Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommeren 1995

Matematik H1

Erhversøkonomi-matematik studiet

4 timers skriftlig prøve

2. semester

30. maj kl. 9 – 13

Alle hjælpemidler er tilladt, dog ikke regnemaskiner af nogen art.
Sættet er på 3 sider og består af 6 opgaver.

Opgave 1 (20 points)

Lad $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ være den lineære afbildning, som med hensyn til standardbaserne er givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestem dimensionen af kernen for f, $\dim \ker f$.

b) Bestem en basis for kernen $\ker f$.

c) Bestem en basis for billedrummet $f(\mathbb{R}^4)$.

d) Lad $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være ortogonalprojektionen på underrummet $f(\mathbb{R}^4)$. Bestem $P\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Opgave 2 (20 points)

Lad $a, b, c \in \mathbb{R}$ og betragt matricen

$$\underset{=}{A} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

a) Gør rede for, at $\underset{=}{A}$ kan diagonaliseres.

Opgave 2 fortsættes på side 2

b) Bestem en basis af egenvektorer for $\underline{\underline{A}}$.

c) Find en regulær (3×3) matrix $\underline{\underline{T}}$, så

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{T}}^{-1}$$

er en diagonalmatrix.

d) For hvilke værdier af a, b og c er den til $\underline{\underline{A}}$ hørende kvadratiske form positiv semi-definit ?

Opgave 3 (10 points)

Lad

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} .$$

a) Udregn $\underline{\underline{A}}^{10}$.

b) Udregn $\underline{\underline{A}}^2 + \underline{\underline{A}} - 2\underline{\underline{E}}$.

Opgave 4 (20 points)

Gør rede for, at funktionen

$$f(x,y) = 2y\sqrt{x(1-x)} - \frac{1}{2}y^2 \qquad \frac{1}{4} \le x \le \frac{3}{4}\,,\ 0 \le y \le 3$$

har såvel en største værdi S som en mindste værdi M.

Bestem S og M, og angiv værdimængden for f.

Opgave 5 (15 points)

a) Angiv definitionsområdet for funktionen givet ved forskriften

$$f(x,y) = -\ln(9 - x^2 - y^2)$$

og vis, at f er konveks.

b) Skitsér niveaukurverne for f.

c) Gør rede for, at f har såvel maksimum som minimum under bibetingelsen

$$x^2 + (y-1)^2 = 1\ ,$$

og bestem disse.

Opgavesættet fortsættes på side 3

Opgave 6 (15 points)

Lad

$$F(x) = \int_x^1 t^2 e^{xt} dt \ , \quad x \in \mathbb{R} \ .$$

a) Gør rede for, at F er differentiabel.

b) Bestem Taylorpolynomiet af grad højst 2 med udviklingspunkt $x = 0$.
Du behøver ikke at redegøre for, at F er 2 gange differentiabel.

c) Bestem

$$\int_0^1 F(x) dx \ ,$$

idet du foretager en ombytning af integrationsordenen.