Københavns Universitet
Eksamen ved Handelshøjskolen i København, maj 2001

Matematik H1

Erhvervsøkonomi-matematik studiet

4 timers skriftlig prøve.

Alle hjælpemidler er tilladt, dog ikke regnemaskiner af nogen art.
Sættet er på 2 sider og består af 6 opgaver.

Opgave 1 (Vægt 25%)

Betragt matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

a) Gør rede for at $\underline{\underline{A}}$ er diagonaliserbar med hensyn til en ortonormal basis i $\mathbb{R}^4$.
b) Find det karakteristiske polynomium for $\underline{\underline{A}}$ og bestem herved egenværdierne for $\underline{\underline{A}}$.
c) Angiv en ortogonal matrix $\underline{\underline{S}}$ og en diagonal matrix $\underline{\underline{D}}$ således at $\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1} = \underline{\underline{D}}$.

Opgave 2 (20%)

For $x > -1$ og y i $\mathbb{R}$ betragtes funktionen

$$f(x, y) = (1 + x)^y .$$

a) Vis at f har netop ét stationært punkt (x_0, y_0) i sit definitionsområde.
b) Find det approximerende Taylorpolynomium af 2. orden i punktet (x_0, y_0).
c) Afgør om (x_0, y_0) er et lokalt extremumspunkt eller et saddelpunkt.

Opgave 3 (15%)

Betragt vektorerne $\underline{u}_1 = (-1, 1, 1)$, $\underline{u}_2 = (1, -1, 1)$ og $\underline{u}_3 = (1, 1, -1)$ i $\mathbb{R}^3$.

a) Vis at $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ er et lineært uafhængigt system.
b) Lad $U = \text{span}\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ og $V = \text{span}\{\underline{u}_3\}$.
Vis at underrummene U og V er komplementære i $\mathbb{R}^3$.
c) Lad p betegne projektionen af $\mathbb{R}^3$ på U langs med V. Find $p(\underline{w})$, hvor $\underline{w} = (2, 2, 0)$.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 4 (15%)

Funktionen $f(x,y) = e^{x^2+y^2-2y}$ er defineret for alle (x,y) i $\mathbb{R}^2$.

a) Vis at f er strengt konveks i $\mathbb{R}^2$.
b) Gør rede for at f har et globalt minimum og find dette.
c) Lad A betegne det konvekse område i $\mathbb{R}^2$ udspændt af punkterne $(1,0)$, $(-1,0)$, $(1,4)$. Bestem maksimum og minimum af f på A.

Vink: For at løse (c) kan man med fordel udnytte (a).

Opgave 5 (15%)

a) Skitsér området

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + y \leq \pi\,,\ 0 \leq y\}\,.$$

b) Udregn integralet

$$\iint_A \cos(x+y)dx\,dy\,.$$

Opgave 6 (10%)

En lineær afbildning $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ er i standard basen $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4\}$ givet ved matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Angiv den matrix $\widetilde{\underline{\underline{A}}}$ der beskriver f i basen $\{\underline{e}_4, \underline{e}_1, \underline{e}_3, \underline{e}_2\}$.
Vink: Man kan med fordel udnytte søjlereglen.