Københavns Universitet
Eksamen ved Handelshøjskolen i København maj 1996

Matematik H1

Erhvervsøkonomi-matematik studiet

4 timer skriftlig prøve

Alle hjælpemidler er tilladte, dog ikke regnemaskiner af nogen art.
Sættet er på 3 sider og består af 8 opgaver som vægtes lige.

Opgave 1

Lad $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ være den lineære afbildning med hilhørende matrix

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 6 & 9 \\ 4 & -1 & 10 & 15 \end{pmatrix}$$

a) Bestem kernen for f.
b) Bestem rangen $\operatorname{rg} f$ og find en basis for billedrummet $f(\mathbb{R}^4)$.
c) Find den ortogonale projektion af vektoren $\underline{v} = (0, 0, 10, 0)$ på billedrummet for f.

Opgave 2

I $\mathbb{R}^3$ er der givet vektorerne

$$\underline{a}_1 = (1, 1, 3), \quad \underline{a}_2 = (2, 2, 5), \quad \underline{a}_3 = (2, 3, 6)$$

a) Vis, at sættet $\alpha = (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$ udgør en basis for $\mathbb{R}^3$.
b) En lineær afbildning $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ er m.h.t. den naturlige basis givet ved matricen

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & -2 \\ 12 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

Bestem matricen for f m.h.t. basen α

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3

Lad $\underline{\underline{A}}$ betegne 3×3 matricen givet ved

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Gør rede for, at der findes en ortonormalbasis for $\mathbb{R}^3$ bestående af egenvektorer for $\underline{\underline{A}}$.

b) Bestem en ortonormalbasis bestående af egenvektorer for $\underline{\underline{A}}$

Opgave 4

Lad for $c \in \mathbb{R}$ $\underline{\underline{A}}(c)$ betegne matricen

$$\underline{\underline{A}}(c) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 1 & c+2 & -1 \\ -2 & 2c-8 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Vis, at vektorerne $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 2)$, $(8 - c, 3, 2c - 10)$ alle er egenvektorer for $\underline{\underline{A}}(c)$ og bestem de tilhørende egenværdier.

b) Begrund, at for $c \neq 8$ er $\underline{\underline{A}}(c)$ diagonaliserbar.

c) Bestem for alle $c \neq 8$ en invertibel 3×3 matrix $\underline{\underline{S}}(c)$ således at

$$\underline{\underline{S}}(c)^{-1} \underline{\underline{A}}(c) \underline{\underline{S}}(c)$$

er en diagonalmatrix.

Opgave 5

Lad $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 2xy - 6x + 2y + 3.$$

a) Begrund, at f har en mindste værdi. Bestem denne og det punkt hvori den antages.

b) Lad M betegne delmængden af $\mathbb{R}^2$ givet ved

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leq x \text{ og } 0 \leq x \leq 2\}.$$

Skitser mængden M og begrund, at restriktionen af f til M har såvel en størstesom en mindsteværdi. Bestem disse og de punkter hvori de antages.

Opgavesættet fortsættes på side 3

Opgave 6

Lad $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x, y) = x^2 - y^3 + y\,.$$

a) Begrund, at ligningen $f(x, y) = 1$ fastlægger y som en differentiabel funktion af x; "$y = g(x)$," i en omegn af punktet $(1, 1)$.

b) Bestem det andet Taylorpolynomium for g i udviklingspunktet $x = 1$.

Opgave 7

Lad $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ og $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være givne ved

$$f(x, y) = x^3 - 3x - y^2$$
$$g(x, y) = x^2 - 2x + y^2$$

a) Begrund, at f har såvel en største- som en mindsteværdi under bibetingelsen $g(x, y) = 0$.

b) Bestem største- og mindsteværdi for f under bibetingelsen $g(x, y) = 0$, og angiv de punkter hvori værdierne antages.

Opgave 8

For $x \in \mathbb{R}$ med $0 \leq x \leq \sqrt{\pi}$ defineres en differentiabel funktion g ved

$$g(x) = \int_{x^2}^{\pi} t^{1/2} \cos(xt^{1/2})\, dt$$

a) Find for $0 < x < \sqrt{\pi}$ et udtryk for $g'(x)$. Et indgående bestemt integral ønskes ikke beregnet.

b) Beregn $\int_0^{\sqrt{\pi}} g(x)\, dx$.