Københavns Universitet
Handelshøjskolen i København, Juli 2003

Reel analyse og lineær algebra (Matematik H1)

Erhvervsøkonomi-matematik studiet

4 timers skriftlig prøve

Alle hjælpemidler er tilladt, dog ikke regnemaskiner af nogen art.
Sættet er på 3 sider og består af 6 opgaver.

Opgave 1 (Vægt ca. 15 %)

Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er giver ved

$$f(x, y) = x^2 e^{-y} + y^2 e^{-x}$$

(i) Find to stationære punkter for f.

(ii) Afgør hvilke af dem – om nogen – der giver maksimum, henholdsvis minimum, og hvilke der er saddelpunkter.

Opgave 2 (Vægt ca. 15 %)

(i) Find samtlige egenværdier for matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(ii) Afgør om matricen $\underline{\underline{A}}$ ovenfor er diagonaliserbar. Afgør ogsaa om der findes en ortonormal basis i $\mathbb{R}^3$ bestående af egenvektorer for $\underline{\underline{A}}$.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (Vægt ca. 20 %)

Idet log betegner den naturlige logaritme betragtes funktionen

$$f(x) = -\log(1-x) = \log(\tfrac{1}{1-x}) \quad \text{for} \quad |x| < 1$$

(i) Vis at der for differentialkvotienterne af f gælder formlen

$$f^{(n)}(x) = (n-1)!\,(1-x)^{-n} \qquad \text{for} \qquad n \geq 1$$

(ii) Opskriv Taylorpolynomiet p_n af n'te grad for f udviklet ud fra punktet $x_0 = 0$.

(iii) Angiv formen af Lagrange's restled $R_{n+1}(x) = f(x) - p_n(x)$ udtrykt ved den $n+1$'ste afledede af f.

Opgave 4 (Vægt ca. 20 %)

Lad $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ betegne standard normalbasisvektorerne i det euklidiske rum $\mathbb{R}^n$ og definér en lineær afbildning f ved for alle x_i i $\mathbb{R}$, hvor $1 \leq i \leq n$, at sætte

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \underline{e}_i\right) = x_n \underline{e}_1 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i \underline{e}_{i+1}$$

(i) Opskriv matricen for f og vis at den er ortogonal.

(ii) Vis at hvis $n = 5$ har f kun én egenværdi og det tilhørende egenrum er éndimensionalt.

Opgave 5 (Vægt ca. 15 %)

Lad f være en funktion i $C^2(\mathbb{R}^2)$ og definér

$$g(x) = \int_0^x f(x, y)\, dy$$

(i) Find et udtryk for $g''(x)$ ved hjælp af f.

(ii) Vis at funktionen $g(x) = \int_0^x e^{xy^2}\, dy$ er strengt konveks for $x > 0$.

Opgavesættet fortsættes på side 3

Opgave 6 (Vægt ca. 15 %)

(i) Skitsér området Ω i $\mathbb{R}^2$ bestemt ved ulighederne

$$0 \le y \le 1 \quad \text{og} \quad -\sqrt{1-y} \le x \le \sqrt{1-y}$$

og sammenlign Ω med området bestemt ved ulighederne

$$-1 \le x \le 1 \quad \text{og} \quad 0 \le y \le 1 - x^2$$

(ii) Beregn arealet af Ω.

(iii) Udregn integralet

$$\iint_\Omega x^2 \, dy \, dx$$