Københavns Universitet
Eksamen ved Handelshøjskolen i København august 1997

Matematik H1

Erhvervsøkonomi-matematik studiet

4 timers skriftlig prøve

Alle hjælpemidler er tilladte, dog ikke regnemaskiner af nogen art.
Sættet er på 3 sider og består af 6 opgaver.

Opgave 1 (15 points)

Betragt problemet

$$\text{minimer } (x-1)^2 + y^2 + z^2$$

under bibetingelsen

$$x + 2y + 3z = 4\,.$$

Det oplyses at problemet har en løsning.

(i) Løs problemet ved hjælp af Lagranges metode.

(ii) Giv en (evt. geometrisk) begrundelse for, at det tilsvarende maksimeringsproblem ingen løsning har.

Opgave 2 (18 points)

Betragt følgende vektorer i $\mathbb{R}^4$

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Sæt $U = \text{ span}\,(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$.

(i) Vis, at $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ er lineært uafhængige og at $\underline{b} \in U$.

(ii) Angiv en basis for $U^\perp$.

(iii) Lad $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ være en vilkårlig lineær afbildning, som opfylder

$$f(\underline{a}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(\underline{a}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad f(\underline{a}_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Opgave 2 fortsættes på side 2

Beregn $f(\underline{b})$.

(iv) Vis, at f er surjektiv og beregn derefter ved hjælp af dimensionssætningen $\dim(\ker f)$.

[Det bemærkes, at resultaterne i (iii) – (iv) er uafhængige af f's værdier på vektorer udenfor U!]

Opgave 3 ((20 points)

Lad $f(x,y) = e^{-\cos(2x+y)} + \cos x, (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(i) Bestem f's partielle afledede af 1. orden.

(ii) Vis, at $(0,0)$ er et stationært punkt for f og bestem arten af dette.

(iii) Vis, at der for alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gælder $e^{-1} - 1 \leq f(x,y) \leq e + 1$.

(iv) Gør rede for at $e^{-1} - 1$ er en minimumsværdi for f.

(v) Opskriv Taylors formel for $f(x,y)$ med lineære led og restled omkring $(0, \frac{\pi}{2})$.

Opgave 4 (15 points)

(i) For hvilke værdier af λ har ligningssystemet

$$\begin{aligned} \lambda x_1 - x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 - 2x_3 &= 3 \\ 2x_2 + (\lambda - 2)x_3 &= 4 \end{aligned}$$

præcis én løsning?

(ii) Angiv for enhver værdi af λ den fuldstændige løsning til ligningssystemet.

Opgave 5 (15 points)

Lad $F(x,y,z) = x^4 + y^3 + z^3 - 6z, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Ligningen $F(x,y,z) = -3$ definerer z som en differentiabel funktion $z = f(x,y)$ af x og y i en omegn af punktet $(1,1,1)$.

(i) Bestem $f'_x(1,1)$ og $f'_y(1,1)$.

(ii) Bestem ligningen for tangentplanen T til niveaufladen $F(x,y,z) = -3$ i punktet $(1,1,1)$.

(iii) For hvilke værdier af t er $(1, 1+t, 1+t)$ en vektor i tangentplanen T?

Opgavesættet fortsættes på side 3

Opgave 6 (17 points)

For $a \in \mathbb{R}$ betragtes følgende matrix

$$\underline{\underline{A}}(a) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Gør rede for at $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ er en egenvektor for $\underline{\underline{A}}(a)$ og angiv den tilhørende egenværdi.

(ii) Angiv for ethvert a en ortogonal 3×3-matrix $\underline{\underline{S}}(a)$ og en 3×3-diagonalmatrix $\underline{\underline{D}}(a)$ således at

$$\underline{\underline{S}}(a)\underline{\underline{A}}(a)\underline{\underline{S}}(a)^{-1} = \underline{\underline{D}}(a).$$

(iii) For hvilke værdier af a er den til $\underline{\underline{A}}(a)$ hørende kvadratiske form positiv definit?