1, 4)$.

(1) Beregn de partielle afledede af $f(x, y)$ af første orden i punktet $(x, y) = (0, 1)$.
(2) Angiv ligningen for tangentplanen til den flade F, der er bestemt ved $(*)$, i punktet $(0, 1, 4)$.

Opgave 6 (15 points)

Det oplyses at nedenstående problem har en løsning:

$$\begin{array}{ll} \text{minimer} & (x-4)^2 + (y-4)^2 + (z-1/2)^2 \\ \text{under bibetingelsen} & x^2 + y^2 = z\,. \end{array}$$

(1) Brug Lagranges metode til at finde løsningen til problemet.
(2) Gør rede for, at det tilsvarende maksimeringsproblem ikke har en løsning.