Københavns Universitet
Handelshøjskolen i København, Juli 2004

Reel analyse og lineær algebra (Matematik H1)

Erhvervsøkonomi-matematik studiet

4 timers skriftlig prøve.

Alle hjælpemidler er tilladt, dog ikke regnemaskiner af nogen art, eller andet elektronisk udstyr.
Sættet er på 3 sider og består af 6 opgaver.

Opgave 1 (Vægt ca. 20 %)

Vektorerne $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$ og $\underline{a}_3$ i $\mathbb{R}^3$ defineres ved

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Vis, at $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$ og $\underline{a}_3$ udgør en basis for $\mathbb{R}^3$.
(b) Lad $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ være den lineære afbildning beskrevet ved:

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = (x_1 + x_2)\underline{a}_1 + (x_2 + x_3)\underline{a}_2 + (x_3 + x_4)\underline{a}_3.$$

Opskriv matricen for φ med hensyn til de naturlige baser i $\mathbb{R}^4$ og $\mathbb{R}^3$.
(c) Find $\ker \varphi$. (Man kan eventuelt benytte resultatet af (a).)
(d) Bestem rangen af φ.

Opgave 2 (Vægt ca. 15 %)

Lad U betegne følgende underrum af $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{\, (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \,\}.$$

(a) Find en ortonormalbasis for U.
(b) Find en ortonormalbasis for $U^\perp$.
(c) Bestem ortogonalprojektionen på U af vektoren $(2, 2, 2)$.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (Vægt ca. 15 %)

Man betragter de tre matricer

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Find egenværdier og egenvektorer for $\underline{\underline{A}}$, og bestem en ortogonal matrix $\underline{\underline{S}}$ og en diagonalmatrix $\underline{\underline{D}}$, så at $\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^t = \underline{\underline{D}}$.

(b) Find egenværdier og egenvektorer for $\underline{\underline{B}}$, og bestem en ortogonal matrix $\underline{\underline{T}}$ og en diagonalmatrix $\underline{\underline{D}}'$, så at $\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{T}}^t = \underline{\underline{D}}'$.

(c) Gør rede for, at $\underline{\underline{C}}$ kan diagonaliseres.

(d) Find egenværdier og egenvektorer for $\underline{\underline{C}}$, og bestem en ortogonal matrix $\underline{\underline{R}}$ og en diagonalmatrix $\underline{\underline{D}}''$, så at $\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{R}}^t = \underline{\underline{D}}''$.

Opgave 4 (Vægt ca. 15 %)

Man betragter funktionen

$$F(x, y) = e^{\cos(x+y)} + \ln(x^2 + 2y^2 + 1).$$

(a) Vis, at $(0, 0)$ er et stationært punkt for F.

(b) Find Taylor-polynomiet af 2. grad for F ud fra punktet $(0, 0)$.

(c) Afgør, om F har lokalt maksimum, lokalt minimum eller saddelpunkt i $(0, 0)$.

Opgave 5 (Vægt ca. 20 %)

Betragt funktionen

$$f(x, y) = x^3 + y^2 + 4xy.$$

(a) Vis, at f er strengt konveks i området $A = \{(x, y) \mid x > \frac{4}{3}\}$.

(b) Undersøg, om f antager minimum på A.

(c) Undersøg ved Lagrange's metode, om der er nogen punkter i A, der opfylder de nødvendige betingelser for at f antager minimum under bibetingelsen

$$(\#) \qquad x + y = 1.$$

(d) For det/de under (c) fundne punkt(er) vises, at der faktisk er minimum i A under bibetingelsen (#).

Opgavesættet fortsættes på side 3

Opgave 6 (Vægt ca. 15 %)

Lad $G(x, y)$ betegne funktionen

$$G(x, y) = e^{x^3 - y},$$

og lad S betegne området

$$S = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2,\ 1 + x^3 \leq y \leq 2 + x^3 \}.$$

(a) Skitsér området S.

(b) Udregn integralet $\iint_S G(x, y)\, dxdy$.