Københavns Universitet
Eksamen ved Handelshøjskolen i KøbenhavnAugust 1999

Matematik H1

Erhvervsøkonomi-matematik studiet

4 timers skriftlig prøve.

Alle hjælpemidler er tilladt, dog ikke regnemaskiner af nogen art.
Sættet er på 3 sider og består af 6 opgaver.

Opgave 1 (Vægt 15%)

Lad

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1+\alpha \\ 0 & 1 & 1-\alpha \end{pmatrix}, \qquad \underline{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

hvor $\alpha \in \mathbf{R}$ er en parameter.

(a) Udregn $\det \underline{\underline{A}}$.

(b) For hvilken værdi af α tilfredsstiller vektoren $\underline{u}$ ligningssystemet $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$?

(c) Lad α variere frit. Bestem den fuldstændige løsning til ligningssystemet $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$.

Opgave 2 (Vægt 20%)

Lad

$$f(x, y) = x^3 + xy^2 - 6x^2 - 36x.$$

(a) Bestem de første ordens partielle afledede samt Hesse matricen $\underline{\underline{H}}(x, y)$ for f i ethvert punkt (x, y). Udregn endvidere determinanten af $\underline{\underline{H}}(x, y)$.

(b) Funktionen f har 4 stationære punkter. Bestem disse, og afgør typen af hvert af dem.

(c) Betragt cirkelskiven

$$S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 36\}.$$

Begrund, at f antager både en mindste og en største værdi i S. Bestem disse værdier og samtlige punkter, hvori de antages.

(d) Betragt dernæst området

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 3, |y| \leq 3\}.$$

Vis, at $\det \underline{\underline{H}}(x, y) \geq 0$ for alle $(x, y) \in A$, og vis desuden, at f er konveks i dette område.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (Vægt 10%)

Lad $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ og $g\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ være de lineære afbildninger givet ved matricerne, henholdsvis

$$\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 6 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestem en basis for $\mathbf{R}^2$, hvori f repræsenteres af en diagonalmatrix. Angiv også denne diagonalmatrix.

(b) Bestem ligeledes en basis for $\mathbf{R}^4$, hvori g repræsenteres af en diagonalmatrix, og angiv denne diagonalmatrix.

Opgave 4 (Vægt 25%)

Lad vektorerne $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4$ i talrummet $\mathbf{R}^4$ være givet ved

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Lad endvidere $f\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ være den lineære afbildning, hvis matrix har disse vektorer som søjler (i den angivne rækkefølge).

(a) Vis, at sættet $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ udgør en ortogonal basis for billedrummet $f(\mathbf{R}^4)$. Vis, at $\underline{a}_1$ og $\underline{a}_2$ er egenvektorer for f, og angiv de tilhørende egenværdier.

(b) Begrund ved hjælp af dimensionssætningen, at dimensionen af $\ker f$ er 2. Vis dernæst, at vektorerne

$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

tilhører $\ker f$ og udgør en ortogonal basis for dette underrum.

(c) Vis, at sættet $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{b}_1, \underline{b}_2$ udgør en ortogonal basis for $\mathbf{R}^4$. Bestem matricen for f med hensyn til denne basis (benyt søjlereglen).

(d) Bestem koordinattransformationsmatricen for overgangen fra den naturlige basis $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4$ til den ortonormale basis $\frac{1}{3}\underline{a}_1, \frac{1}{3}\underline{a}_2, \frac{1}{3}\underline{b}_1, \frac{1}{3}\underline{b}_2$.

Opgave 4 fortsættes på side 3

(e) Lad

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bestem $\underline{u} \in f(\mathbf{R}^4)$ og $\underline{v} \in \ker f$ således at $\underline{x} = \underline{u} + \underline{v}$. Bestem desuden en vektor $\underline{w} \in \mathbf{R}^4$ for hvilken $f(\underline{w}) = \underline{u}$.

Opgave 5 (Vægt 15%)

Lad

$$F(x, y) = x^a y - a\ln(xy), \qquad (x, y > 0)$$

hvor a er en konstant, $a \neq 1$. Det oplyses (og skal ikke eftervises), at ligningen $F(x, y) = 1$ fastlægger y som en to gange differentiabel funktion af x i nærheden af punktet $x_0 = 1$, med værdien $y_0 = 1$ i dette punkt. Vis, at denne implicit givne funktion har vandret tangent i x_0, og afgør for hver værdi af a (dog undtaget $a = 1$), om der er lokalt maksimum eller lokalt minimum i x_0.

Opgave 6 (Vægt 15%)

Lad funktionerne $f, g, h\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ være givet ved

$$f(x, y, z) = x + 2y, \qquad g(x, y, z) = x^2 + y^2 + xy, \qquad h(x, y, z) = y + z.$$

Betragt problemet, at bestemme maksimum og minimum for f under bibetingelsen

$$\begin{cases} g(x, y, z) = 1 \\ h(x, y, z) = 1. \end{cases}$$

Det oplyses (og skal ikke bevises), at mængden af punkter (x, y, z), der opfylder bibetingelsen, er lukket og begrænset.

Opstil Lagrangefunktionen $\mathcal{L}$, der svarer til ekstremumsbestemmelsen, og løs derefter problemet. Angiv foruden ekstremumsværdierne også de punkter, hvori ekstremum antages, samt de tilhørende værdier af Lagrange multiplikatorerne.