

## Reel analyse og lineær algebra (Matematik H1)

### Erhvervsøkonomi-matematik studiet

Vejledende skriftlig prøve i 3 timer 10 min.

Alle hjælpemidler er tilladt, med undtagelse af elektronisk udstyr.  
Sættet er på 2 sider og består af 4 opgaver.

#### Opgave 1 (Vægt ca. 20 %)

En lineær afbildning  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  er beskrevet ved at

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- (a) Find matricen  $\underline{A}$  for  $f$ . (Vink: Husk søjlereglen.)  
(b) Find determinanten af  $\underline{A}$ .

#### Opgave 2 (Vægt ca. 30 %)

Betragt funktionen

$$(1) \quad F(x, y, z) = \frac{z^2}{xy} + x,$$

defineret på  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0, y > 0\}$ .

- (a) Det oplyses, at ligningen

$$(2) \quad F(x, y, z) = 2$$

i nærheden af punktet  $(1, 1, 1)$  definerer  $z$  som en funktion af  $(x, y)$ , således at løsningerne til (2) er punkterne  $(x, y, z)$  med  $z = h(x, y)$  (for  $(x, y)$  i en passende cirkel med centrum  $(1, 1)$ ), og at funktionen  $h$  er kontinuert med kontinuerede partielle afledede af orden  $\leq 2$ . Beregn  $h'_1(1, 1)$  og  $h'_2(1, 1)$ .

(b) Angiv en ligning for tangentplanen i punktet  $(1, 1, 1)$  til den flade i  $\mathbb{R}^3$ , der fremstilles ved (2).

(c) Beregn  $h''_{11}$ ,  $h''_{12}$  og  $h''_{22}$  i punktet  $(1, 1)$ , og undersøg om  $h$  er konkav eller konveks på en lille cirkel omkring  $(1, 1)$ .

**Opgave 3** (Vægt ca. 20 %)

Betragt matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

(a) Find samtlige løsninger til ligningen

$$(1) \quad \underline{\underline{A}}\underline{\underline{X}} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 3a \end{pmatrix},$$

hvor  $a$  er et givet reelt tal (her betegner  $\underline{\underline{X}}$  en søjlevektor med koordinaterne  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ ).

(b) Betragt dernæst ligningen

$$(2) \quad \underline{\underline{A}}^t \underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{B}},$$

hvor  $\underline{\underline{A}}^t$  er matricen, der fås ved transponering af  $\underline{\underline{A}}$ , og  $\underline{\underline{Y}}$  og  $\underline{\underline{B}}$  er søjlevektorer. Angiv et valg af  $\underline{\underline{B}}$ , for hvilket ligning (2) ikke har nogen løsning.

**Opgave 4** (Vægt ca. 30 %)

Betragt funktionen

$$(1) \quad f(x, y) = x^2 - xy,$$

defineret på  $\mathbb{R}^2$ .

(a) Skitsér nogle niveaukurver for  $f$  (fx. for  $c = -1, 0, 1$ ).

(b) Find eventuelle stationære punkter for  $f$ , og find ud af deres type (lokalt maksimum, lokalt minimum eller saddelepunkt).

(c) Man betragter nu  $f$  på området

$$D = \{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq y, y \leq 4 \};$$

skitsér dette. Gør rede for, at  $f$  antager maksimum og minimum på  $D$ , og find samtlige punkter hvor maksimum, henholdsvis minimum, antages.