Reel analyse og lineær algebra (Matematik H1)

Erhvervsøkonomi-matematik studiet

Vejledende skriftlig prøve i 3 timer 10 min.

Alle hjælpemidler er tilladt, med undtagelse af elektronisk udstyr.
Sættet er på 2 sider og består af 4 opgaver.

Opgave 1 (Vægt ca. 20 %)

En lineær afbildning $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ er beskrevet ved at

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}.$$

(a) Find matricen $\underline{\underline{A}}$ for f. (*Vink:* Husk søjlereglen.)

(b) Find determinanten af $\underline{\underline{A}}$.

Opgave 2 (Vægt ca. 30 %)

Betragt funktionen

$$F(x,y,z) = \frac{z^2}{xy} + x, \tag{1}$$

defineret på $S = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0,\ y > 0 \,\}$.

(a) Det oplyses, at ligningen

$$F(x,y,z) = 2 \tag{2}$$

i nærheden af punktet $(1,1,1)$ definerer z som en funktion af (x,y), således at løsningerne til (2) er punkterne (x,y,z) med $z = h(x,y)$ (for (x,y) i en passende cirkel med centrum $(1,1)$), og at funktionen h er kontinuert med kontinuerte partielle afledede af orden ≤ 2. Beregn $h'_1(1,1)$ og $h'_2(1,1)$.

(b) Angiv en ligning for tangentplanen i punktet $(1,1,1)$ til den flade i $\mathbb{R}^3$, der fremstilles ved (2).

(c) Beregn h''_{11}, h''_{12} og h''_{22} i punktet $(1,1)$, og undersøg om h er konkav eller konveks på en lille cirkel omkring $(1,1)$.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (Vægt ca. 20 %)

Betragt matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

(a) Find samtlige løsninger til ligningen

(1) $$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 3a \end{pmatrix},$$

hvor a er et givet reelt tal (her betegner $\underline{\underline{X}}$ en søjlevektor med koordinaterne x_1, x_2, x_3, x_4, x_5).

(b) Betragt dernæst ligningen

(2) $$\underline{\underline{A}}^t\underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{B}},$$

hvor $\underline{\underline{A}}^t$ er matricen, der fås ved transponering af $\underline{\underline{A}}$, og $\underline{\underline{Y}}$ og $\underline{\underline{B}}$ er søjlevektorer. Angiv et valg af $\underline{\underline{B}}$, for hvilket ligning (2) ikke har nogen løsning.

Opgave 4 (Vægt ca. 30 %)

Betragt funktionen

(1) $$f(x, y) = x^2 - xy,$$

defineret på $\mathbb{R}^2$.

(a) Skitsér nogle niveaukurver for f (fx. for $c = -1, 0, 1$).

(b) Find eventuelle stationære punkter for f, og find ud af deres type (lokalt maksimum, lokalt minimum eller saddelpunkt).

(c) Man betragter nu f på området

$$D = \{\, (x, y) \mid 0 \le x \le y,\ y \le 4 \,\};$$

skitsér dette. Gør rede for, at f antager maksimum og minimum på D, og find samtlige punkter hvor maksimum, henholdsvis minimum, antages.