Københavns Universitet
Handelshøjskolen i København, Maj 2003

Reel analyse og lineær algebra (Matematik H1)

Erhvervsøkonomi-matematik studiet

4 timers skriftlig prøve

Alle hjælpemidler er tilladt, dog ikke regnemaskiner af nogen art.
Sættet er på 3 sider og består af 6 opgaver.

Opgave 1 (Vægt ca. 15 %)

Betragt matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

samt vektorerne $\underline{a}_1 = (1,1,1,1)$, $\underline{a}_2 = (1,-1,0,0)$, $\underline{a}_3 = (0,0,1,-1)$ og $\underline{a}_4 = (1,1,-1,-1)$ i $\mathbb{R}^4$.

(i) Udregn $\underline{\underline{A}}\,\underline{a}_i$ for $1 \leq i \leq 4$.

(ii) Begrund at der findes en ortogonal matrix $\underline{\underline{S}}$ og en diagonal matrix $\underline{\underline{D}}$ således at $\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1} = \underline{\underline{D}}$.

(iii) Find $\underline{\underline{S}}^{-1}$, $\underline{\underline{S}}$ og $\underline{\underline{D}}$.

Opgave 2 (Vægt ca. 15 %)

En bygning er formet som et cirkelrundt tårn med fladt gulv, afsluttet foroven med en halvkugleformet kuppel. Tårnets radius er r og dets højde – uden kuppel – er h. Med kuppel er bygningens højde således $h + r$.

(i) Udtryk bygningens overflade F (inklusive gulv) og dens volumen V som funktioner af r og h.

(ii) Beregn det forhold h/r som giver maksimum af V under forudsætning af at F holdes konstant (dvs. under bibetingelsen $F = c$, c konstant).

(iii) [Udenfor pointberegningen] Hvilken bygning ? Under hvilken kejser ?

Hjælp: En kugles overflade er $4\pi r^2$ og dens volumen er $\frac{4}{3}\pi r^3$.

 Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (Vægt ca. 20 %)

Betragt det euklidiske vektorrum $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ med det sædvanlige indre produkt $\underline{x} \cdot \underline{y} = \sum x_i y_i$ og normen $\|\underline{x}\| = (\underline{x} \cdot \underline{x})^{1/2}$, og lad $f : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ være en lineær afbildning således at $\|f(\underline{x})\| = \|\underline{x}\|$ for ethvert $\underline{x}$ i $\mathcal{V}$.

(i) Vis for alle $\underline{x}$ og $\underline{y}$ i $\mathcal{V}$ formlen

$$\|\underline{x} + \underline{y}\|^2 - \|\underline{x} - \underline{y}\|^2 = 4\,\underline{x} \cdot \underline{y}$$

(ii) Vis at $f(\underline{x}) \cdot f(\underline{y}) = \underline{x} \cdot \underline{y}$

(iii) Vis at den inverse afbildning f^{-1} eksisterer og tilfredsstiller formlen

$$\underline{x} \cdot f(\underline{y}) = f^{-1}(\underline{x}) \cdot \underline{y}$$

(iv) Vis at matricen for f vil være ortogonal i enhver ortonormal basis for $\mathcal{V}$.

Opgave 4 (Vægt ca. 15 %)

(i) Lad f og g være positive, konvekse funktioner i $C^2(I)$, hvor $I =]a, b[$, og antag at

$$(f'(x))^2 \le f(x)f''(x) \qquad \text{og} \qquad (g'(x))^2 \le g(x)g''(x)$$

for ethvert x i I. Vis at funktionen $h(x, y) = f(x)g(y)$ er konveks på kvadratet $I \times I$.

(ii) Lad i stedet f og g være positive, konkave funktioner i $C^2(I)$ og antag at

$$(f'(x))^2 \le -f(x)f''(x) \qquad \text{og} \qquad (g'(x))^2 \le -g(x)g''(x)$$

for ethvert x i I. Vis at funktionen $h(x, y) = f(x)g(y)$ i så fald er konkav på kvadratet $I \times I$.

(iii) Vis at funktionen $h(x, y) = (1 - x)^\alpha (1 - y)^\beta$ er konveks på enhedskvadratet $]-1, 1[\times]-1, 1[$ hvis $\alpha < 0$ og $\beta < 0$.

(iv) Vis at funktionen $h(x, y) = (1 - x)^\alpha (1 - y)^\beta$ er konkav på enhedskvadratet $]-1, 1[\times]-1, 1[$ hvis $0 < \alpha \le \frac{1}{2}$ og $0 < \beta \le \frac{1}{2}$.

Opgavesættet fortsættes på side 3

Opgave 5 (Vægt ca. 20 %)

Lad $f\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ være en lineær afbildning på et vektorrum $\mathcal{V}$ af dimension n. Lad $\ker f$ betegne kernen (dvs. nulrummet) for f og sæt $\dim \ker f = k$.

(i) Vis at der findes en basis $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ for $\mathcal{V}$ således at $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$ er en basis for $\ker f$.

(ii) Sæt $\mathcal{U} = \operatorname{span}\{\underline{a}_{k+1}, \ldots, \underline{a}_n\}$ og vis at restriktionen $f\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ er injektiv.

(iii) Antag fra nu af og i resten af opgaven at $f \circ f = 0$, og vis at $f(\mathcal{V}) \subset \ker f$.

(iv) Vis at $n - k \leq k$, således at $k \geq \frac{1}{2}n$.

(v) Vis at hvis $m = n - k$ og $\underline{\underline{O}}_{mk}$ betegner nul-matricen med m rækker og k søjler, så har f i basen $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ en matrix $\underline{\underline{A}}$ af formen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{O}}_{kk} & \underline{\underline{B}}_{km} \\ \underline{\underline{O}}_{mk} & \underline{\underline{O}}_{mm} \end{pmatrix}$$

hvor $\underline{\underline{B}}_{km}$ er en uspecificeret $k \times m$ matrix.

Opgave 6 (Vægt ca. 15 %)

(i) Skitsér det lukkede område Ω i $\mathbb{R}^2$ bestemt ved ulighederne

$$0 \leq x \leq c, \qquad 0 \leq y \leq c, \qquad xy \leq 1,$$

hvor $c > 1$.

(ii) Find arealet af Ω.

(iii) Udregn integralet $\iint_\Omega xy \, dx \, dy$.

Hjælp: Split enten Ω op i et kvadrat og to ligedannede vinger, eller i et smalt rektangel og en enkelt stor vinge.