Matematik H1

Erhvervsøkonomi-matematik studiet

4 timers skriftlig prøve.

Alle hjælpemidler er tilladt, dog ikke regnemaskiner af nogen art.
Sættet er på 3 sider og består af 6 opgaver.

Opgave 1 (Vægt 20%)

Lad funktionen $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ være givet ved

$$f(x, y) = -xy^2 + x^2 + 2y^2.$$

(a) Udregn de partielle afledede f'_x og f'_y samt Hesse matricen for f.

(b) Bestem samtlige stationære punkter for f, og afgør for hvert af dem om det er et lokalt minimum, et lokalt maksimum eller et saddelpunkt.

(c) Lad området A være givet ved

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0, y \geq 0\},$$

og lad C være den del af randen af A som udgøres af en (afsluttet) kvartcirkel. Skitser A og C. Bestem værdimængden $f(C)$.

(d) Bestem mindsteværdien og størsteværdien for f i A.

Opgave 2 (Vægt 10%)

Lad

$$g(x) = \int_0^1 e^{xt^2}\, dt$$

for $x \in \mathbf{R}$.

(a) Beregn $g(0)$ samt, under henvisning til en relevant sætning i lærebogen, $g'(0)$ og $g''(0)$. Opstil dernæst Taylorpolynomiet $P_2(x)$ af 2. grad for g ud fra $x = 0$.

(b) Gør rede for at der gælder $0 \leq g'''(c) \leq \frac{1}{7}e^c$ for alle $c \geq 0$. Benyt dette samt vurderingen $\frac{1}{7}e^{0.1} < 0.2$ til at give en vurdering af størrelsen af restleddet

$$R_3(x) = g(x) - P_2(x)$$

for $x \in [0,\ 0.1]$.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (Vægt 20%)

Lad

$$f(x, y) = x^2 - 8x - y^2 + 5y$$

og

$$g(x, y) = 2x^2 + y^2.$$

(a) Lad $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid g(x, y) = 27\}$. Begrund at S er afsluttet og begrænset, og at funktionen $f(x, y)$ antager både en størsteværdi og en mindsteværdi på S.

I det følgende betragter vi problemet: At bestemme de ovennævnte ekstrema for f under bibetingelsen $g(x, y) = 27$.

(b) Opstil Lagrangefunktionen $\mathcal{L}(x, y, \lambda)$ der svarer til denne ekstremumsbestemmelse. Det oplyses, at der findes et punkt (x_1, y_1) med $x_1 = 1$, som giver anledning til et stationært punkt for $\mathcal{L}$. Bestem dette punkt og værdien λ_1 af den tilhørende Lagrangemultiplikator.

(c) Til værdien $\lambda_2 = -\frac{1}{6}$ af Lagrangemultiplikatoren svarer et andet stationært punkt (x_2, y_2) for $\mathcal{L}$. Bestem dette punkt og kontroller at det opfylder bibetingelsen.

(d) Udover de ovennævnte to punkter er der yderligere to stationære punkter for $\mathcal{L}$. Disse oplyses at være henholdsvis

$$(x_3, y_3, \lambda_3) = (2.239,\ 4.120,\ -0.3933)$$

og

$$(x_4, y_4, \lambda_4) = (-3.573,\ 1.214,\ 1.060)$$

med funktionsværdierne $f(x_3, y_3) = -9.273$ og $f(x_4, y_4) = -11.22$. Bestem ved hjælp af denne oplysning største- og mindsteværdien for $f(x, y)$ på S.

Opgave 4 (Vægt 15%)

Lad vektorerne $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4$ i talrummet $\mathbf{R}^4$ være givet ved

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

og lad $U \subset \mathbf{R}^4$ være underrummet udspændt af de fire vektorer.

(a) Bestem en basis for U.

Opgave 4 fortsættes på side 3

(b) Lad $\underline{\underline{B}}$ være den 4×4 matrix, hvis *rækker* udgøres af de fire vektorer, altså

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Opgave 4 fortsættes på side 4

Løs det homogene ligningssystem $\underline{\underline{B}}\,\underline{x} = \underline{0}$, $\underline{x} \in \mathbf{R}^4$. Benyt løsningen til at angive en basis for det ortogonale komplement $U^\perp$ til U.

(c) Bestem ortogonalprojektionen af vektoren $\underline{b} = (2, 2, -2, 0)$ på $U^\perp$. Benyt resultatet til også at bestemme ortogonalprojektionen af $\underline{b}$ på U.

Opgave 5 (Vægt 20%)

Lad $\underline{\underline{S}}$ være 4×4 matricen

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Udregn determinanten af $\underline{\underline{S}}$, og vis derved at matricen er regulær.

(b) Lad

$$\underline{\underline{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & a & b \\ -1 & 1 & c & d \end{pmatrix}.$$

Udregn matrixproduktet $\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{R}}$, og bestem tallene $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ således at $\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{S}}^{-1}$.

(c) Lad $\underline{s}_1, \underline{s}_2, \underline{s}_3, \underline{s}_4$ betegne søjlerne i $\underline{\underline{S}}$, og lad den lineære afbildning $f\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ være givet ved

$$f(\underline{s}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(\underline{s}_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad f(\underline{s}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(\underline{s}_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestem vektorerne $f(\underline{e}_1)$, $f(\underline{e}_2)$, $f(\underline{e}_3)$, $f(\underline{e}_4)$, hvor $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4 \in \mathbf{R}^4$ betegner de naturlige basisvektorer.

(d) Lad $U \subset \mathbf{R}^4$ være underrummet

$$U = \{\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_2 = x_4 = 0\}.$$

Bestem en basis for underrummet $f(U)$ i $\mathbf{R}^3$.

Opgavesættet fortsættes på side 5

Opgave 6 (Vægt 15%)

For $\alpha \in \mathbf{R}$ betragtes 3×3 matricen

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}(\alpha) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & \alpha \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Udregn det karakteristiske polynomium for $\underline{\underline{A}}(\alpha)$. Find dets rødder samt rodmultipliciteten af hver af disse.

(b) Bestem, for hvert α, en vektor $\underline{v} = \underline{v}(\alpha)$ som er egenvektor for $\underline{\underline{A}}(\alpha)$ med egenværdien $\lambda = 4$.

(c) Begrund at $\underline{\underline{A}}(\alpha)$ ikke er diagonaliserbar for $\alpha \neq 0$. Lad til sidst $\alpha = 0$ og bestem en basis for $\mathbf{R}^3$ bestående af egenvektorer for $\underline{\underline{A}}(0)$.