Københavns Universitet
Handelshøjskolen i København, Maj 2002

Reel analyse og lineær algebra (Matematik H1)

Erhvervsøkonomi-matematik studiet

4 timers skriftlig prøve

Alle hjælpemidler er tilladt, dog ikke regnemaskiner af nogen art.
Sættet er på 3 sider og består af 8 opgaver.

Opgave 1 (Vægt ca 10 %)

Betragt den kvadratiske form

$$K(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + az^2 + 2xy - 4xz + 2yz,$$

hvor $a \in \mathbb{R}$. Bestem de værdier af a for hvilke K er positiv definit, respektivt positiv semi-definit.

Opgave 2 (Vægt ca 10%)

Find det karakteristiske polynomium for matricen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Gør rede for at der findes en diagonalmatrix D som er regulært ækvivalent med A, dvs. at $A = QDQ^{-1}$ for en regulær matrix Q, og angiv D.

Kan ovennævnte matrix Q vælges som en ortogonal matrix?

 Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (Vægt ca 15%)

Lad A være det lukkede konvekse område i planen udspændt af punkterne $(0,0)$, $(3,0)$ og $(3,3)$, og lad funktionen $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x,y) = x^2 - 4x - y^2 + 2y.$$

Begrund at f antager såvel en største som en mindste værdi i A, og bestem de punkter i hvilke disse værdier antages.

Opgave 4 (Vægt ca 10%)

Find den inverse til matricen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Løs for et fast reelt tal a ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= a \\ 2x + 3y + 4z &= a^2 \\ 3x + 4y + 6z &= a^3 \end{aligned}$$

Opgave 5 (Vægt ca 15%)

Skitsér området

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}\}.$$

Beregn at integralet nedenfor har værdien

$$\iint_A 2y(1 - x^2 - y^2)^2 \, dx \, dy = \frac{16}{105}.$$

Opgavesættet fortsættes på side 3

Opgave 6 (Vægt ca 15%)

I området $I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1,\ |y| < 1\}$ betragtes funktionen

$$f(x, y) = (1 - x^2)^{1/2}(1 - y^2)^{1/2}.$$

Find de eventuelle stationære punkter for f i I.
Vis at f er strengt konkav i I.
Vis at f har et globalt maksimum i I angiv værdien.

Opgave 7 (Vægt ca 15%)

I vektorrummet $\mathbb{R}^4$ betragtes vektorerne

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vis at disse udgør en basis for $\mathbb{R}^4$.
Lad $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ betegne den lineære afbildning som for ethvert valg af reelle tal t_1, t_2, t_3, t_4 er givet ved

$$f(t_1 a_1 + t_2 a_2 + t_3 a_3 + t_4 a_4) = t_1 a_1 + t_3 a_3.$$

Find matricen hørende til f udtrykt i basen a_1, a_2, a_3, a_4.
Find dernæst matricen hørende til f udtrykt i den sædvanlige (standard) basis e_1, e_2, e_3, e_4 for $\mathbb{R}^4$.

(Tip: Man kan med fordel finde $f(e_i)$ ved at skrive e_i som en kombination af a'erne.)

Opgave 8 (Vægt ca 10%)

Vis at den reelle funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = \int_0^x \cos(x - t) \sin t \, dt$$

opfylder ligningen $f''(x) + f(x) = \cos x$.

(NB: Man behøver ikke at udregne de indgående integraler.)