

Matematik H1

Erhvervsøkonomi-matematik studiet

4 timers skriftlig prøve

Alle hjælpemidler er tilladte, dog ikke regnemaskiner af nogen art.
Sættet er på 3 sider og består af 6 opgaver.

Opgave 1 (15 points)

Betragt problemet

$$\text{minimer } (x - 1)^2 + y^2 + z^2$$

under bibetingelsen

$$x + 2y + 3z = 4.$$

Det oplyses at problemet har en løsning.

- (i) Løs problemet ved hjælp af Lagranges metode.
- (ii) Giv en (evt. geometrisk) begrundelse for, at det tilsvarende maksimeringsproblem ingen løsning har.

Opgave 2 (18 points)

Betragt følgende vektorer i \mathbb{R}^4

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Sæt $U = \text{span}(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$.

- (i) Vis, at $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ er lineært uafhængige og at $\underline{b} \in U$.
- (ii) Angiv en basis for U^\perp .
- (iii) Lad $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ være en vilkårlig lineær afbildning, som opfylder

$$f(\underline{a}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(\underline{a}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f(\underline{a}_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Beregn $f(\underline{b})$.

(iv) Vis, at f er surjektiv og beregn derefter ved hjælp af dimensionssætningen $\dim(\ker f)$.

[Det bemærkes, at resultaterne i (iii) – (iv) er uafhængige af f 's værdier på vektorer udenfor U !]

Opgave 3 ((20 points)

Lad $f(x, y) = e^{-\cos(2x+y)} + \cos x$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- (i) Bestem f 's partielle afledede af 1. orden.
- (ii) Vis, at $(0, 0)$ er et stationært punkt for f og bestem arten af dette.
- (iii) Vis, at der for alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gælder $e^{-1} - 1 \leq f(x, y) \leq e + 1$.
- (iv) Gør rede for at $e^{-1} - 1$ er en minimumsværdi for f .
- (v) Opskriv Taylors formel for $f(x, y)$ med lineære led og restled omkring $(0, \frac{\pi}{2})$.

Opgave 4 (15 points)

(i) For hvilke værdier af λ har ligningssystemet

$$\begin{aligned}\lambda x_1 - x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 - 2x_3 &= 3 \\ 2x_2 + (\lambda - 2)x_3 &= 4\end{aligned}$$

præcis én løsning?

(ii) Angiv for enhver værdi af λ den fuldstændige løsning til ligningssystemet.

Opgave 5 (15 points)

Lad $F(x, y, z) = x^4 + y^3 + z^3 - 6z$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Ligningen $F(x, y, z) = -3$ definerer z som en differentiabel funktion $z = f(x, y)$ af x og y i en omegn af punktet $(1, 1, 1)$.

- (i) Bestem $f'_x(1, 1)$ og $f'_y(1, 1)$.
- (ii) Bestem ligningen for tangentplanen T til niveaufladen $F(x, y, z) = -3$ i punktet $(1, 1, 1)$.
- (iii) For hvilke værdier af t er $(1, 1 + t, 1 + t)$ en vektor i tangentplanen T ?

Opgave 6 (17 points)

For $a \in \mathbb{R}$ betragtes følgende matrix

$$\underline{A}(a) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (i) Gør rede for at $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ er en egenvektor for $\underline{A}(a)$ og angiv den tilhørende egenværdi.
- (ii) Angiv for ethvert a en ortogonal 3×3 -matrix $\underline{S}(a)$ og en 3×3 -diagonalmatrix $\underline{D}(a)$ således at
- $$\underline{S}(a)\underline{A}(a)\underline{S}(a)^{-1} = \underline{D}(a).$$
- (iii) For hvilke værdier af a er den til $\underline{A}(a)$ hørende kvadratiske form positiv definit?